EUGENIO ROANES MACÍAS

DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS

anaya

DIDACTICA DE LAS MATEMATICAS

Dr. EUGENIO ROANES MACIAS

Catedrático de Matemáticas de la E. Universitaria
de E. G. B. "Pablo Montesino".

DIDACTICA DE LAS MATEMATICAS

anaya

A mi maestro,
el profesor Abellanas.
Y a todos los
profesores de E.G.B.

PROLOGO

Aunque la mayor parte de los conceptos introducidos en la presente obra son muy elementales, se presentan como si ésta fuera la primera vez que el alumno toma contacto con ellos, lo que no está lejos de la realidad para la mayoría de ellos.

Muchos ejemplos *parecerán pueriles. Esta ha sido la intención que nos ha guiado, pensando en que el futuro profesor maneje ejemplos que puedan ser útiles en su futura vida profesional.*

En cuanto a las demostraciones, *se ha prescindido que aquéllas que hemos considerado complicadas o no formativas, sustituyéndolas, en muchos casos, por construcciones adecuadas. Nos ha llevado a ello el hecho de que* la Matemática ha de ser esencialmente constructiva para el niño, *y en este sentido hemos querido influir al formar al futuro profesor.*

Los ejercicios *han sido propuestos de modo que el alumno colabore en el desarrollo de cada idea en estudio, lo que justifica su situación allí donde interesan, sin esperar a terminar un capítulo o un párrafo para manejar ejercicios relativos a los conceptos allí estudiados. Estos han sido elegidos de modo que puedan ser efectuados con toda facilidad sin necesidad de esperar a que llegue alguna "feliz idea", no necesitando, por tanto, muchos alumnos la ayuda del profesor.*

Hemos dividido la obra en dos grandes bloques. El primero, que engloba 14 capítulos, tiene por objetivo fundamental informar sobre las estructuras actuales de la Matemática. El segundo está más orientado hacia la metodología de la matemática elemental.

En cada capítulo recomendamos bibliografía *adecuada para ampliar el tema, si así interesara, y sugerimos algunos libros donde pueden encontrarse otras situaciones didácticas útiles al futuro profesor.*

Deseo, finalmente, expresar mi agradecimiento a los alumnos, pues de sus clases ha surgido la inspiración hacia el camino que hemos considerado idóneo, después de varias tentativas muchas veces.

Gracias, en general, a cuantos directa o indirectamente han colaborado en la elaboración de este libro.

E. ROANES

ADVERTENCIA AL LECTOR

Cada uno de los veinticuatro capítulos está dividido en varios párrafos, cuya numeración comienza en el uno. En cada párrafo hay, en general, varias definiciones, ejemplos, ejercicios y proposiciones. Cada uno de ellos va indicado con dos números, el primero de los cuales indica el párrafo en que se encuentra y el segundo indica su posición dentro de ese párrafo. Así, por ejemplo, en el párrafo 2 del capítulo 4, que trata sobre «propiedades de las relaciones binarias» comienza con *definición* 2.1; sigue la *definición* 2.2; a continuación la *definición* 2.3, etc. Los ejercicios del mismo párrafo llevan numeración independiente, desde el 2.1 hasta el 2.8. En general, las definiciones, ejemplos, ejercicios y proposiciones de cada párrafo llevan numeración independiente. Esto puede conducir a algún error al principio, si, por ejemplo, cuando se lee «véase ejemplo 4.2» se entiende «véase ejercicio 4.2», pero en seguida se habitúa el lector a esta notación y se da cuenta de su comodidad.

TABLA DE LOS SIGNOS MAS UTILIZADOS

$\in$	pertenece.
$\notin$	no pertenece.
$\subset$	incluido, contenido.
$\not\subset$	no contenido.
$\cap$	intersección.
$\cup$	unión.
$\varnothing$	conjunto vacío.
$\mathcal{P}(E)$	partes del conjunto E.
$\complement$	complemento.
$\triangle$	diferencia simétrica.
$A \times B$	conjunto producto de A por B.
$f(a)$	imagen del elemento a en la aplicación f.
$g \circ f$ / gf	aplicación compuesta o aplicación producto de f y g.
$a R b$	a está relacionado con b en la relación R.
C/R	conjunto cociente del conjunto C respecto de la relación de equivalencia R.
$\leqslant$	menor o igual.
$\Rightarrow$	implicación.
$\Leftrightarrow$	equivalencia.
$\mid$	divide a
$\sim$	equivalente (respecto de una relación de equivalencia)
N	conjunto de los naturales.
Z	conjunto de los enteros.
Q	conjunto de los racionales.
R	conjunto de los reales.
C	conjunto de los complejos.
Z_+	enteros positivos.
Z_+^*	enteros positivos no nulos.
$\lvert \ldots \rvert$	valor absoluto.
$\wedge$	máximo común divisor y conjunción lógica.
$\vee$	mínimo común múltiplo y disyunción lógica.

1 GENERALIDADES

1. Concepto actual de la Matemática

En el Bachillerato se manejan varios *objetos matemáticos*, esto es, entes abstractos que son objeto de estudio por parte de la Matemática: números enteros, números racionales, polinomios...; pero el número de objetos matemáticos ha aumentado considerablemente.

Cuando se opera con enteros y polinomios, por ejemplo, se percibe que tienen algo en común. Esto mismo ocurre al comparar otros objetos matemáticos.

Estos hechos llevaron a algunos matemáticos del siglo pasado a analizar lo que hay de común en ciertos objetos matemáticos estudiados anteriormente y a estudiar, mediante un nuevo proceso de abstracción, otros objetos matemáticos más generales, que comprendan, como caso particular, a varios tipos de objetos matemáticos tradicionales.

Por ejemplo, sabemos que los números enteros y los polinomios con coeficientes racionales se rigen por las mismas leyes operativas. Ambos responden a la estructura general de anillo, que estudiaremos oportunamente.

Los conceptos fundamentales del edificio matemático actual, en opinión de gran número de matemáticos, son los siguientes:

a) Unos entes elementales { *conjuntos* y *aplicaciones* o *funciones*.

b) Unas estructuras fundamentales, de tres tipos {
- *Algebraicas:* semigrupos, grupos, anillos, cuerpos, módulos, espacios vectoriales, etc. Estas estructuras son objeto de estudio en la parte de la Matemática que llamamos Algebra.
- De *orden* (y, en particular, la de retículo), y
- *Topológicas*, que estudian el concepto de «proximidad». La parte de la Matemática que estudia estas estructuras se llama Topología.

El número de estas estructuras fundamentales podría aumentar con el desarrollo de la Matemática.

Una característica fundamental de la Matemática actual, comparada con las Matemáticas tradicionales, es su unidad. La Matemática moderna es más sencilla, por ser más simple, como consecuencia de estar más elaborada, y si ha surgido con posterioridad es porque la simplificación de los conocimientos es posterior a su adquisición. La Matemática Moderna supone una economía de memoria, como consecuencia de una exposición mejor organizada.

En realidad, quizás fuera mejor llamarla Matemática Actual, ya que lo único moderno es su introducción a nivel elemental. Por otra parte, esta Matemática, que llamamos Moderna, será superada y llegará a ser, sin duda, Matemática Antigua en un futuro no remoto, según hace suponer el ritmo a que se desenvuelve actualmente la investigación.

De todos modos, el lector se hará una idea de lo que es la Matemática Actual a medida que avance en su estudio, mucho mejor de lo que ahora se puede anticipar.

2. Importancia formativa y utilitaria

La *importancia formativa* de la Matemática Actual radica en el hecho de que permite desarrollar la capacidad de pensar, influyendo, de manera esencial, en la formación de la inteligencia. Y esto tiene una importancia excepcional. Basta decir, para comprenderlo, que hoy la mayor riqueza de un país son sus cerebros.

En cuanto a la *importancia utilitaria*, la Matemática proporciona esquemas mentales, que permiten resolver problemas de otras disciplinas.

Hoy se aprovechan de las técnicas matemáticas no sólo la Física y la Química, sino también la Biología, la Economía e incluso las Ciencias Humanas. Asimismo, y por poner otro ejemplo, algunos de los problemas que plantea el tráfico rodado de una gran ciudad se resuelven aplicando esquemas matemáticos apropiados.

Opinamos que, *a nivel escolar, la importancia formativa debe tener prioridad frente a la utilitaria*, ya que la mayoría de los alumnos elegirán profesiones desconectadas de la Matemática, pero todos, sin excepción, necesitarán muchas veces utilizar su inteligencia.

Interesa, por tanto, enseñar a discurrir, mejor que a adquirir gran maestría y rapidez en el desarrollo de un proceso, que puede mecanizarse. Debemos, pues, evitar el aprendizaje de «recetas de cocina» para hacer problemas o aprender de memoria teoremas más o menos importantes.

Además, la Matemática es quizás la disciplina más adecuada para practicar el rigor de pensamiento y de lenguaje.

3. Necesidad de su didáctica

Las razones anteriormente expuestas implican la necesidad de una didáctica nueva, lo que tiene una importancia decisiva en la enseñanza de la Matemática Elemental.

En la didáctica tradicional se entiende al maestro como un «transmisor de conocimientos». Hoy el método expositivo está superado en la enseñanza de la Matemática Elemental.

En el método expositivo, el alumno es un elemento pasivo en la clase. Y cabe preguntarse hasta qué punto se aumenta la capacidad de pensar del niño por este procedimiento. Imaginemos, al efecto, una clase de Gimnasia en que el profesor explique ante los chicos, con toda claridad y precisión, una tabla de gimnasia, mientras los alumnos toman las notas oportunas. Es evidente que al final de la clase los alumnos no han desarrollado en absoluto su fuerza muscular.

Actualmente, *el centro de la clase no debe ser el maestro, sino el alumno,* siendo el profesor el guía de la acción investigadora del alumno. La adquisición de conocimientos debe ir acompañada de la acción del niño. Se impone, pues, la enseñanza «viva» de la Matemática.

Por otra parte, no resulta aconsejable, a este nivel, seguir dividiendo la Matemática Elemental en compartimientos estancos: Aritmética, Geometría, Geografía, etc., proponiendo a menudo ejemplos que den muestra de utilidad de aplicación y conexión con estas otras disciplinas, de lo que presentaremos diversas situaciones en adelante.

También, y como norma general, a este nivel conviene tomar como punto de partida situaciones concretas, simples y familiares, a partir de las cuales comenzar el proceso de abstracción, esto es, de matematización.

Digamos, finalmente, que la Didáctica de las Matemáticas es aún una ciencia joven, en espera, por tanto, de futuros perfeccionamientos.

Si se desea ampliar estas ideas, pueden verse los siguientes libros (el segundo, de lectura más difícil):

P. Puig Adam, *La Matemática y su enseñanza actual,* Publicaciones de la Revista «Enseñanza Media», Madrid, 1960.

J. Piaget, *La enseñanza de las Matemáticas,* Ed. Aguilar, Madrid, 1965.

2 CONJUNTOS

1. Conjuntos; elementos y pertenencia

Consideremos el *conjunto de las letras vocales*, es decir, el conjunto formado por las letras: *a, e, i, o, u.*

Representamos a este conjunto en la forma siguiente:

$$\{a, e, i, o, u\}$$

El *conjunto de los días de la semana* lo escribimos:

$$\{lunes, martes, miércoles, jueves, viernes, sábado, domingo\}$$

Otro *conjunto* es el *de los puntos de un círculo* de centro O y radio r, rayado en la figura 1.1.

La idea de *conjunto* aparece intuitivamente como *colección de objetos* o *entes*. Un conjunto queda *determinado* o *definido* cuando conocemos los objetos o entes que lo forman, es decir, cuando dado un objeto cualquiera podemos decidir si forma, o no forma, parte del conjunto.

Al conjunto de las vocales lo designaremos abreviadamente por V, para lo cual escribiremos:

$$V=\{a, e, i, o, u\}$$

Diremos que a es un *elemento* del conjunto V de las vocales; e es otro elemento de V; i es otro elemento de V, etc.; pero b no es un elemento de V.

Sea S el conjunto de los días de la semana, es decir:

$$S=\{lunes, martes, miércoles, jueves, viernes, sábado, domingo\}$$

martes es un elemento del conjunto S; *viernes* es un elemento de S; pero u no es un elemento de S.

Sea C el conjunto de puntos del círculo de la figura 1.1; el punto P es un elemento del conjunto C, pero el punto Q no es un elemento de C.

Los elementos de un conjunto son los objetos o entes que lo forman. Continuando con los ejemplos anteriores, para expresar que a es un

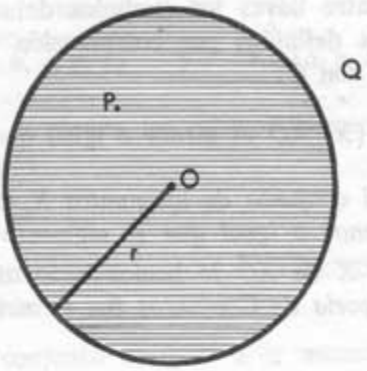


Figura 1.1

elemento del conjunto V diremos que el elemento a *pertenece* al conjunto V, y escribiremos:

$$\boxed{a \in V}$$

lo que se lee *a pertenece* a V.

Del mismo modo:

$$i \in V; \quad u \in V; \quad \textit{miércoles} \in S; \quad P \in C$$

Para expresar que b no es un elemento de V se dice que b *no pertenece* al conjunto V y se escribe:

$$b \notin V \qquad \text{lo que se lee } b \textit{ no pertenece a } V$$

Otros ejemplos:

$$\textit{viernes} \in S; \qquad \textit{viernes} \notin C; \qquad e \notin S; \qquad e \notin C; \qquad Q \notin C$$

Sea H el conjunto formado por las letras a, e, u.

De otro modo:

$$H = \{a, e, u\}$$

y comparemos la forma en que lo hemos definido con la forma en que se define el conjunto C, anteriormente citado, formado por los puntos del plano que verifican la propiedad de ser (como el punto P de la figura 1.1), el segmento $\overline{OP}$, menor o igual que el radio r.

Los conjuntos que, como el H, se definen enumerando cada uno de los elementos que lo constituyen, se dice que se determinan por *extensión*.

Aquellos que, como el C, se han definido dando una propiedad que han de verificar sus elementos, diremos que se determinan por *comprensión*.

Como se habrá observado, los conjuntos definidos por extensión se representan encerrando entre llaves los símbolos de sus elementos, separados entre sí por comas. Los definidos por comprensión se representan como lo haremos a continuación con C:

$$C=\{X \mid \overline{XO} \text{ es menor o igual que } r\}$$

lo que leeremos *C es el conjunto de los puntos X, tales que el segmento de extremos X y O es menor o igual que el segmento r.* Nótese que el trazo vertical | que separa a X de $\overline{XO}$ lo hemos leído *tal que.*

El iniciador de la *Teoría de Conjuntos* fue el matemático alemán CANTOR (1845-1918).

EJERCICIOS

1.1 Considerar el conjunto de las provincias aragonesas. Representarlo. Designarlo abreviadamente con una letra. Señalar un elemento de ese conjunto. Escribir, utilizando el signo apropiado, que pertenece al conjunto. Elegir otro elemento que no pertenezca al conjunto y escribir esto abreviadamente.

1.2 Las mismas cuestiones para el conjunto de las asignaturas de este curso.

1.3 Las mismas cuestiones para el conjunto de los números pares.

1.4 Lo mismo para el conjunto de los puntos del plano que equidistan de los puntos fijos A y B, esto es, para

$$\{X \mid \overline{XA}=\overline{XB}\}$$

1.5 Poner otro ejemplo y contestar a las mismas cuestiones.

1.6 Definir por comprensión el conjunto

$$\{3,\ 6,\ 9\}$$

---

2. Igualdad de conjuntos

• DEFINICIÓN 2.1: *Se dice que dos conjuntos, A y B, son iguales cuando tienen los mismos elementos.*

Esto se expresa escribiendo

$$\boxed{A=B}$$

• EJEMPLO 2.1: Si E es el conjunto de las provincias extremeñas y $F=\{$Cáceres, Badajoz$\}$, se verifica $E=F$.

• EJEMPLO 2.2: Si L es el conjunto del ejercicio 1.4 y M es el conjunto de los puntos de la mediatriz del segmento $\overline{AB}$, se verifica $L=M$.

• EJEMPLO 2.3: Los conjuntos

$$G=\{a, b, c, d, f\} \quad \text{y} \quad V=\{a, e, i, o, u\}$$

no son iguales, ya que no tienen los mismos elementos, aunque tienen uno común. Por ello escribimos

$$G \neq V$$

Las siguientes PROPIEDADES DE LA IGUALDAD DE CONJUNTOS son consecuencia inmediata de la definición 2.1:

a) Reflexiva: todo conjunto es igual a sí mismo.

Abreviadamente: para todo conjunto A se verifica:

$$\boxed{A=A}$$

b) Simétrica: si un conjunto A es igual a otro B, entonces también B es igual a A.

Abreviadamente:

$$\boxed{A=B \quad \textit{implica} \quad B=A}$$

c) Transitiva: si un conjunto A es igual a otro B y, a su vez, B es igual a un tercer conjunto C, entonces también A es igual a C.

Abreviadamente:

$$\boxed{\left.\begin{matrix} A=B \\ B=C \end{matrix}\right\} \textit{implican } A=C}$$

EJERCICIO

2.1 Sea $A=\{1, a, 3, 5\}$, donde a es un número fijo, y $B=\{2, 3, b, 1\}$, donde b es otro número. Determinar los números a y b, supuesto que $A=B$.

---

3. Subconjuntos

• EJEMPLO 3.1: Consideremos los conjuntos:

$$H=\{a, e, u\} \quad \text{y} \quad V=\{a, e, i, o, u\}$$

Observamos que todos los elementos de H pertenecen también a V. Por ello se dice que *H es un subconjunto de V*. Lo que escribimos abreviadamente:

$$H \subset V$$

que se lee *H está contenido en V*.

• EJEMPLO 3.2: Sea C el conjunto de puntos del círculo y R el conjunto de los puntos del cuadrado de centro el del círculo y lado doble del diámetro

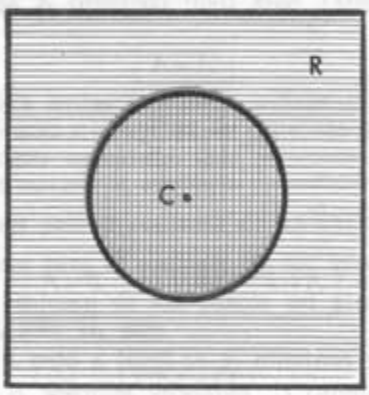


Figura 3.1

del círculo de la figura 3.1. Como todos los puntos de C pertenecen a R, C es un subconjunto de R y podemos escribir

$$C \subset R$$

Generalicemos esta idea:

• DEFINICIÓN 3.1: *Dados dos conjuntos, E y F, diremos que E es un subconjunto, o una parte, de F, si todos los elementos de E pertenecen también a F.*

Para expresar que E es un subconjunto de F escribiremos

$$E \subset F$$

y leeremos *E está* contenido en F, o bien, *E está incluido en F*. El signo de inclusión es, pues, $\subset$.

Es lo mismo decir que *E está contenido en F* que decir *F contiene a E*, lo que representaremos así:

$$F \supset E$$

• EJEMPLO 3.3: Sea V el conjunto de las vocales y L el conjunto de todas las letras. Se verifica

$$V \subset L$$

• EJEMPLO 3.4: Sea S el conjunto de los días de la semana y D el conjunto de los días laborables. Se verifica

$$D \subset S$$

• EJEMPLO 3.5: Sea

$$M = \{a, b, i, u\}.$$

Comparémoslo con el conjunto V de las vocales. Observamos que M no es un subconjunto de V, ya que $b \notin V$; por lo que escribimos

$$M \not\subset V$$

que se lee *M no está contenido en V*.

Asimismo

$$V \not\subset M$$

• DEFINICIÓN 3.2: *Los conjuntos que, como el* $\{a\}$, *constan de un único elemento se llaman unitarios.*

Nótese que a la izquierda del signo $\in$ se escribe un elemento y a la derecha un conjunto. En cambio, tanto a la izquierda como a la derecha del signo $\subset$ se escriben conjuntos.

Es decir, si a es un elemento perteneciente al conjunto V: no se escribirá:

$$\{a\} \in V \quad \text{sino} \quad a \in V$$

tampoco se escribirá:

$$a \subset V \quad \text{sino} \quad \{a\} \subset V$$

EJERCICIOS

3.1 Comparar los conjuntos A y B, escribiendo entre ellos el signo de inclusión, o no inclusión, según convenga, en los casos siguientes:

a) $A = \{a, b, c, d\}$ y $B = \{m, a, d, f, c, b\}$.

b) A **es el conjunto de los vertebrados y** B **el de los reptiles.**

c) A **es el conjunto de los puntos de un triángulo uno de cuyos vértices es** O **y** B **es el conjunto de puntos de un círculo de centro** O. **Considérense los posibles casos, según sea el radio.**

d) **A es el conjunto de las provincias valencianas y B={Alicante, Valencia}.**
e) **A es el conjunto de los múltiplos de 3 y B el conjunto de los múltiplos de 6.**

3.2 Formar varios subconjuntos de

$$V=\{a, e, i, o, u\}$$

3.3 Formar todos los subconjuntos unitarios de V.

Vamos a estudiar las PROPIEDADES DE LA INCLUSIÓN, las cuales son consecuencia inmediata de la definición 3.1.

a) *Reflexiva:* todo conjunto está contenido en sí mismo.
Dicho de otro modo: para todo conjunto A se verifica

$$\boxed{A \subset A}$$

b) *Antisimétrica:* si $A \subset B$, y además $B \subset A$, entonces A y B tienen los mismos elementos.

Abreviadamente:

$$\boxed{\left.\begin{matrix} A \subset B \\ B \subset A \end{matrix}\right\} \textit{implican } A=B}$$

Por tanto, para demostrar que dos conjuntos son iguales basta comprobar que cada uno de ellos está contenido en el otro.

c) *Transitiva:*

$$\boxed{\left.\begin{matrix} A \subset B \\ B \subset C \end{matrix}\right\} \textit{implican } A \subset C}$$

EJERCICIOS

3.4 Comprobar la propiedad transitiva de la inclusión con los conjuntos H, V y L, de los ejemplos 3.1 y 3.3, u otros conjuntos finitos similares.

3.5 Comprobar la misma propiedad con los conjuntos R y C del ejemplo 3.2 y el conjunto E de los puntos del círculo de centro el de R y radio el lado del cuadrado R.

• DEFINICIÓN 3.3: Si $E \subset F$, siendo $E \neq F$, diremos que E es un *subconjunto propio* de F y entonces podemos escribir $E < F$ en vez de $E \subset F$.

• EJEMPLO 3.6:

$$\{a, b\} < \{a, b, c, d\}$$

En cambio, es incorrecto escribir

$$\{a, b\} < \{a, b\}$$

Nota: Hay libros que escriben $\subseteq$ lo que nosotros designamos por $\subset$ y entonces escriben $\subset$ lo que hemos designado por $<$.

4. Intersección de conjuntos; conjunto vacío

• EJEMPLO 4.1: Consideremos dos conjuntos

$$A = \{a, b, c, d\} \quad \text{y} \quad B = \{a, x, b, y, z\}$$

Observemos que los elementos a y b pertenecen a ambos conjuntos y no hay ningún otro elemento que pertenezca a ambos conjuntos. El conjunto $\{a, b\}$ diremos que es la intersección de los conjuntos A y B.

Generalidades esta idea:

• DEFINICIÓN 4.1: *Se llama intersección de dos conjuntos, E y F, al conjunto formado por los elementos que pertenecen a ambos conjuntos.*

Representaremos al conjunto intersección de E y F por

$$E \cap F$$

Así, en el ejemplo 4.1 será:

$$A \cap B = \{a, b\}$$

• EJEMPLO 4.2: Si E es el recinto rayado horizontalmente en la figura 4.1 y L es el rayado verticalmente, entonces $E \cap L$ es el recinto cuadriculado.

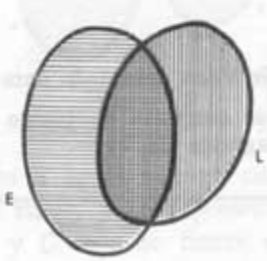


Figura 4.1

A este tipo de representaciones, como el de la figura 4.1, se les llama *diagramas de Venn.*

EJERCICIOS

4.1 Determinar el conjunto $C \cap E$ en los siguientes casos:

a) C={letras consonantes} y E={a, b, c, d, e, f}.

b) C={provincias de Galicia} y E={provincias con mar}.

c) C={puntos de un círculo de centro el punto O} y E={puntos de un semiplano, de borde una recta que pase por O}. **Se supone que el círculo y el semiplano están contenidos en un mismo plano, para que su intersección sea un semicírculo.**

d) C={números pares} y E={múltiplos de 3}.

e) E={paralelogramos equiláteros} y C={paralelogramos equiángulos}.

4.2 Definir las siguientes figuras geométricas:

a) ángulo convexo **(como intersección de dos semiplanos).**

b) sector circular **(como intersección de círculo y ángulo).**

c) segmento circular.

Nota 4.1: La intersección de los conjuntos E y F puede definirse abreviadamente

$$E \cap F = \{x | x \in E \text{ y } x \in F\}$$

lo que debe leerse: E intersección F es el conjunto de los elementos x, tales que x pertenece a E y x pertenece a F.

Consecuencias inmediatas de la definición 4.1:

a) $A \cap B \subset A$ y $A \cap B \subset B$

b) $A \subset B$ *implica* $A \cap B = A$.

EJERCICIOS

4.3 Construir un diagrama de Venn apropiado para comprobar la consecuencia b).

4.4 Comprobar que el mayor conjunto contenido en dos conjuntos, A y B, es $A \cap B$, utilizando un diagrama de Venn.

PROPIEDADES DE LA INTERSECCIÓN DE CONJUNTOS:

I) *Conmutativa:*

$$A \cap B = B \cap A$$

II) *Asociativa:*

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

Notemos que $A \cap (B \cap C)$ es el conjunto intersección de A con $B \cap C$, mientras que $(A \cap B) \cap C$ es el conjunto intersección de $A \cap B$ con C.

III) *Idempotente:*

$$A \cap A = A$$

EJERCICIO

4.5 Comprobar la propiedad asociativa de la intersección:

a) con un diagrama de Venn;

b) con conjuntos finitos (de letras, por ejemplo).

• EJEMPLO 4.3: Sean los conjuntos

$$M = \{a, x, b\} \quad \text{y} \quad G = \{r, s\}$$

En este caso, $M \cap G$ no contiene ningún elemento. Por tanto, si queremos que la intersección de dos conjuntos sea siempre otro conjunto, hemos

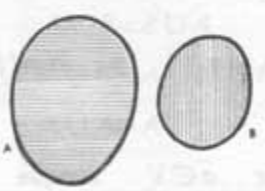


Figura 4.2

de considerar como conjunto a aquél que no contiene ningún elemento. Tal conjunto se llama *conjunto vacío*, y se representa por $\varnothing$.

Dos conjuntos, como M y G, que no tienen elementos comunes, se dicen *disjuntos* entre sí.

En otras palabras:

• DEFINICIÓN 4.2: *Dos conjuntos, E y F, tales que*

$$E \cap F = \varnothing$$

se llaman disjuntos.

• EJEMPLO 4.4: Los conjuntos A y B del diagrama de Venn representado en la figura 4.2 son disjuntos.

5. Unión de conjuntos; recubrimiento

• EJEMPLO 5.1: Consideremos los conjuntos

$$A = \{a, b, c, d\} \quad \text{y} \quad B = \{a, x, b, y, z\}$$

Formemos el conjunto cuyos elementos sean todos los de A y los de B, es decir, el conjunto

$$\{a, b, c, d, x, y, z\}$$

Este conjunto diremos que es la *unión* de los conjuntos A y B.

Nota: No tiene sentido repetir un elemento en un conjunto.

• DEFINICIÓN 5.1: *Se llama unión de dos conjuntos, A y B, al conjunto formado por los elementos que pertenecen, al menos, a uno de estos dos conjuntos.*

Representaremos al conjunto unión de A y B por

$$A \cup B$$

• EJEMPLO 5.2: En el diagrama de Venn de la figura 4.1, el conjunto $E \cup L$ está representado por todo lo rayado (en uno u otro sentido, o en ambos).

• EJEMPLO 5.3: Dados

$$V = \{a, e, i, o, u\} \quad \text{y} \quad W = \{f, e, g, i\}$$

se tiene:

$a \in V \cup W$, ya que $a \in V$ aunque $a \notin W$
$g \in V \cup W$, ya que $g \in W$ aunque $g \notin V$
$e \in V \cup W$, ya que e pertenece a ambos conjuntos, V y W.

• EJEMPLO 5.4: En el diagrama de Venn de la figura 4.2 el conjunto $A \cup B$ está representado por todo lo rayado.

Nota: A la unión también se le llama reunión.

EJERCICIOS

5.1 Determinar $A \cup B$ en los casos siguientes:

a) $A=\{r, s, t, x, w\}$ y $B=\{x, y, z, t\}$.

b) $A=\{$provincias de Galicia$\}$ y $B=\{$provincias que tienen costa en el Mar Cantábrico$\}$.

c) $A=\{$números pares$\}$ y $B=\{$números impares$\}$.

5.2 Definir las siguientes figuras geométricas:

a) ángulo cóncavo **(como unión de semiplanos);**

b) polígono **(como unión de triángulos).**

5.3 Defínase abreviadamente la unión de dos conjuntos, análogamente a como se hizo para la intersección en la nota 4.1.

Consecuencias inmediatas de la definición 5.1:

a) $A \subset A \cup B$ y $B \subset A \cup B$.

b) $A \subset B$ implica $A \cup B = B$.

EJERCICIOS

5.4 Probar que $A \cap B \subset A \cup B$.

5.5 Comprobar que el menor conjunto que contiene a dos conjuntos, A y B, es $A \cup B$.

5.6 ¿Cuáles son los conjuntos $A \cup \varnothing$ y $A \cap \varnothing$?

De la definición 5.1 se deducen inmediatamente las siguientes PROPIEDADES DE LA UNIÓN DE CONJUNTOS:

I) *Conmutativa:* $A \cup B = B \cup A$

II) *Asociativa:* $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

III) *Idempotente:* $A \cup A = A$

EJERCICIO

5.7 Comprobar la propiedad asociativa de la unión utilizando:

a) un diagrama de Venn;

b) conjuntos finitos.

Nótese que la unión ha sido definida para dos conjuntos únicamente. Pero, como consecuencia de la propiedad asociativa, tiene sentido $A \cup B \cup C$, ya que da lo mismo interpretarlo como $(A \cup B) \cup C$ que como $A \cup (B \cup C)$, por ser iguales ambos conjuntos.

• EJEMPLO 5.5: Sea

$$V = \{a, e, o, u, i\}$$

Consideremos los subconjuntos de V:

$$X = \{a, e, o\}; \quad Y = \{o, u\}; \quad Z = \{o, u, i\}$$

Observamos que

$$X \cup Y \cup Z = V.$$

Por ello decimos que las partes X, Y y Z de V forman un *recubrimiento* de V.

• DEFINICIÓN 5.2: *Dado un conjunto E, sean A, B, C y D subconjuntos de E. Si se verifica*

$$A \cup B \cup C \cup D = E$$

diremos que las partes A, B, C y D forman un recubrimiento del conjunto E.

• EJEMPLO 5.6: Los triángulos $\overset{\frown}{PQM}$, $\overset{\frown}{MON}$ y $\overset{\frown}{PQN}$ de la figura 5.1 (considerados como conjuntos de puntos) forman un recubrimiento del cuadrado $MNPQ$. También $\overset{\frown}{PQM}$ y $\overset{\frown}{PMN}$ recubren el cuadrado, pero $\overset{\frown}{PQM}$ y $\overset{\frown}{MNO}$ no lo recubren.

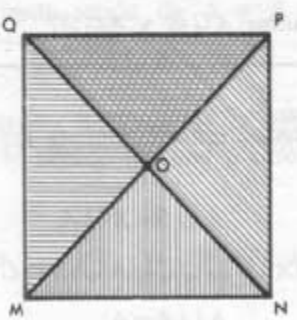


Figura 5.1

EJERCICIO

5.8 Considerar tres subconjuntos de $V = \{a, e, i, o, u\}$ que formen un recubrimiento de V. Considerar ahora cuatro subconjuntos de V que no recubran V. Hacer lo mismo con un diagrama de Venn.

6. Adición de conjuntos; partición

• EJEMPLO 6.1: Consideremos los conjuntos

$$C=\{x, y, z\} \quad \text{y} \quad D=\{r, s\}$$

Observamos que son disjuntos, es decir,

$$C \cap D=\varnothing$$

A su unión se le llama por ello *suma* y se puede representar por

$$C+D$$

en vez de por

$$C \cup D.$$

Se tiene, pues

$$C+D=\{x, y, z, r, s\}=C \cup D$$

• DEFINICIÓN 6.1: *Dados dos conjuntos disjuntos, E y F, se llama suma a su unión.* Se representa por

$$E+F$$

Dos conjuntos no disjuntos no son sumables, es decir, no tiene sentido hablar de su suma.

EJERCICIOS

6.1 Ponga ejemplos de conjuntos sumables y de conjuntos no sumables:
a) con conjuntos finitos;
b) con diagramas de Venn.

6.2 Escriba las propiedades conmutativa y asociativa de la suma de conjuntos. ¿Tiene sentido la propiedad idempotente?

• EJEMPLO 6.2: Consideremos el conjunto

$$V=\{a, e, i, o, u\}$$

y sus subconjuntos

$$R=\{a, e\}; \quad S=\{i, o\}; \quad T=\{u\}$$

R, S y T forman un recubrimiento de V, pero, además,

$$R \cap S=\varnothing; \quad R \cap T=\varnothing; \quad S \cap T=\varnothing.$$

Por ello, a este recubrimiento le llamamos *partición*, y decimos que los subconjuntos R, S y T del conjunto V forman una partición de V.

Se tiene, pues

$$V = R + S + T$$

• DEFINICIÓN 6.2: *Dado un conjunto E, sean A, B, C y D subconjuntos, no vacíos, de E. Si se verifica*

$$E = A + B + C + D$$

diremos que las partes A, B, C y D forman una partición de E.

Consecuencia: Una partición es un recubrimiento tal que los subconjuntos que la forman son no vacíos y disjuntos entre sí dos a dos.

• EJEMPLO 6.3: En el ejemplo 5.5, el recubrimiento formado por X, Y y Z no es partición, pues

$$X \cap Y = \{\overset{a}{e}\} \neq \emptyset \ldots$$

EJERCICIOS

6.3 Ponga un ejemplo de partición del conjunto V distinto de la del ejemplo 6.2. Ponga ejemplos de partición, utilizando ahora diagramas de Venn.

6.4 Ponga un ejemplo de recubrimiento que no sea partición.

---

7. Otras propiedades de la unión y la intersección

Además de las propiedades conmutativa, asociativa e idempotente de la unión y la intersección, hay otras propiedades en que intervienen la $\cap$ y la $\cup$ simultáneamente:

I) *Propiedades simplificativas:*

$$A \cup (A \cap B) = A; \qquad A \cap (A \cup B) = A$$

II) *Propiedades distributivas:*

a) Propiedad distributiva de la $\cup$ respecto de la $\cap$:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

b) Propiedad distributiva de la $\cap$ respecto de la $\cup$:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Nota: Sustituya el signo $\cap$ por $\cdot$ y el signo $\cup$ por $+$ en la última expresión e imagine que A, B y C son números y tendrá justificado el nombre empleado para designar esta propiedad, pues obtendrá la propiedad distributiva del producto respecto de la suma de números.

EJERCICIO

7.1 Compruebe las propiedades simplificativas y distributivas con conjuntos finitos y con diagramas de Venn apropiados.

---

8. Conjunto de partes de un conjunto

• EJEMPLO 8.1: Sea $H=\{a, e, u\}$ y formemos todos los subconjuntos de H:

$$\emptyset; \quad A=\{a\}; \quad B=\{e\}; \quad C=\{u\}; \quad D=\{a, e\}$$
$$E=\{a, u\}; \quad F=\{e, u\}; \quad H=\{a, e, u\}$$

$\emptyset$, A, B, C, D, E, F y H son todas las posibles partes o subconjuntos de H. Al conjunto de todas estas partes se le llama conjunto de las partes de H y se representa por $\mathcal{P}(H)$. Es decir:

$$\mathcal{P}(H)=\{\emptyset, A, B, C, D, E, F, H\}$$

Nota: $\emptyset$ está contenido en cualquier conjunto.

• DEFINICIÓN 8.1: *Dado un conjunto E, se llama conjunto de las partes de E al conjunto cuyos elementos son todos los subconjuntos posibles de E.* Se representa por $\mathcal{P}(E)$.

Abreviadamente:

$$\mathcal{P}(E)=\{S|S \subset E\}$$

es decir, $\mathcal{P}(E)$ es el conjunto de los S, tales que S es una parte de E.

Nótese que un recubrimiento (y, por tanto, una partición) de E viene definido por un subconjunto de $\mathcal{P}(E)$.

EJERCICIO

8.1 Construya el conjunto de las partes de $V=\{a, e, i, o, u\}$.

---

9. Otras operaciones con conjuntos

• EJEMPLO 9.1: Sean los conjuntos

$$A=\{a, b, e, f\} \quad \text{y} \quad V=\{a, e, i, o, u\}$$

Formemos
Construyamos el conjunto de los elementos de V que no pertenecen a A

$$\{i, o, u\}$$

Este conjunto se llama diferencia y se representa por $V-A$.

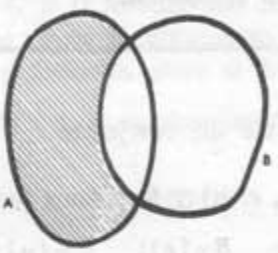


Figura 9.1

• DEFINICIÓN 9.1: *Dados dos conjuntos, E y F, se llama conjunto diferencia, $E-F$, al formado por los elementos de E que no pertenecen a F.*
Abreviadamente:

$$E-F=\{x|x\in E;\ x\notin F\}$$

• EJEMPLO 9.2: En el diagrama de Venn representado en la figura 9.1, la parte rayada corresponde al conjunto $A-B$.

Nota: $E-F$ también se representa por $E\setminus F$.

EJERCICIO

9.1 Estudiar si la diferencia de conjuntos es conmutativa, asociativa e idempotente. ¿Es la diferencia distributiva respecto de la unión o de la intersección?

• DEFINICIÓN 9.2: *Dados un conjunto E y un subconjunto S de E, se llama complemento de S en E al conjunto $E-S$.*
El conjunto complementario de S en E se representa por

$$\complement_E S$$

Abreviadamente:

$$\text{si } S\subset E, \text{ entonces } \complement_E S=E-S$$

• EJEMPLO 9.3: Sea L el conjunto de todas las letras, V el de las vocales y T el de las consonantes. Se verifica

$$\complement_L V = T$$

Notación: Cuando no hay duda sobre el conjunto E, respecto del cual se halla el complemento, se puede escribir

$$\complement S \quad \text{en vez de} \quad \complement_E S$$

También se representa por S' al complementario de S en vez de por $\complement S$.

EJERCICIOS

9.2 Construir un diagrama de Venn explicativo de la definición 9.2.

9.3 Escribir los segundos miembros de:

$$\complement\complement S = S \; ; \qquad \complement_E \varnothing = E \; ; \qquad \complement_E E = \phi$$

9.4 Generalice el ejemplo 9.3, indicando la partición más simple que puede realizarse en un conjunto E, de modo que $S \subset E$ sea una de las partes.

9.5 Si $S \subset E$ y $T \subset E$ comprobar que

$$\complement_E(S \cup T) = (\complement_E S) \cap (\complement_E T)$$

La propiedad también es cierta cambiando entre sí los signos de $\cup$ e $\cap$.

9.6 En las hipótesis del ejercicio anterior, compruebe también que

$$S - T = S \cap (\complement_E T)$$

• DEFINICIÓN 9.3: *Se llama diferencia simétrica de los conjuntos A y B al conjunto*

$$(A \cup B) - (A \cap B)$$

Se representa por

$$A \triangle B$$

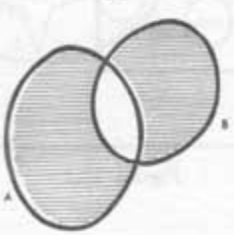


Figura 9.2

• EJEMPLO 9.4: La parte rayada de la figura 9.2 corresponde al conjunto

$$A \triangle B.$$

EJERCICIOS

9.7 ¿Puede escribirse que

$$A \triangle B = \complement_{A \cup B}(A \cap B)?$$

9.8 Estudie las propiedades conmutativa, asociativa e idempotente de $\triangle$ comprobando si son o no son ciertas.

---

10. Introducción de estos conceptos en la Escuela Primaria.

Los conjuntos y algunas de sus operaciones pueden introducirse a la más temprana edad, con tal de que la presentación empleada sea adecuada a esa edad mental.

Véase, por ejemplo, al nivel de la Escuela Maternal, el libro: G. BROUSSEAU, *Les Mathématiques du Cours Préparatoire,* Ed. Dunod, París, 1965.

A título de ejemplo, presentamos esquemáticamente algunas de las experiencias que hemos realizado con niños de 6 años:

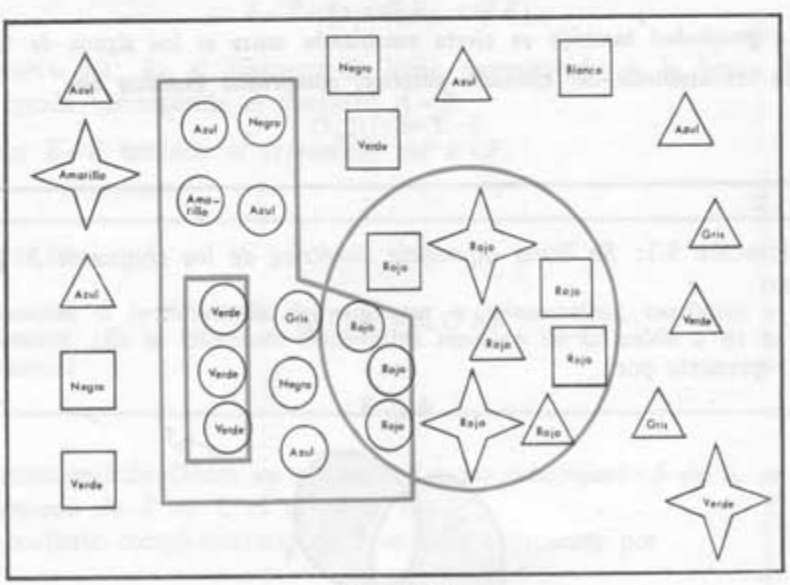


Figura 10.1

En la figura se observa:

Conjunto de los discos. Conjunto de las figuras rojas. Conjunto de los discos verdes. ...

El material es sensible y concreto. Cada alumno puede fabricarse su propio material. Se ha utilizado papel, tijeras, cuerdas y colores.

De este modo se han introducido los conceptos de conjunto, subconjunto, intersección y suma de conjuntos.

La idea de *conjunto* permite introducir el concepto gramatical de *nombre*, la de *subconjunto*, el de *adjetivo* y la de *intersección* está ligada a la conjunción copulativa *y*.

En Geografía, los continentes, países y provincias sugieren la transitividad de la inclusión.

La suma de números naturales debe ser una idea posterior a la suma de conjuntos:

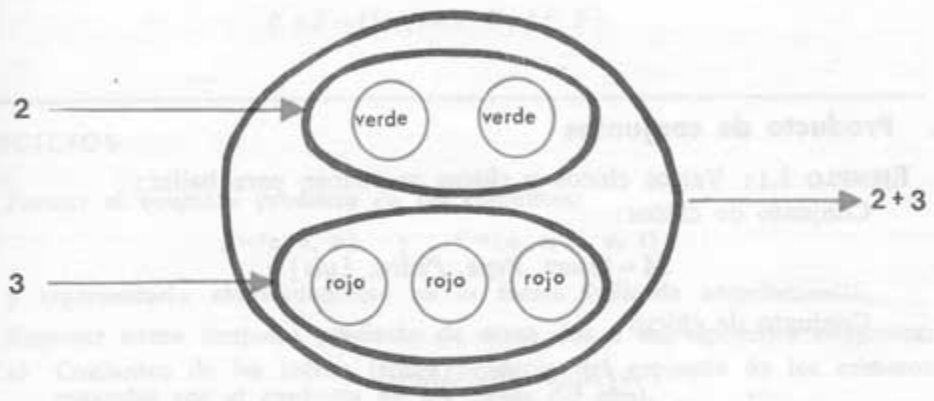


Figura 10.2

La memorización de la tabla de sumar debe ser posterior a su construcción por el alumno.

Los chicos que tienen ya cierta facilidad leyendo (8-9 años) pueden desarrollar estas *actividades matemáticas* guiados por un libro apropiado, con lo cual cada chico trabaja a su propio ritmo.

Recomendamos, a este efecto, realizar experiencias con los *Textos Pilotos* editados por la Comisión Nacional para el Mejoramiento de la Enseñanza de la Matemática, bajo la dirección del profesor ABELLANAS, que, aunque pensados para 1.° y 2.° cursos de Bachillerato, tienen muchas partes aprovechables en la Escuela Primaria.

3 CORRESPONDENCIAS

1. Producto de conjuntos

• EJEMPLO 1.1: Varios chicos y chicas se reúnen para bailar:

Conjunto de chicos:

$$M=\{Juan,\ Pepe,\ Pedro,\ Luis\}$$

Conjunto de chicas:

$$F=\{Rosa,\ Pily,\ Mary\}$$

Las posibles parejas de baile son:

(*Juan*, *Rosa*)	(*Juan*, *Pily*)	(*Juan*, *Mary*)
(*Pepe*, *Rosa*)	(*Pepe*, *Pily*)	(*Pepe*, *Mary*)
(*Pedro*, *Rosa*)	(*Pedro*, *Pily*)	(*Pedro*, *Mary*)
(*Luis*, *Rosa*)	(*Luis*, *Pily*)	(*Luis*, *Mary*)

Al conjunto de estas parejas le llamaremos conjunto producto de M por F.

• EJEMPLO 1.2: Dados los conjuntos:

$$A=\{a,\ b\} \quad \text{y} \quad B=\{r,\ s,\ t\}$$

se pueden formar parejas ordenadas:

$$(a, r),\ (a, s),\ (a, t),\ (b, r),\ (b, s),\ (b, t)$$

cuya *primera componente* es un elemento perteneciente al conjunto A y la *segunda componente* es un elemento perteneciente al conjunto B. Al conjunto de estas parejas ordenadas se le llama conjunto producto de A por B y se representa por: $A \times B$.

Así, pues:

$$A \times B=\{(a, r),\ (a, s),\ (a, t),\ (b, r),\ (b, s),\ (b, t)\}$$

Nota 1.1: $(a, r) \in A \times B$, o sea (a, r) debe interpretarse como un elemento del conjunto $A \times B$ y no como el conjunto $\{a, r\}$. El elemento (a, r) es una pareja ordenada, lo que quiere decir que convenimos en considerar el objeto (a, r) distinto del (r, a). Concretamente $(r, a) \notin A \times B$, pues su primera componente $r \notin A$ y su segunda componente a tampoco pertenece a B. En cambio,

$$(r, a) \in B \times A.$$

• DEFINICIÓN 1.1: *Sean los conjuntos E y F. Las parejas ordenadas del tipo (e, f), donde $e \in E$ y $f \in F$ forman otro conjunto, llamado producto de E por F. Se representa por $E \times F$.*

Abreviadamente:

$$E \times F = \{(e, f) | e \in E; f \in F\}$$

EJERCICIOS

1.1 Formar el conjunto producto de los conjuntos:

$$J = \{c, s, x\} \quad \text{y} \quad V = \{a, e, o, u, i\}$$

y representarlo abreviadamente en la forma indicada anteriormente.

1.2 Expresar como conjunto producto de otros dos a los siguientes conjuntos:

a) Conjuntos de las fechas (como producto del conjunto de los números naturales por el conjunto de los meses del año).

b) Conjunto de las matrículas de vehículos.

c) Conjunto de las localidades de una sesión numerada de cine.

1.3 Busque otros ejemplos de conjuntos productos en la vida corriente.

En la figura 1.1 se presenta un esquema que permite asociar a cada nudo de la malla un elemento del conjunto producto en la forma indicada. Se trata

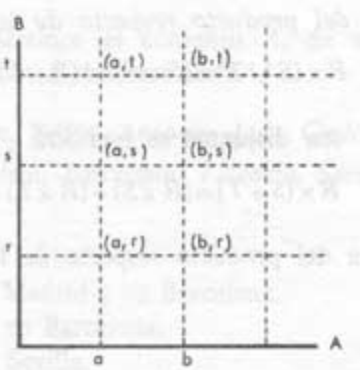


Figura 1.1

del conjunto $A \times B$ del ejemplo 1.2. A este tipo de diagrama para representar el conjunto producto le llamaremos *diagrama cartesiano.*

EJERCICIO

1.4 Construir el diagrama cartesiano correspondiente al conjunto $J \times V$ considerado en el ejercicio 1.1.

Estudiemos ahora las PROPIEDADES DEL PRODUCTO DE CONJUNTOS:

I) Conmutatividad: de la nota 1.1 se sigue que el producto de conjuntos *no es conmutativo,* en general.

Observemos que dados dos conjuntos, E y F, no vacíos, se verifica:

$$E \neq F \quad \text{implica} \quad E \times F \neq F \times E$$

EJERCICIO

1.5 Compruebe lo que acaba de enunciarse siendo:

$$E=\{a, b, c\} \quad \text{y} \quad F=\{a, e, b, i\}$$

II) Asociatividad: *tampoco es asociativo* el producto de conjuntos, pues los elementos de $(R \times S) \times T$ son parejas, de la forma $[(r, s), t]$ cuya primera componente es una pareja ordenada perteneciente a $R \times S$ y la segunda componente un elemento de T, mientras que los elementos de $R \times (S \times T)$ son parejas de la forma $[r, (s, t)]$ cuya primera componente $r \in R$ y la segunda $(s, t) \in S \times T$.

III) *Distributividad del producto respecto de la unión:*

$$R \times (S \cup T) = (R \times S) \cup (R \times T)$$

En particular, si S y T son disjuntos se escribirá

$$R \times (S + T) = (R \times S) + (R \times T)$$

la propiedad distributiva del producto respecto de la suma de conjuntos.

EJERCICIO

1.6 Comprobar la propiedad III) con los conjuntos:

$$R=\{a, b, c\}; \qquad S=\{i, j\}; \qquad T=\{k\}$$

Como el conjunto $A=\{r, s, v\}$ está formado por tres elementos, decimos que el *cardinal del conjunto* A es 3 y escribimos abreviadamente:

$$Card\ (A)=3.$$

• EJEMPLOS: El cardinal de un conjunto unitario es 1.

$$\text{Card}\ (\varnothing)=0$$

Nota: No deben confundirse los conjuntos $\varnothing$ y $\{0\}$, pues $\varnothing$ es el conjunto vacío, mientras que $\{0\}$ es un conjunto unitario cuyo elemento es el número cero.

EJERCICIO

1.7 Compruebe, con un ejemplo, que si A y B son conjuntos finitos

$$\text{Card}\ (A\times B)=\text{Card}\ (A)\cdot\text{Card}\ (B)$$

es decir, que el cardinal del conjunto producto es el producto de cardinales, lo que justifica el nombre de conjunto producto.

2. Correspondencias entre conjuntos

• EJEMPLO 2.1: Consideremos el conjunto A, de niños, y el conjunto C, de ciudades, que se indican a continuación:

$$A=\{Juan,\ Pedro,\ Antonio,\ Luis,\ Carlos\}$$
$$C=\{Madrid,\ Barcelona,\ Valencia,\ Sevilla\}.$$

Supongamos que:

Juan *ha estado* en Madrid y en Barcelona.
Antonio *ha estado* en Barcelona.
Luis *ha estado* en Sevilla.
Pedro y Carlos *no han estado* en ninguna de estas ciudades.

A cada niño del conjunto A hemos hecho corresponder las ciudades del conjunto C en que *ha estado*. Se puede esquematizar esta correspondencia mediante el siguiente *diagrama de flechas:*

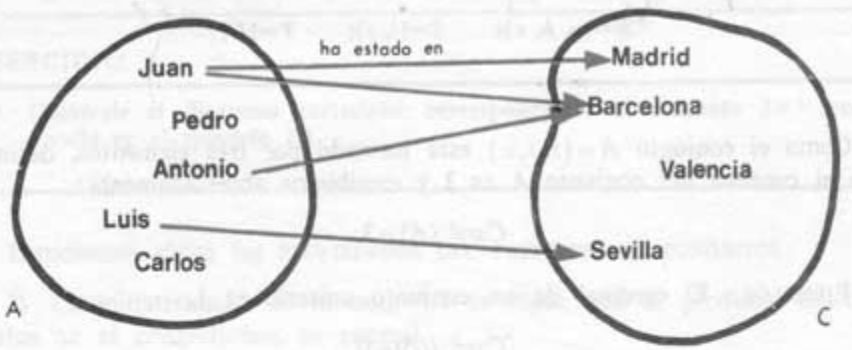


Figura 2.1

EJERCICIO

2.1 Dado el conjunto de países

$$P=\{\text{Francia, España, Italia, Portugal, Alemania}\}$$

y el conjunto de colores

$$C=\{\text{amarillo, rojo, blanco, negro, azul, verde, violeta}\}$$

considérese la correspondencia que asocia a cada país, perteneciente al conjunto P, los colores de su bandera. Constrúyase el diagrama de flechas que esquematiza esta correspondencia.

Consideremos ahora la correspondencia esquematizada mediante el siguiente diagrama de flechas de la figura 2.2.

Al conjunto

$$A=\{a,\ b,\ c,\ d\}$$

le llamaremos *conjunto de partida* y al

$$B=\{q,\ r,\ s,\ t,\ u\}$$

le llamaremos *conjunto de llegada* de la correspondencia. Designaremos a la correspondencia por f.

Para expresar que f es una correspondencia cuyo conjunto de partida es A y el de llegada B escribimos:

$$f: A \longrightarrow B \qquad \text{o bien} \qquad A \overset{f}{\longrightarrow} B$$

lo que se lee: *correspondencia f de A en B.*

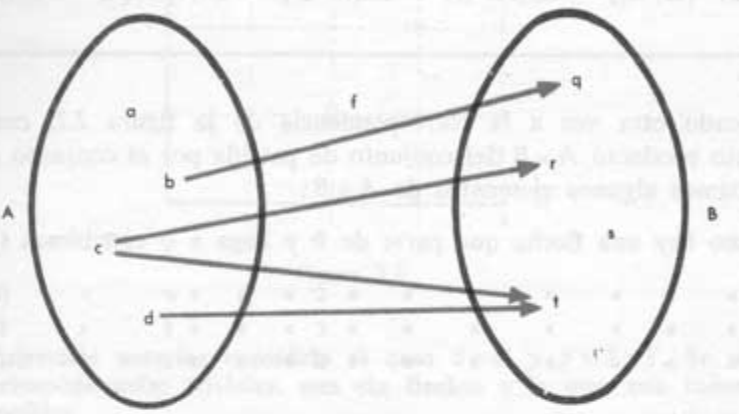


Figura 2.2

Para expresar que la correspondencia f asocia al elemento c del conjunto de partida los elementos r y t del conjunto de llegada, es decir, para expresar que hay dos flechas que parten del elemento c, una de las cuales llega al elemento r y otra al t, decimos que *la imagen* del elemento c en la correspondencia f es el conjunto $\{r, t\}$, y escribimos

$$im(c) = \{r, t\}$$

Análogamente:

$$im(b) = \{q\}; \qquad im(d) = \{t\}; \qquad im(a) = \varnothing.$$

La imagen de cada elemento del conjunto de partida es una parte del conjunto de llegada. Así:

$$im(a) = \varnothing \subset B; \qquad im(b) = \{q\} \subset B; \qquad im(c) = \{t, r\} \subset B; \quad \ldots$$

Una correspondencia queda determinada por el conjunto de partida, el conjunto de llegada y por la imagen de cada elemento del conjunto de partida.

EJERCICIO

2.2 Construir el diagrama de flechas que esquematiza la correspondencia:

$$g: V \longrightarrow X$$

siendo:

$$V=\{a, e, i, o, u\}; \qquad X=\{m, n, p, q\}$$

$$im(a)=\{m, n\}; \qquad im(e)=\varnothing; \qquad im(i)=\varnothing; \qquad im(o)=\{q\}; \qquad im(u)=\{p\}$$

Volviendo otra vez a la correspondencia de la figura 2.2, consideremos el conjunto producto $A \times B$ del conjunto de partida por el conjunto de llegada.

Escribamos algunos elementos de $A \times B$:

como hay una flecha que parte de b y llega a q escribimos (b, q)

» » » » » » » c » » » r » (c, r)

» » » » » » » c » » » t » (c, t)

» » » » » » » d » » » t » (d, t)

De este modo, la correspondencia f define un subconjunto

$$\{(b, q), (c, r), (c, t), (d, t)\}$$

del conjunto producto $A \times B$.

Recíprocamente, dados dos conjuntos E y F y un subconjunto S del conjunto producto $E \times F$, el subconjunto S define una correspondencia:

$$E \overset{h}{\longrightarrow} F$$

tal que si $(e, f) \in S$, entonces hay una flecha que parte de e y llega a f.

EJERCICIOS

2.3 Construir el subconjunto del conjunto producto $V \times X$, que define la correspondencia del ejercicio 2.2.

2.4 Dados los conjuntos

$$M=\{h, i, j, k\} \qquad \text{y} \qquad L=\{u, v, w\}$$

considerar la correspondencia $c: M \longrightarrow L$ definida por el subconjunto del conjunto producto $M \times L$, formado por los elementos señalados con un aspa en el diagrama cartesiano de $M \times L$ representado en la figura 2.3. Construir el diagrama de flechas correspondiente. Formar el conjunto imagen de cada elemento del conjunto M.

2.5 Elegir dos conjuntos finitos, X e Y. Formar el conjunto producto. Considerar dos subconjuntos, S y S' de $X \times Y$. Cada uno de ellos define una correspondencia: h y h'. Construir en una misma figura las flechas de h y las de h', utilizando un mismo color para todas las flechas de h y otro color para las de h'.

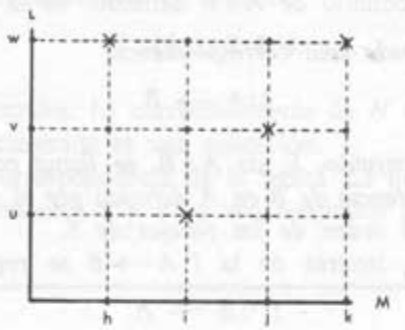


Figura 2.3

2.6 En el ejercicio anterior considere el caso $S=\varnothing$ y $S'=X \times Y$. Se obtendrán dos correspondencias triviales, una sin flechas y la otra con todas las flechas posibles.

Las correspondencias también se llaman *transformaciones y funciones.*

3. Correspondencia inversa

Si en la correspondencia de la figura 2.2 invertimos el sentido de todas las flechas, obtenemos una correspondencia de B en A esquematizada en la figura 3.1

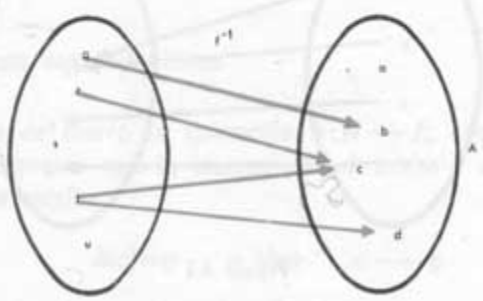


Figura 3.1

que se llama *correspondencia inversa* de aquélla.

El subconjunto de $B \times A$ definidor de esta correspondencia inversa será

$$\{(q, b), (r, c), (t, c), (t, d)\}$$

obtenido cambiando el orden de las componentes de cada una de las parejas pertenecientes al subconjunto de $A \times B$ definidor de la correspondencia f.

• DEFINICIÓN 3.1: *Dada una correspondencia*

$$f: A \longrightarrow B$$

definida por un subconjunto, S, de $A \times B$, se llama correspondencia inversa de la f a la correspondencia de B en A definida por el subconjunto de $B \times A$, obtenido cambiando el orden de las parejas de S.

La correspondencia inversa de la $f: A \longrightarrow B$ se representa por

$$f^{-1}: B \longrightarrow A$$

EJERCICIO

3.1 Formar el subconjunto definidor de la correspondencia $g^{-1}: X \longrightarrow V$ inversa de la correspondencia g del ejercicio 2.2 y construir el correspondiente diagrama de flechas.

---

4. Aplicaciones

• EJEMPLO 4.1: Consideremos la correspondencia h de H en L definida por el diagrama de flechas de la figura 4.1:

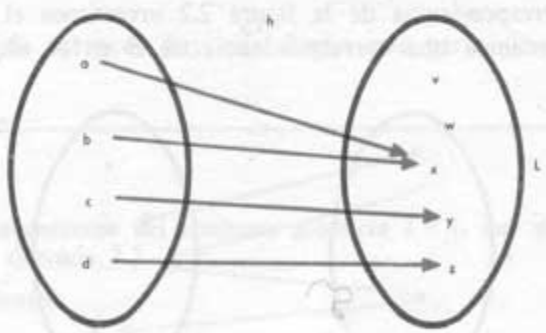


Figura 4.1

Observemos que a cada elemento del conjunto de partida asocia un único elemento del conjunto de llegada. Por esta razón diremos que esta correspondencia es una *aplicación*.

* DEFINICIÓN 4.1: *Una aplicación es una correspondencia en que la imagen de cada elemento del conjunto de partida es un conjunto unitario.*

Las aplicaciones se llaman también *correspondencias unívocas y funciones uniformes.*

* EJEMPLO 4.2: Consideremos el conjunto

$$N=\{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

de los números naturales. La correspondencia de N en N que asocia a cada número natural su cuadrado es una aplicación.

En cambio, la correspondencia de la figura 2.2 no es aplicación, pues las imágenes de los elementos a y c no son conjuntos unitarios.

EJERCICIOS

4.1 **Considérese la correspondencia que asocia a cada persona la casa en que vive. Especifique cuáles son los conjuntos de partida y de llegada. Diga si esta correspondencia es aplicación. Considere su correspondencia inversa y analice si es aplicación.**

4.2 **Considere la correspondencia que asocia a cada madre sus hijos y resuelva las mismas cuestiones del ejercicio anterior.**

4.3 **Construir, mediante un diagrama de flechas, una correspondencia que no sea aplicación, pero tal que sí lo sea su correspondencia inversa.**

4.4 **Al definir una correspondencia mediante un subconjunto S del conjunto producto, del de partida por el de llegada, diga qué condición han de verificar las parejas de S para que la correspondencia sea aplicación.**

4.5 **Construya una aplicación cuya correspondencia inversa también sea aplicación.**

4.6 **Ponga ejemplos de correspondencias que sean aplicaciones y otras que no lo sean, sacados de la vida ordinaria.**

---

5. Aplicaciones suprayectivas

Consideremos de nuevo la aplicación $h: H \longrightarrow L$, esquematizada en la figura 4.1. Para expresar que la imagen del elemento c en la aplicación h es el elemento y, se escribe

$$h(c)=y \qquad \text{o bien} \qquad c \overset{h}{\longrightarrow} y$$

y se lee *h de c igual a y*, o bien, *h aplica c en y*.

Análogamente:

$$h(a)=x; \qquad h(b)=x; \qquad h(d)=z \quad (*)$$

(*) h una correspondencia f de A en B tal que $\text{im}(x)$ conste de un único elemento, o sea el conjunto vacío, para todo $x \in A$, se le llama una correspondencia unívoca de A en B. En tal caso, en lugar de poner $\text{im}(x)=\{y\}$ se escribe $f(x)=y$.

o bien

$$a \xrightarrow{h} x; \qquad b \xrightarrow{h} x; \qquad d \xrightarrow{h} z$$

Observemos que en el conjunto L de llegada hay elementos, como w, a los que no llega ninguna flecha y otros, como x o z, a los que sí llegan flechas.

El conjunto de los elementos de L a los que llegan flechas

$$\{x, y, z\}$$

es decir, la parte de L formada por los elementos que son imagen de uno o varios elementos de H se llama el *conjunto imagen de la aplicación h* y se representa por $im(h)$. Es decir:

$$im(h)=\{x, y, z\}$$

• DEFINICIÓN 5.1: *Dada una aplicación $f:E \longrightarrow F$, se llama imagen de f, y se representa por im(f), al subconjunto de F formado por los elementos que son imagen de, al menos, un elemento de E.*

Notemos que $im(f)$ puede ser todo el conjunto F de llegada o una parte propia de él, lo que nos lleva a establecer la siguiente definición.

• DEFINICIÓN 5.2: *Una aplicación $f:E \longrightarrow F$ se llama suprayectiva si*

$$im(f)=F$$

• EJEMPLO 5.1: La aplicación dada por el diagrama de flechas de la figura 5.1:

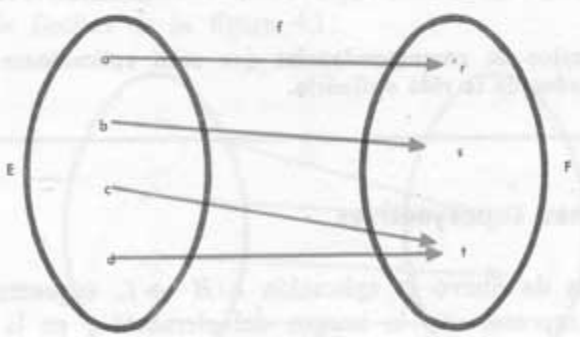


Figura 5.1

es suprayectiva, pues

$$im(f)=\{r, s, t\}=F.$$

En cambio, la aplicación de la figura 4.1 no es suprayectiva, pues los elementos v y w del conjunto L de llegada no pertenecen al conjunto $im(h)$.

Las aplicaciones suprayectivas se llaman también *suprayecciones*, aplicaciones *sobre* o aplicaciones *exhaustivas*.

EJERCICIOS

5.1 **Construir, mediante un diagrama de flechas, una aplicación suprayectiva y otra no suprayectiva.**

5.2 **¿Qué condición ha de cumplir el subconjunto del conjunto producto, del de partida por el de llegada, definidor de una aplicación, para que ésta sea suprayectiva?**

5.3 **Vuelva sobre el concepto de** cardinal **de un conjunto, y aplíquelo a resolver la siguiente cuestión:**
Si la aplicación $f: C \to D$ es suprayectiva, siendo C y D conjuntos finitos, ¿qué relación existe entre los números card **(C) y** card **(D)?**

5.4 **Los conceptos de** imagen de una aplicación **y de** aplicación suprayectiva **pueden extenderse a correspondencias que no sean aplicaciones. ¿Cuál es el conjunto imagen en las correspondencias de los ejercicios 2.1 y 2.2? ¿Son suprayectivas?**

5.5 **El conjunto imagen de una correspondencia es la unión de los conjuntos imágenes de cada uno de los elementos del conjunto de partida. Compruébelo en el ejemplo 4.1.**

Los diagramas de flechas ya eran utilizados por el gran matemático inglés CAYLEY (1821-1895).

6. Aplicaciones inyectivas

Consideremos la aplicación de la figura 4.1. Para indicar que al elemento x del conjunto L llegan dos flechas, una procedente de a y otra de b, decimos que el conjunto original del elemento x es $\{a, b\}$ y escribimos, abreviadamente,

$$or(x) = \{a, b\}$$

Análogamente

$$or(y) = \{c\}; \qquad or(v) = \emptyset; \qquad or(z) = \{d\}; \qquad or(w) = \emptyset.$$

• DEFINICIÓN 6.1: *Dada una aplicación $f: A \to B$, para cada elemento $b \in B$ se llama conjunto original de b al subconjunto de A formado por los elementos cuya imagen es b.* Se representa por $or(b)$.

Abreviadamente,

$$or(b) = \{x | x \in A;\ f(x) = b\}$$

Consideremos la aplicación $a: E \longrightarrow F$, definida por el diagrama de flechas de la figura 6.1

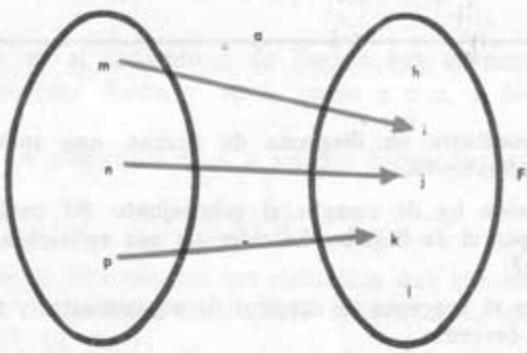


Figura 6.1

Observamos que cada elemento de F tiene por original el conjunto vacío o un conjunto unitario. Por ello diremos que la aplicación a es *inyectiva*.

• DEFINICIÓN 6.2: *Una aplicación f de A en B se llama inyectiva si el conjunto original de cada elemento de B es unitario o $\varnothing$.*

Las aplicaciones inyectivas se llaman también *inyecciones*.

La aplicación de la figura 4.1 no es inyectiva, pues

$$or(x) = \{a, b\},$$

es decir, el conjunto original del elemento x no es $\varnothing$ ni unitario.

EJERCICIOS

6.1 Construir una aplicación inyectiva y otra no inyectiva.

6.2 Construir una aplicación que sea inyectiva pero no suprayectiva, otra que sea suprayectiva y no inyectiva, y otra inyectiva y suprayectiva.

6.3 Compruebe que una aplicación $f: A \longrightarrow B$ es inyectiva si dos elementos distintos de A tienen imágenes distintas, cualesquiera que sean esos dos elementos pertenecientes al conjunto A.

6.4 Sea N el conjunto de los números naturales. Estudiar si la aplicación de N en N, consistente en elevar al cuadrado cada número natural, es inyectiva. Representaremos abreviadamente a esta aplicación por

$$N \xrightarrow{\text{cuadrado}} N$$

¿Cómo se llama su correspondencia inversa?

6.5 Resuelva los ejercicios 5.2 y 5.3 cambiando la palabra suprayectiva por inyectiva.

6.6 Consideremos el conjunto de los números enteros

$$Z=\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

¿Son inyectivas las aplicaciones

$$Z \xrightarrow{\text{cuadrado}} Z; \qquad Z \xrightarrow{\text{cubo}} Z$$

Nótese que $N \subset Z$, es decir, los números naturales son un subconjunto de los enteros.

6.7 Ponga ejemplos de inyecciones sacados de la vida corriente, precisando, en cada caso, cuáles son los conjuntos de partida y de llegada.

---

7. Biyecciones

• EJEMPLO 7.1: La aplicación $f: E \longrightarrow F$, esquematizada en el diagrama de flechas de la figura 7.1

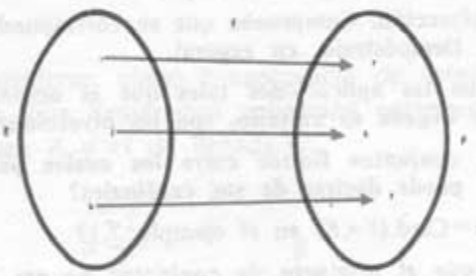


Figura 7.1

es inyectiva y suprayectiva. Por ello diremos que es una *aplicación biyectiva.*

• DEFINICIÓN 7.1: *Las aplicaciones que son a la vez inyectivas y suprayectivas se llaman biyecciones.*

Las *biyecciones* se llaman también *aplicaciones biyectivas* y *correspondencias biunívocas.*

• EJEMPLO 7.2: Dado un conjunto arbitrario A, la aplicación $i: A \longrightarrow A$, tal que para todo $a \in A$ es $i(a)=a$, es decir, la aplicación que asocia a cada elemento, a, el mismo elemento a es una biyección. Esta biyección se llama *aplicación idéntica* o *identidad* y tiene gran importancia.

• EJEMPLO 7.3: Dados dos conjuntos, E y F, la aplicación de $E \times F$ en $F \times E$, tal que al elemento $(e, f) \in E \times F$ asocia el elemento $(f, e) \in F \times E$ es una biyección.

• EJEMPLO 7.4: Sea X el conjunto de los puntos de la recta x e Y el

conjunto de puntos de la recta y; consideremos la aplicación que asocia a cada punto $P \in X$, el punto $P' \in Y$, obtenido proyectando perpendicularmente los puntos de la recta x sobre la recta y, según indica la figura 7.2:

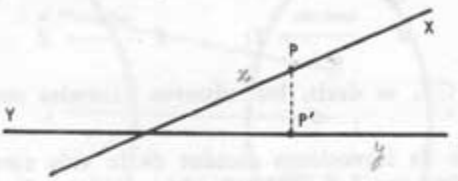


Figura 7.2

Esta aplicación de X en Y se llama *proyección ortogonal* y es una biyección, siempre que las rectas x e y no sean perpendiculares.

EJERCICIOS

7.1 **Construir una biyección. Compruebe que su correspondencia inversa es también biunívoca. Demuéstrelo, en general.**

7.2 **Compruébese que las aplicaciones tales que el original de cada elemento del conjunto de llegada es unitario, son las biyecciones.**

7.3 **Si A y B son conjuntos finitos entre los cuales puede establecerse una biyección, ¿qué puede decirse de sus cardinales?**

7.4 **¿Es Card $(E \times F)$ = Card $(F \times E)$ en el ejemplo 7.3?**

7.5 **Aunque vimos que el producto de conjuntos no era asociativo, entre**

$$(E \times F) \times G \quad \text{y} \quad E \times (F \times G)$$

puede establecerse una biyección. Defina esa biyección, de modo análogo a cómo se ha hecho en el ejemplo 7.3. ¿Qué puede decir de los cardinales?

7.6 **Si A es un conjunto finito y B unitario, comprobar que entre A y $A \times B$ puede establecerse una correspondencia biunívoca.**

7.7 **Dadas las biyecciones**

$$a: A \to A' \quad \text{y} \quad b: B \to B'$$

siendo

$$A \cap B = \varnothing \quad \text{y} \quad A' \cap B' = \varnothing$$

construir una biyección cuyo conjunto de partida sea $A+B$ y el de llegada $A'+B'$. Elija los conjuntos A, A', B y B' finitos y construya el diagrama de flechas apropiado.

7.8 **Ponga ejemplos de biyección sacados de la vida ordinaria.**

8. Composición de aplicaciones

Consideremos las aplicaciones:

$$f: A \longrightarrow B \quad \text{y} \quad g: B \longrightarrow C$$

(tales que el conjunto de llegada de la primera es igual al conjunto de partida de la segunda) definidos por el diagrama de la figura 8.1.

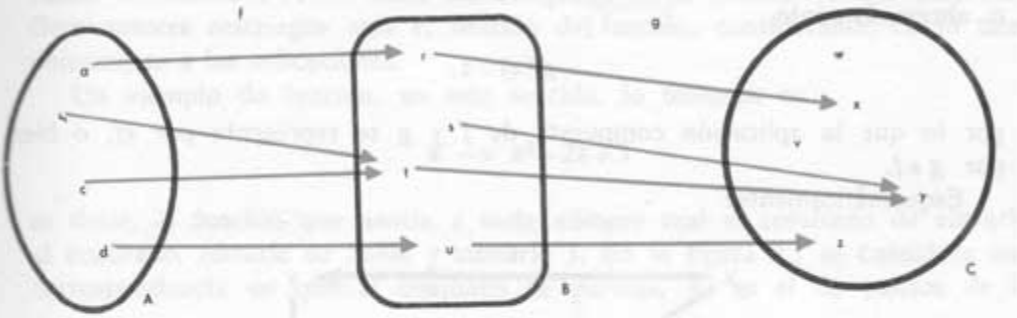


Figura 8.1

Parece natural considerar, como consecuencia de estas dos aplicaciones, una tercera aplicación, que llamaremos aplicación compuesta de f y g, cuyo conjunto de partida sea A y el de llegada C.

Como

$$a \xrightarrow{f} r \qquad r \xrightarrow{g} x$$

en la aplicación compuesta de f y g se tendrá:

$$a \longrightarrow x$$

Análogamente

$$b \longrightarrow y; \quad c \longrightarrow y; \quad d \longrightarrow z$$

• DEFINICIÓN 8.1: *Dadas las aplicaciones*

$$f: X \longrightarrow Y; \quad g: Y \longrightarrow Z$$

se llama aplicación compuesta, de f y g, a la aplicación de X en Z, tal que, si la imagen del elemento $x \in X$, en f, es el elemento $y \in Y$, y la imagen del elemento $y \in Y$ es el elemento $z \in Z$, entonces la imagen de x, en la aplicación compuesta de f y g, es z.

Sólo puede hablarse de aplicación compuesta de dos aplicaciones si el conjunto de llegada de la primera aplicación es igual al conjunto de partida de la segunda.

Notación: Sustituyendo

$$f(x)=y$$
$$\downarrow$$
$$\text{en} \quad g(y)=z$$

puede escribirse

$$g[f(x)]=z$$

o, abreviadamente,

$$gf(x)=z$$

por lo que la aplicación compuesta de f y g se representa por gf, o bien por $g * f$.

Esquemáticamente:

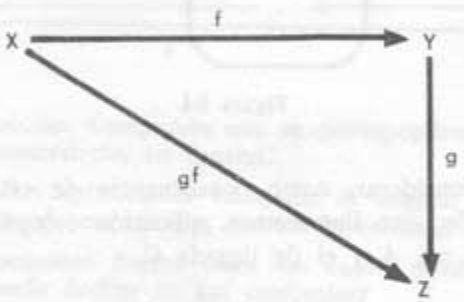


Figura 8.2

Otras *nomenclaturas:* La aplicación compuesta se llama también *aplicación producto.* Por otra parte, si a las aplicaciones se les llama funciones, entonces a la aplicación compuesta se le llama *función de función.*

EJERCICIOS

8.1 Compruébese, con un ejemplo, que la aplicación compuesta de dos biyecciones es otra biyección.

8.2 Compruebe que dadas dos biyecciones, f y g, se verifica

$$(g * f)^{-1}=f^{-1} * g^{-1}$$

8.3 Demuestre el enunciado de 8.2 con un esquema análogo al de la figura 8.1.

9. Concepto de función

Ya hemos dicho que las correspondencias se llaman también funciones.

La Matemática clásica designa con el nombre de *función* a aquellas correspondencias en que el conjunto de partida y el de llegada son números, llamándose en particular funciones de variable real o compleja, según que el conjunto de partida sea el de los números reales o complejos, respectivamente (tanto los números reales como los complejos serán estudiados más adelante). Otro autores restringen más el sentido del función, considerando como tales únicamente a las aplicaciones.

Un ejemplo de función, en este sentido, lo tenemos en:

$$x \longrightarrow x^2 - 2x + 3$$

es decir, la función que asocia a cada número real el resultado de elevarlo al cuadrado, restarle su doble y sumarle 3. En la figura 9.1 se considera una correspondencia en que el conjunto de partida, X, es el de puntos de la

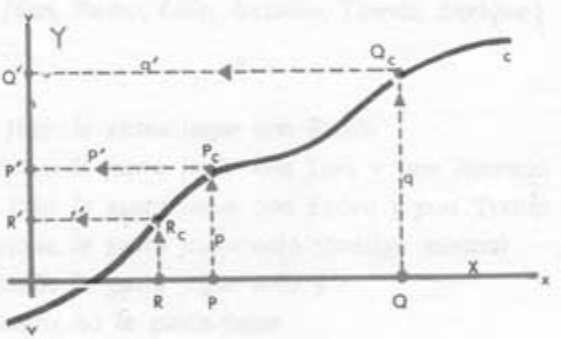


Figura 9.1

recta x y el de llegada, Y, el de puntos de la recta y. La curva c establece una correspondencia f de X en Y, de la forma siguiente:

Sea P un punto de la recta x, es decir, sea $P \in X$. Tracemos por P una recta, p, paralela a la recta y. Sea P_c el punto de intersección de la recta p y la curva c. Tracemos por el punto P_c una recta p' paralela a la recta x. Sea P' el punto de intersección de la recta p' y la recta y. El punto $P' \in Y$. Así se ha pasado del punto P al punto P', es decir, de un elemento del conjunto X a un elemento del conjunto Y. Se ha definido, pues, una aplicación, f, de X en Y, en que

$$f(P) = P'$$

Análogamente

$$f(Q) = Q'; \qquad f(R) = R', \text{ etc.}$$

Más adelante veremos que cada punto de una recta se puede identificar con un número real. Teniendo esto en cuenta, la curva *c* define una función de variable real.

Si se desea ampliar el estudio de aplicaciones y funciones, puede verse:

PEDRO ABELLANAS, *Matemáticas para Físicos e Ingenieros*, Ed. Romo, Madrid, 1963, páginas 6-13.

Encontrará multitud de diagramas de aplicaciones en:

PAPY, *Mathématique Moderne 1*, Ed. Didier, Bruselas-París, 1964, págs. 88-153.

4 RELACIONES

1. Relaciones entre los elementos de un conjunto

• EJEMPLO 1.1: Consideremos el conjunto de niños

$$C = \{Juan, Pedro, Luis, Antonio, Tomás, Enrique\}$$

para expresar que:

a Juan *le gusta jugar con* Pedro
a Pedro *le gusta jugar con* Luis y con Antonio
a Luis *le gusta jugar con* Pedro y con Tomás
a Enrique *le gusta jugar* solo (consigo mismo)
a Tomás *le gusta jugar* solo y
a Antonio no *le gusta jugar*

podemos construir el *diagrama de flechas* de la figugra 1.1:

Figura 1.1

donde la flecha que parte de Juan y llega a Pedro indica que a Juan *le gusta jugar con* Pedro, etc.

En el conjunto C se ha considerado *la relación le gusta jugar con*, esto es, *para cada pareja ordenada* de niños *se ha indicado* si al primero le gusta jugar con el segundo o, en otras palabras, *si el primero está relacionado con el segundo* en la relación *le gusta jugar con*.

• EJEMPLO 1.2: Sea $N^* = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ el conjunto de los números naturales, excluido el cero, y consideremos *la relación es múltiplo de*, que representaremos abreviadamente por R. Así, para expresar que 6 *es múltiplo de* 3, es decir, que 6 *está relacionado con* 3 en la relación *es múltiplo de*, escribiremos

$$6\,R\,3$$

lo que se lee 6 *está relacionado con* 3 *en la relación es múltiplo de*, o bien abreviadamente 6 *es múltiplo de* 3.

Del mismo modo

$$4\,R\,4; \quad 4\,R\,2; \quad 3\,R\,1; \quad \text{etc.}$$

pero, en cambio,

$$4\,\not{R}\,6$$

es decir, 4 *no está relacionado con* 6 en la relación es múltiplo de, o bien 4 *no es múltiplo de* 6.

Análogamente $6\,\not{R}\,4$, pero $6\,R\,2$.

• EJEMPLO 1.3: Consideremos el conjunto, Σ, de las rectas del plano. La *relación de perpendicularidad* permite comparar cada pareja de rectas del plano para decidir si están, o no están, en esta relación de perpendicularidad.

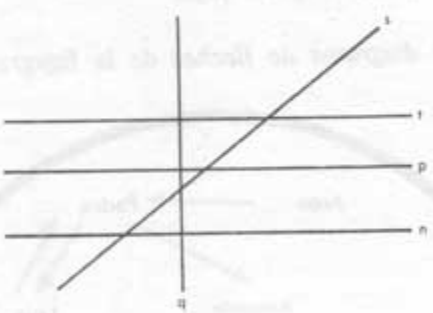


Figura 1.2

Para expresar que la recta p, de la figura 1.2, está relacionada con la recta q escribimos

$$p \perp q$$

lo que se lee p *es perpendicular a* q.

Análogamente

$$t \perp q$$

Como p no está relacionada con s, es decir, como p no es perpendicular a s escribiremos

$$p \not\perp s$$

Análogamente

$$q \not\perp s$$

• EJEMPLO 1.4: Consideremos el conjunto, Π, de los puntos del plano. Sea r una recta de ese plano. La recta r define la siguiente relación entre los elementos del conjunto Π: Dos puntos, A y B, pertenecientes al conjunto Π, diremos que están relacionados si la recta r es la mediatriz del segmento $\overline{AB}$.

Si designamos por R a esta relación podremos escribir, de acuerdo con la figura 1.3:

$$A\,R\,B; \quad A\,R\,E; \quad C\,R\,D; \quad C\,R\,A$$

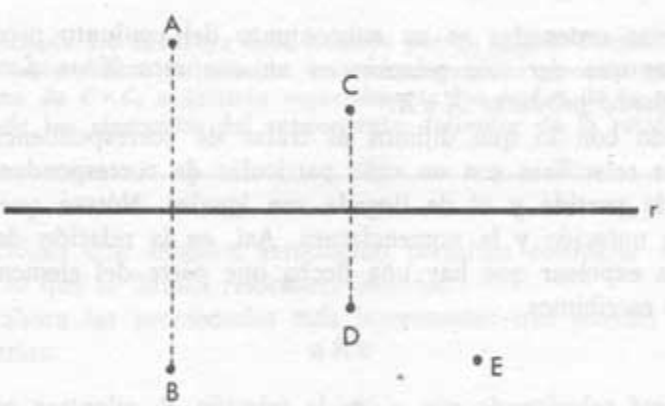


Figura 1.3

Los puntos A y B se dicen *simétricos respecto de la recta r*. Análogamente C y D son simétricos respecto de r, pero C y E no son simétricos respecto de r.

• EJEMPLO 1.5: Dado el conjunto $V=\{a, e, i, o, u\}$, consideremos entre sus elementos la relación R dada por:

$$e\,R\,a; \quad a\,R\,a; \quad a\,R\,e; \quad o\,R\,u$$

Esta relación puede esquematizarse mediante el diagrama de flechas de la figura 1.4, donde se indica que $o\,R\,u$, es decir, que o está relacionado con u,

mediante una flecha que parte de o y llega a u, etc.

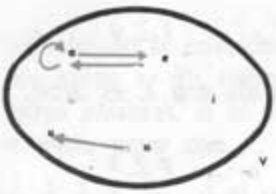


Figura 1.4

Notemos que la relación R se ha definido mediante las parejas ordenadas

$$(a, a); \quad (a, e); \quad (e, a); \quad (o, u)$$

donde se ha escrito

(a, a) en vez de $a\,R\,a$
(a, e) en vez de $a\,R\,e$, etc.

El conjunto

$$\{(a, a), (a, e), (e, a), (o, u)\}$$

de estas parejas ordenadas es un subconjunto del conjunto producto $V \times V$.

Observemos que *dar una relación en un conjunto X es dar un subconjunto del conjunto producto $X \times X$.*

Comparando con lo que dijimos al tratar de correspondencias, observaremos que las relaciones son un caso particular de correspondencias, en que el conjunto de partida y el de llegada son iguales. Nótese que únicamente ha variado la notación y la nomenclatura. Así, en la relación dada en la figura 1.4, para expresar que hay una flecha que parte del elemento o y llega al elemento u escribimos

$$o\,R\,u$$

y leemos *o está relacionado con u*, en la relación R, mientras que en términos de correspondencias hubiéramos escrito, para expresar lo mismo

$$R(o) = u$$

y hubiéramos leído *la imagen del elemento o es el elemento u en la correspondencia R.*

EJERCICIOS

1.1 En el conjunto $A = \{a, b, c, d\}$ se considera la relación R definida por el subconjunto de $A \times A$, formado por los elementos señalados con un aspa en el diagrama cartesiano de $A \times A$ de la figura 1.5. Construir el diagrama de flechas correspondiente.

Convenio: **Las primeras componentes de las parejas deben leerse en la recta horizontal y las segundas componentes en la vertical. Para mayor claridad se ha escrito la pareja (d, a) en el lugar apropiado de la figura 1.5.**

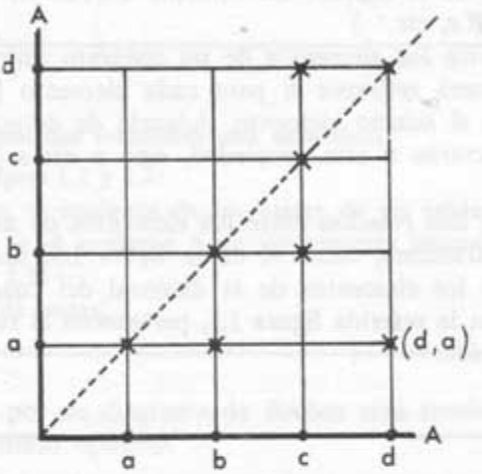


Figura 1.5

1.2 En el ejemplo 1.1 sustituya cada nombre por su inicial. Forme el subconjunto de $C \times C$ que define la relación le gusta jugar con **y construya el diagrama cartesiano de $C \times C$, señalando especialmente los nudos de la malla representativos de los elementos del subconjunto definidor de la relación.**

Las relaciones que estamos estudiando permiten comparar cada dos elementos, por lo que se llaman *relaciones binarias.*

Veamos ahora las propiedades más interesantes que pueden tener las relaciones binarias.

2. Propiedades de las relaciones binarias

En la relación del ejercicio 1.1 observamos que cada elemento está relacionado consigo mismo. Por ello diremos que esta relación, entre los elementos del conjunto A, es *reflexiva.*

• DEFINICIÓN 2.1: *Una relación binaria, R, entre los elementos de un conjunto C, se dice que tiene la propiedad reflexiva si se verifica*

$$\boxed{e\,R\,e} \quad \textit{para todos los elementos } e \in C$$

es decir, si para cada uno de los elementos e del conjunto C se verifica que (e, e) pertenece al subconjunto de $C \times C$ definidor de la relación.

La propiedad *reflexiva* se llama también *idéntica.*

• EJEMPLOS: La relación del ejemplo 1.2 es reflexiva, pues todo número natural es múltiplo de sí mismo. En cambio, la relación de la figura 1.4 no es reflexiva, pues $e \not R e$, etc.

Una relación, entre los elementos de un conjunto finito, dada por su diagrama de flechas, será reflexiva si para cada elemento hay una flecha que parte de él y llega al mismo elemento. Además de éstas, puede haber otras flechas, que no afectarán a esta propiedad, sino a otras propiedades que veremos después.

El hecho de que una relación entre los elementos de un conjunto, A, dada por un diagrama cartesiano, como el de la figura 1.5, sea reflexiva se manifiesta en que todos los elementos de la diagonal del cuadrado, señalada con trazo discontinuo, en la referida figura 1.5, pertenecen al subconjunto de $A \times A$ *definidor de la relación.*

EJERCICIO

2.1 Estudiar si las siguientes relaciones son reflexivas:

a) la del ejemplo 1.1;
b) la inclusión en el conjunto de las partes de un conjunto;
c) es menor que en el conjunto N de los números naturales;
d) las de los ejemplos 1.3 y 1.4.

En el ejemplo 1.3 observamos que dadas dos rectas, a y b, si $a \perp b$, entonces también se verifica que $b \perp a$. Por ello decimos que la perpendicularidad de rectas tiene la propiedad *simétrica.*

• DEFINICIÓN 2.2: *Una relación binaria, R, entre los elementos de un conjunto, C, diremos que es simétrica si cualesquiera que sean los elementos a y b pertenecinetes a C, se verifica:*

$$\boxed{a\,R\,b} \text{ implica } \boxed{b\,R\,a}$$

es decir, si

$$(a, b) \in S \text{ implica } (b, a) \in S$$

donde S es el subconjunto de $C \times C$ definidor de R.

• EJEMPLOS: La relación *es hermano de* en el conjunto de las personas es simétrica. En cambio, la relación de la figura 1.4 no es simétrica, pues $o\,R\,u$ pero $u \not R o$.

Nótese que la propiedad simétrica no dice que dos elementos cualesquiera

han de estar relacionados. Lo que afirma es que si a está relacionado con b, entonces b también ha de estarlo con a.

La propiedad *simétrica* se llama también *recíproca.*

EJERCICIO

2.2 Estudiar si las siguientes relaciones son simétricas:

a) las de los ejemplos 1.1 y 1.2;
b) la inclusión en el conjunto de las partes de un conjunto;
c) es mayor que en el conjunto N de los números naturales;
d) la del ejemplo 1.4;
e) el paralelismo de rectas.

Una relación dada por su diagrama de flechas será simétrica si para cada flecha hay otra en sentido opuesto.

• DEFINICIÓN 2.3: *Una relación binaria, R, entre los elementos de un conjunto C, diremos que es antisimétrica, si para cualesquiera elementos, a y b, distintos entre sí, pertenecientes a C, se verifica*

$$\boxed{a\,R\,b} \quad \text{implica} \quad \boxed{b\,\not R\,a}$$

es decir, si

$$(a, b) \in S \text{ implica } (b, a) \notin S, \text{ supuesto } a \neq b$$

donde S es el subconjunto de $C \times C$ definidor de la relación.

• EJEMPLOS: La relación del ejemplo 1.2 es antisimétrica, pues si a y b son números distintos y a es múltiplo de b, entonces b no puede ser múltiplo de a. En cambio, la relación del ejemplo 1.5 no es antisimétrica, pues a y e son dos elementos distintos, tales que $a\,R\,e$ y $e\,R\,a$.

La relación de la figura 1.5 es antisimétrica, lo que se refleja en el diagrama cartesiano en el hecho de que si un punto o nudo de la malla, no situado en la diagonal marcada con línea discontinua, está señalado con aspa, entonces su *simétrico* respecto de la referida diagonal no tendrá aspa. Se ha utilizado la palabra *simétrico* en el sentido que a este término se dio en el ejemplo 1.4.

EJERCICIOS

2.3 ¿Cómo se refleja la propiedad simétrica en el diagrama cartesiano?
2.4 ¿Cómo se refleja la propiedad antisimétrica en el diagrama de flechas?
2.5 Estudiar si las relaciones del ejercicio 2.2 son antisimétricas.

La propiedad antisimétrica se puede enunciar también de este otro modo:

• DEFINICIÓN 2.4: *Una relación binaria R entre los elementos de un conjunto C diremos que es antisimétrica, si para cualesquiera elementos, a y b, pertenecientes a C, se verifica*

$$\left.\begin{matrix} a\,R\,b \\ b\,R\,a \end{matrix}\right\} \text{ implican } a=b$$

es decir, si se verifica que:
si dos elementos están relacionados cada uno con el otro, entonces son el mismo elemento.

EJERCICIO

2.6 Comprobar que las relaciones del ejercicio 2.2 que son antisimétricas en el sentido de la definición 2.3 son también antisimétricas según la definición 2.4, y recíprocamente.

Más adelante probaremos que las definiciones 2.3 y 2.4 son equivalentes. Notemos que si una relación es antisimétrica, entonces no puede ser simétrica y recíprocamente, es decir, los conceptos de simetría y antisimetría son incompatibles (supuesto no vacío el subconjunto definidor de la relación), pero puede ocurrir que una relación no sea simétrica ni antisimétrica, como la del ejemplo 1.5.

• DEFINICIÓN 2.5: *Una relación binaria R entre los elementos de un conjunto C diremos que es transitiva si para cualesquiera elementos a, b, c, pertenecientes al conjunto C se verifica*

$$\left.\begin{matrix} a\,R\,b \\ b\,R\,c \end{matrix}\right\} \textit{ implican } a\,R\,c$$

es decir si

$$\left.\begin{matrix} (a,b)\in S \\ (b,c)\in S \end{matrix}\right\} \text{ implican } (a,c)\in S$$

• EJEMPLOS: La relación del ejemplo 1.2 es transitiva, pues si un número a es múltiplo de b y, a su vez, b es múltiplo de c, entonces a es múltiplo de c. En cambio, la relación del ejemplo 1.3 no es transitiva, pues $p \perp q$ y $q \perp t$ y sin embargo $p \not\perp t$ (véase figura 1.2). La relación de la figura 1.5 no es transitiva.

EJERCICIOS

2.7 ¿Cómo se traduce en el diagrama de flechas el hecho de que una relación sea transitiva?

2.8 Estudiar si las relaciones del ejercicio 2.2 son transitivas.

3. Relaciones de equivalencia

• DEFINICIÓN 3.1: *Las relaciones binarias que verifican las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva se llaman relaciones de equivalencia.*

• EJEMPLO 3.1: Consideremos el conjunto Σ, de las rectas del plano, y definamos en él la relación de *paralelismo* diciendo que *dos rectas son paralelas si no tienen ningún punto común, o bien, si tienen todos sus puntos comunes*, es decir, dos rectas son paralelas si no tienen un único punto común. De acuerdo con la figura 1.2, para expresar que la recta t es paralela a la recta p escribimos $t||p$. Esta relación posee las siguientes propiedades:

a) *Reflexiva*, pues para toda recta, p, se verifica $p||p$, según se desprende de la definición de paralelismo que hemos dado.

b) *Simétrica*, pues si p y t son dos rectas tales que $p||t$, entonces también $t||p$.

c) *Transitiva*, pues si $p||t$ y $t||n$, entonces también $p||n$.

Como la relación de paralelismo, en el conjunto Σ, de las rectas del plano, es reflexiva, simétrica y transitiva, diremos que es una relación de equivalencia.

EJERCICIOS

3.1 Estudiar si las siguientes relaciones son de equivalencia:

a) la perpendicularidad de rectas;
b) la igualdad de segmentos;
c) la inclusión de conjuntos.

3.2 En el conjunto $E=\{a, b, c, d, f, g, h\}$ se da la relación siguiente:

$$a\,R\,a;\quad a\,R\,b;\quad a\,R\,h;\quad b\,R\,a;\quad b\,R\,b;\quad b\,R\,h;\quad c\,R\,c;$$
$$d\,R\,d;\quad f\,R\,f;\quad f\,R\,g;\quad g\,R\,f;\quad g\,R\,g;\quad h\,R\,a;\quad h\,R\,b;\quad h\,R\,h$$

Constrúyase el diagrama de flechas correspondiente. ¿Es de equivalencia la relación R?

3.3 Construir un conjunto finito y dar en él una relación que sea de equivalencia

y otra que no lo sea. Utilice en ambos casos un subconjunto del conjunto producto para definir la relación.

3.4 Una aplicación $f: C \to D$ define una relación R entre los elementos de C del modo siguiente: dos elementos, a y b, pertenecientes al conjunto C, diremos que están relacionados, en la relación R, si tienen la misma imagen en la aplicación f, es decir, si $f(a)=f(b)$. Comprobar que la relación R, así definida, es de equivalencia.

Las *relaciones de equivalencia* también se llaman *relaciones de igualdad.*

Para las relaciones de equivalencia suelen utilizarse los signos convencionales $\equiv$ o $\sim$, es decir, para escribir que a está relacionado con b, en una relación de equivalencia, suele escribirse

$$a \equiv b, \quad \text{o bien} \quad a \sim b \quad \text{en vez de} \quad a\,R\,b$$

• EJEMPLO 3.2: Consideremos el conjunto finito

$$C=\{i, j, k, l, m, r, s, t\}$$

y en él la partición dada por

$$C=\{i, s\}+\{j, k\}+\{t, l, m\}+\{r\}$$

representada en la figura 3.1:

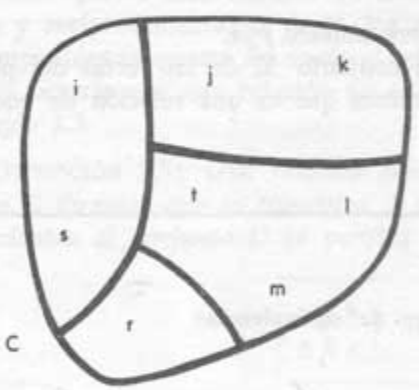


Figura 3.1

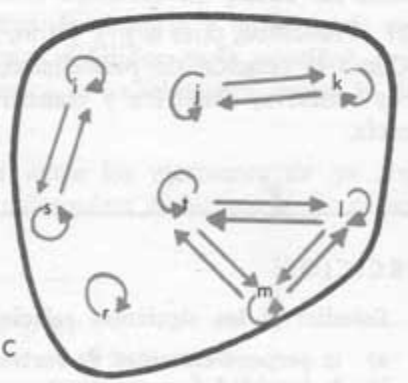


Figura 3.2

Esta partición del conjunto C da lugar a una relación R entre los elementos del conjunto C: diremos que dos elementos del conjunto C están relacionados en la relación R, si pertenecen a la misma parte (respecto de la partición que hemos efectuado). Así, tenemos que:

$$t\,R\,m, \quad i\,R\,s, \quad \text{etc.,} \quad \text{pero} \quad i\,R\,j$$

La relación R ha sido esquematizada en el diagrama de flechas de la figura 3.2. Se observa que la relación R es de equivalencia.

El ejemplo 3.2 es inmediatamente generalizable, es decir, una partición en un conjunto da lugar a una relación de equivalencia. Además, observando la figura 3.2, podemos preguntarnos si lo recíproco, de lo que acaba de afirmarse, es también cierto, es decir: ¿Una relación de equivalencia, entre los elementos de un conjunto C, dará lugar siempre a una partición de C? Veremos que la respuesta es afirmativa.

4. Clases de equivalencia

• EJEMPLO 4.1: Consideremos el conjunto

$$M=\{a, b, c, d, f, g, h, i, j, k, l, m, n\}$$

y en él la relación R dada por

$$\begin{array}{llllllll} a\,R\,a; & a\,R\,b; & a\,R\,c; & a\,R\,d; & b\,R\,a; & b\,R\,b; & b\,R\,c; \\ b\,R\,d; & c\,R\,a; & c\,R\,b; & c\,R\,c; & c\,R\,d; & d\,R\,a; & d\,R\,b; \\ d\,R\,c; & d\,R\,d; & f\,R\,f; & f\,R\,g; & g\,R\,f; & g\,R\,g; & h\,R\,h; \\ h\,R\,i; & h\,R\,j; & i\,R\,h; & i\,R\,i; & i\,R\,j; & j\,R\,h; & j\,R\,i; \\ j\,R\,j; & k\,R\,k; & l\,R\,l; & l\,R\,m; & m\,R\,l; & m\,R\,m; & n\,R\,n; \end{array}$$

que esquematizamos mediante el diagrama de flechas de la figura 4.1. Consideremos el elemento a del conjunto M. Los elementos del conjunto M, re-

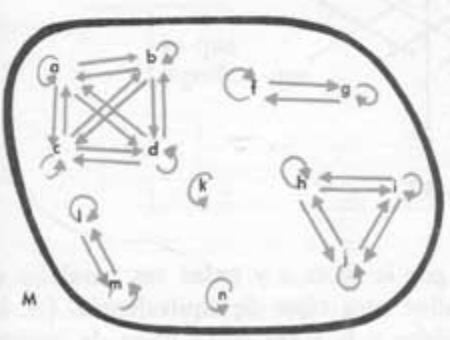


Figura 4.1

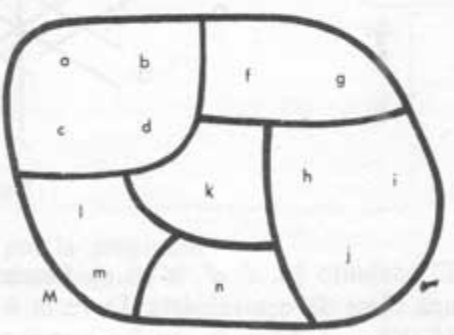


Figura 4.2

lacionados con a son: a, b, c, d. Al conjunto $\{a, b, c, d\}$, formado por los elementos relacionados con a, le llamaremos una *clase de equivalencia*. Aná-

logamente, los elementos relacionados con f, es decir, f y g, forman otro conjunto, el $\{f, g\}$, que será otra clase de equivalencia. El elemento h define la clase de equivalencia $\{h, i, j\}$. El elemento b define la clase de equivalencia $\{a, b, c, d\}$. El elemento k define la clase de equivalencia $\{k\}$, etc. Así, cada elemento define una clase de equivalencia.

Notemos que no todos los subconjuntos de M son clases de equivalencia. Por ejemplo, el subconjunto $\{f, c\}$ no es una clase de equivalencia.

El elemento i define la misma clase de equivalencia, $\{i, j, h\}$, que el elemento j. En cambio, el elemento m define otra clase de equivalencia: $\{l, m\}$, distinta de la definida por el elemento i. Observemos que las clases de equivalencia $\{i, j, h\}$ y $\{l, m\}$ son disjuntas. En general, se observa que las clases de equivalencia definidas por dos elementos son el mismo subconjunto o son subconjuntos disjuntos. Así, el elemento i define la misma clase que el j. En cambio, los elementos j y m definen clases disjuntas.

En la figura 4.2 pueden observarse las clases de equivalencia a que ha dado lugar la relación de equivalencia definida mediante el diagrama de flechas de la figura 4.1. Las clases de equivalencia determinan una partición en el conjunto M:

$$M=\{a, b, c, d\}+\{f, g\}+\{h, i, j\}+\{k\}+\{l, m\}+\{n\}$$

• EJEMPLO 4.2: En el ejemplo 3.1 se ha visto que el paralelismo es una relación de equivalencia en el conjunto Σ, de las rectas del plano.

Obsérvese la figura 4.3:

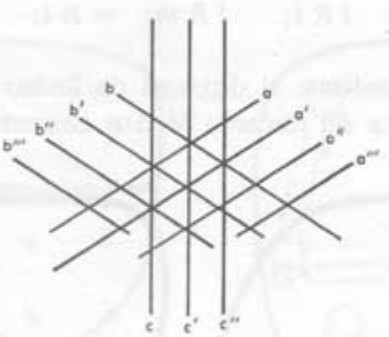


Figura 4.3

El conjunto $\{a, a', a'', a''', \ldots\}$, formado por la recta a y todas sus paralelas es una clase de equivalencia. La recta b define otra clase de equivalencia, $\{b, b', b'', b''', \ldots\}$, formada por las rectas paralelas a la recta b. La clase de equivalencia $\{c, c', c'', \ldots\}$ es la definida por c, o bien por c', etc.

Cada elemento del conjunto Σ, es decir, cada recta del plano, define una clase de equivalencia, respecto de la relación de paralelismo. Dos rectas del plano definen una misma clase si son paralelas, o bien definen dos clases distintas si no son paralelas.

Cada una de estas clases de equivalencia se llama una *dirección* (en este caso del paralelismo). Por tanto, las direcciones son los subconjuntos de Σ formados por una recta y todas sus paralelas. Las rectas a y a'' pertenecen a la misma dirección, ya que son paralelas. Corrientemente suele decirse que a y a'' *tienen la misma dirección* en vez de *pertenecen a la misma dirección.*

Las direcciones determinan una partición en el conjunto Σ de las rectas del plano, ya que cada recta define una dirección, por lo que las direcciones determinan un recubrimiento de Σ y, por otra parte, las direcciones definidas por dos elementos no relacionados son disjuntas, por lo que el recubrimiento determinado por las direcciones es una partición.

• DEFINICIÓN 4.1: *Dada una relación de equivalencia R entre los elementos de un conjunto C, se llama clase de equivalencia definida por el elemento $e \in C$ al subconjunto de C, formado por los elementos de C relacionados con e.*

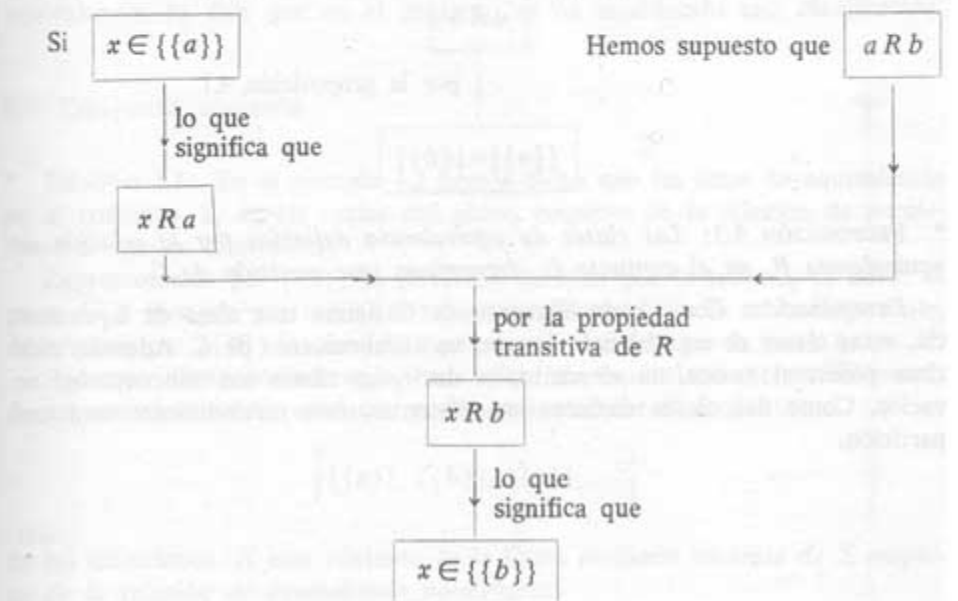
Cada elemento define una clase de equivalencia. Designemos por $\{\{e\}\}$ a la clase de equivalencia definida por el elemento e. Por tanto, decir que

$$a \in \{\{e\}\} \quad \text{significa que} \quad a\,R\,e.$$

• PROPOSICIÓN 4.1: Si a y b son dos elementos pertenecientes al conjunto C en el que se ha definido la relación de equivalencia R, se tiene:

$$\textit{Si} \quad \boxed{a\,R\,b} \quad \textit{entonces} \quad \boxed{\{\{a\}\}=\{\{b\}\}}$$

Demostración: Comenzaremos probando que $\{\{a\}\} \subset \{\{b\}\}$; para ello veamos que si $x \in \{\{a\}\}$, entonces también $x \in \{\{b\}\}$



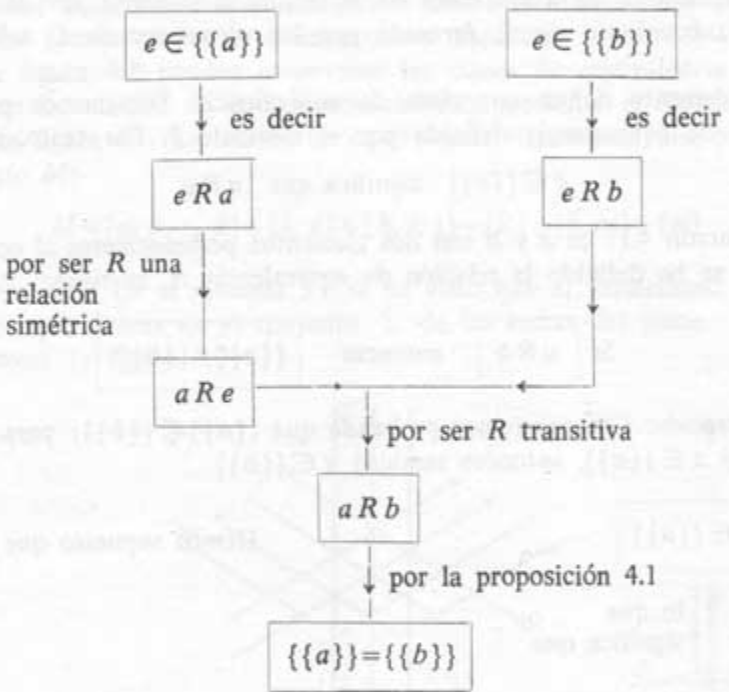
Análogamente se prueba que

$$\{\{b\}\} \subset \{\{a\}\}$$

Se ha probado así que cada uno de los conjuntos $\{\{a\}\}$ y $\{\{b\}\}$ está contenido en el otro, luego son iguales, según lo que se indicó al estudiar la propiedad antisimétrica de la inclusión conjuntista.

• PROPOSICIÓN 4.2: *Dos clases de equivalencia, $\{\{a\}\}$ y $\{\{b\}\}$, no disjuntas, son la misma clase.*

Demostración: Si las dos clases no son disjuntas, tendrán elementos comunes. Sea e uno de tales elementos comunes. Se tiene



• PROPOSICIÓN 4.3: *Las clases de equivalencia definidas por la relación de equivalencia R, en el conjunto C, determinan una partición de C.*

Demostración: Como cada elemento de C define una clase de equivalencia, estas clases de equivalencia forman un recubrimiento de C. Además, cada clase posee, al menos, un elemento, es decir, las clases son subconjuntos no vacíos. Como dos clases distintas son disjuntas, este recubrimiento será una partición.

EJERCICIOS

4.1 **Probar que dada una relación de equivalencia R entre los elementos de un conjunto C se verifica que:**

$$\{\{a\}\}=\{\{b\}\} \quad \text{implica} \quad a\,R\,b$$

donde $a \in C$; $b \in C$, lo que constituye el enunciado recíproco del de la proposición 4.1.

4.2 **En el ejemplo 3.2 se vio cómo una partición en un conjunto C daba lugar a una relación de equivalencia entre los elementos de C. Generalice aquel resultado y compárelo con el enunciado de la proposición 4.3.**

4.3 **Compruebe que las siguientes relaciones son de equivalencia y diga cuáles son las clases de equivalencia en cada uno de los casos.**

a) **dos números naturales están relacionados si su diferencia es múltiplo de tres;**

b) **dos personas están relacionadas si tienen la misma nacionalidad;**

c) **dos segmentos están relacionados si son iguales;**

d) **dos conjuntos están relacionados si se puede establecer una biyección del primero en el segundo.**

e) **dos puntos del plano están relacionados si equidistan de un punto fijo O del mismo plano.**

Las *clases de equivalencia* también se llaman abreviadamente *clases*. Cuando en un conjunto se ha establecido una partición, mediante una relación de equivalencia, se dice que en el conjunto se ha establecido una *clasificación*.

5. Conjunto cociente

• EJEMPLO 5.1: En el ejemplo 4.2 hemos dicho que las clase de equivalencia en el conjunto Σ, de las rectas del plano, respecto de la relación de *paralelismo* se llaman direcciones.

Representemos por $\{\{a\}\}$ la dirección definida por la recta a, es decir, la parte de Σ formada por todas las rectas paralelas a la recta a. Análogamente, designamos por $\{\{b\}\}$ la clase de equivalencia definida por la recta b, etc.

Podemos ahora considerar a cada clase de equivalencia como elemento de un nuevo conjunto, es decir, podemos considerar el conjunto

$$\Big\{\{\{a\}\},\ \{\{b\}\},\ \{\{c\}\},\ \ldots\Big\}$$

todas
de las direcciones. A este conjunto se le llama *conjunto cociente de Σ respecto de la relación de equivalencia paralelismo.*

• EJEMPLO 5.2: Consideremos el conjunto Π, de los puntos del plano. Sea O un punto fijo de ese plano. Diremos que dos puntos, A y B, pertenecientes a Π, están relacionados y escribiremos $A \sim B$, si A y B equidistan de O.

La relación $\sim$ es de equivalencia. Cada clase de equivalencia está formada por los puntos de las circunferencias de centro O, representadas en la figura 5.1.

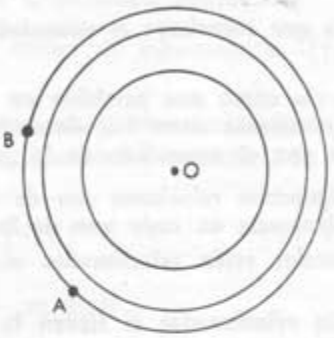


Figura 5.1

El conjunto cociente de Π, respecto de la relación de equivalencia $\sim$, será el conjunto de las circunferencias de centro O.

Las clases de equivalencia *se han considerado,* pues, *como elementos de* un nuevo conjunto: *el conjunto cociente.*

• EJEMPLO 5.3: Las clases del ejemplo 4.1 son:

$$A=\{a, b, c, d\}; \quad B=\{f, g\}; \quad G=\{h, i, j\}$$
$$D=\{k\}; \quad E=\{l, m\}; \quad F=\{n\}$$

Estas clases de equivalencia pueden considerarse como elementos de otro conjunto:

$$\{A, B, G, D, E, F\}$$

llamado el conjunto cociente de M respecto de la relación de equivalencia R.

• DEFINICIÓN 5.1: *Dada una relación de equivalencia R, entre los elementos de un conjunto C, se llama conjunto cociente de C, respecto de R, al conjunto cuyos elementos son las clases de equivalencia.*

El conjunto cociente de C respecto de R se representa por C/R.

Así, en el ejemplo 5.3, se tendrá:

$$M/R=\{A, B, G, D, E, F\}.$$

Del mismo modo, en el ejemplo 5.2, el conjunto cociente de Π respecto de $\sim$, es decir, el conjunto de las circunferencias de centro O, se representará por $\Pi/\sim$. En el ejemplo 5.1, $\Sigma/\|$ será el conjunto de las direcciones.

EJERCICIOS

5.1 **Encontrar el conjunto cociente y representarlo en la forma indicada anteriormente, en los casos siguientes:**

a) **conjunto cociente de las personas respecto de la relación** nacionalidad;

b) **conjunto cociente de los números naturales respecto de la relación de equivalencia** al dividir por 3 da el mismo resto que. **¿Cuántos elementos tiene, en este caso, el conjunto cociente?**

c) **Conjunto cociente de los números enteros respecto de la relación de equivalencia** tiene el mismo valor absoluto que.

d) **Conjunto cociente de los paralelogramos de base unidad respecto de la relación de equivalencia** tiene el mismo área que.

e) **Conjunto cociente del conjunto,** Π, **de los puntos del plano respecto de la relación de equivalencia definida así: dos puntos,** A **y** B, **se consideran relacionados si coinciden, o bien si el segmento** $\overline{AB}$ **es paralelo a una recta fija,** r, **del plano, en el caso de ser** A **distinto de** B.

5.2 **Compruebe que las relaciones de equivalencia de los apartados b), c) y d) del ejercicio anterior son un caso particular de la relación de equivalencia del ejercicio 3.4.**

5.3 **Considere un conjunto finito** F. **Establezca en él dos relaciones de equivalencia,** R **y** R'. **Cada una de ellas dará lugar a una clasificación del conjunto** F. **Utilice un diagrama similar al de la figura 4.2 para representar ambas particiones, sobre una misma figura, empleando un color para la producida por** R **y otro distinto para la inducida por** R'.

Si se desea ampliar el estudio de estas relaciones de equivalencia puede consultarse, entre otros, el libro:

R. GODEMENT, *Cours d'Algébre*, Ed. Hermann, París, 1963, páginas 75-83.

6. Relaciones de orden

• DEFINICIÓN 6.1: *Las relaciones binarias que verifican las propiedades reflexiva, antisimétrica y transitiva se llaman relaciones de orden.*

• EJEMPLO 6.1: En el conjunto

$$N=\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

de los números naturales, vamos a considerar la relación *menor o igual*, que representaremos por el signo $\leqslant$. Así, tendremos que:

como 3 *es menor que* 5, *podemos escribir* $3 \leqslant 5$

como 2 *es igual a* 2, *podemos escribir* $2 \leqslant 2$

como 8 *no es menor, ni igual, que* 6. *sería incorrecto escribir* $8 \leqslant 6$

La relación $\leqslant$, entre los números naturales, tiene las siguientes propiedades:

a) *Reflexiva,* pues todo número a es igual a sí mismo, luego $a \leqslant a$, cualquiera que sea a.

b) *Antisimétrica,* pues si a y b son dos números distintos, tales que $a \leqslant b$, entonces será a menor que b, luego no puede ser $b \leqslant a$.

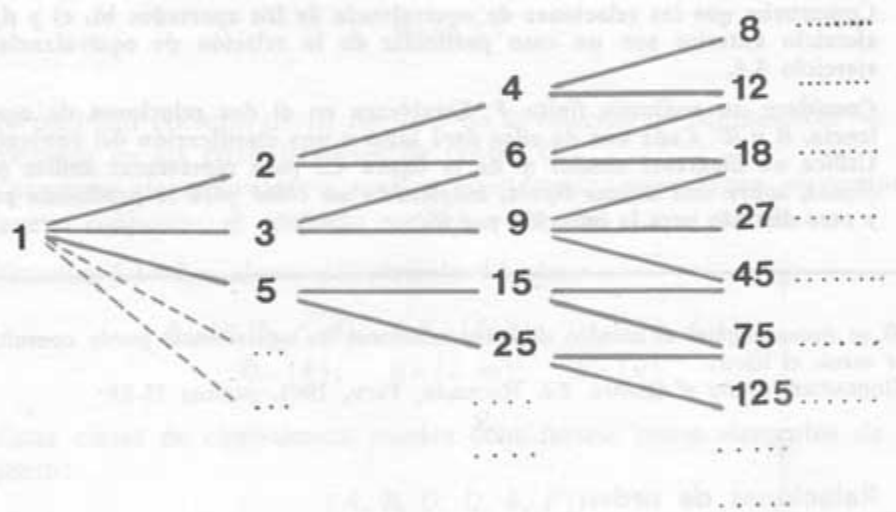
c) *Transitiva,* pues si $a \leqslant b$ y $b \leqslant c$, entonces también $a \leqslant c$.

Como la relación $\leqslant$, entre los números naturales, verifica las propiedades reflexiva, antisimétrica y transitiva, decimos que es una relación de orden.

Los números naturales quedan ordenados, por la relación $\leqslant$, en la forma:

$$0 \leqslant 1 \leqslant 2 \leqslant 3 \leqslant 4 \leqslant 5 \leqslant 6 \leqslant 7 \leqslant 8 \leqslant 9 \leqslant 10 \leqslant 11 \leqslant \ldots$$

• EJEMPLO 6.2: La relación *es múltiplo de,* del ejemplo 1.2, es reflexiva, antisimétrica y transitiva, luego es una relación de orden. Los elementos del conjunto N^* quedan ordenados por esta relación en la forma:



EJERCICIOS

6.1 Comprobar si las siguientes relaciones son de orden:

a) inclusión, **en el conjunto de las partes de un conjunto;**

b) es divisor de, **en el conjunto** N^*;

c) es mayor o igual que, **en el conjunto** N;

d) la del ejemplo 1.3.

6.2 En el conjunto $C=\{a, b, c\}$ **se define la relación** R **por:**

$$a\,R\,a; \quad a\,R\,b; \quad a\,R\,c; \quad b\,R\,b; \quad b\,R\,c; \quad c\,R\,c;$$

¿es de orden? Construya el diagrama de flechas apropiado.

6.3 **En el conjunto**

$$V=\{a,\ e,\ o,\ u,\ i\}$$

se define la relación:

$$a\,R\,a;\quad a\,R\,e;\quad e\,R\,e;\quad i\,R\,i;\quad i\,R\,o;\quad i\,R\,u;\quad o\,R\,o;\quad o\,R\,u;\quad u\,R\,u$$

¿es de orden?

6.4 **Si en el diagrama de flechas correspondiente a la relación del ejercicio 6.2 cambia el sentido de todas las flechas, obtendrá otra relación. ¿Es de orden esta nueva relación? Generalice este resultado. Compruebe que se obtienen situaciones similares comparando el ejemplo 6.1 y el ejercicio 6.1 c), o bien el ejemplo 6.2 y el ejercicio 6.1 b).**

6.5 **¿Es de orden la relación R definida en el conjunto $C=\{a, b, c\}$ mediante el subconjunto siguiente de $C\times C$:**

$$\{(a, a),\ (a, b),\ (b, b),\ (b, c),\ (c, c),\ (c, a)\}?$$

Así como las relaciones de equivalencia permiten clasificar los conjuntos, *las de orden permiten establecer una ordenación* entre sus elementos.

Comparando los ejemplos 6.1 y 6.2 observamos que, dados dos números naturales, siempre uno de ellos es menor o igual que el otro. En cambio, dados dos elementos de N^*, puede ocurrir que ninguno de los dos sea múltiplo del otro. Por ejemplo, 3 no es múltiplo de 4, ni 4 lo es de 3. Nótese que los elementos de N quedan *totalmente ordenados* por la relación $\leqslant$. En cambio, los elementos de N^* no quedan ordenados totalmente por la relación *es múltiplo de*, ya que hay parejas de números, como 3 y 4, que no son comparables por esta relación. Por ello se dice que la relación del ejemplo 6.2 *ordena parcialmente* al conjunto N^*.

* DEFINICIÓN 6.2: *Una relación, R, de orden, entre los elementos de un conjunto C, diremos que es de orden total si para cualesquiera elementos, a y b, pertenecientes a C, se verifica una de estas dos proposiciones* (o ambas):

$$\boxed{a\,R\,b} \quad o\ bien \quad \boxed{b\,R\,a}$$

En caso contrario, es decir, *cuando existen elementos, a y b, pertenecientes a C, tales que* $a\,\not R\,b$ *y* $b\,\not R\,a$, *se dice que la relación de orden R es de orden parcial.*

EJERCICIOS

6.6 **Diga si las relaciones de orden de los ejercicios 6.1, 6.2, 6.3 son de orden parcial o total.**

6.7 **Defina la relación que permite ordenar las palabras de un diccionario. ¿Es de orden parcial o total?**

---

7. Las relaciones en la Escuela Primaria

Ya hemos visto cómo una relación de equivalencia entre los elementos de un conjunto da lugar a una clasificación en ese conjunto. Esto tiene una importancia fundamental, pues *la Ciencia,* en general, *no estudia objetos, sino clases* de objetos. Por ejemplo, la Zoología no estudia a cada animal en particular, sino clases de animales: la clase *gato,* la clase *perro,* etc. En este caso, cada clase está formada por animales que tienen unas ciertas características similares, es decir, por animales relacionados en una cierta relación de equivalencia.

Cuando el niño comienza a hablar y *designa a varios objetos distintos con la misma palabra* (mesa, por ejemplo), *está clasificando* a los objetos, es decir, establece relaciones de equivalencia, considerando de una misma clase a aquellos objetos que tienen unas ciertas características comunes.

A la vista de estas observaciones, se comprende que el estudio que hemos efectuado del proceso de clasificación será útil al maestro no sólo en la clase de Matemáticas.

Por supuesto, el niño, y el adulto, pueden realizar clasificaciones, en casos sencillos, sin necesidad de estudiar relaciones de equivalencia, lo mismo que pueden hacer la digestión sin necesidad de saber en qué consiste científicamente este proceso. Pero cuando se trata de establecer clasificaciones en casos no tan simples, como, por ejemplo, en un conjunto infinito, hay que dar en él una relación de equivalencia.

Una posible situación que induce al niño a efectuar clasificaciones es la sugerida por la figura 10.1 del § 2. El mismo conjunto de discos, cuadrados, estrellas, etc., puede ser clasificado de distintos modos, según se atienda al color, forma, etc., es decir, según cuál sea la relación de equivalencia.

En cuanto a relaciones de orden, los conceptos de *mayor* y *menor* en el conjunto de las tiras de papel (materialización del conjunto de los segmentos) pueden introducirse desde la Escuela Maternal. El orden de los niños en la clase sugiere otro ejemplo de ordenación total. La relación *es superior a* en el conjunto de los militares sugiere un posible ejemplo de relación de orden parcial. Otra situación que sugiere la ordenación parcial es la relación *es antecesor de* en el conjunto de las personas.

Insistiendo en la conveniencia de no separar, a nivel escolar, las distintas partes de la Matemática, puede introducirse, a propósito de relaciones de orden, la ordenación en la recta: en el conjunto de los puntos de la recta pueden darse dos ordenaciones recíprocas, cada una de las cuales queda definida por un par ordenado de puntos.

Pueden encontrarse otras muchas situaciones para introducir las relaciones en el libro:

T. J. FLETCHER, *L'Apprendissage de la mathématique aujourd'hui,* O.C.D.L., París, 1966. páginas 201-225.

ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS 5

1. Leyes de composición

• EJEMPLO 1.1: Consideremos el conjunto $N=\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ de los numeros naturales. Notemos que a cada par de números naturales la suma le hace corresponder otro número natural. Por ejemplo:

$$(2, 3) \xrightarrow{+} 5$$

Recordando que:

$$(2, 3) \in N \times N \quad \text{y} \quad 5 \in N$$

podemos decir que la suma de números naturales es una aplicación del conjunto producto $N \times N$ en N. Por ello diremos que *la suma de números naturales es una ley de composición interna,* en N.

• EJEMPLO 1.2: Dado un conjunto E, consideremos el conjunto $\mathcal{P}(E)$, de las

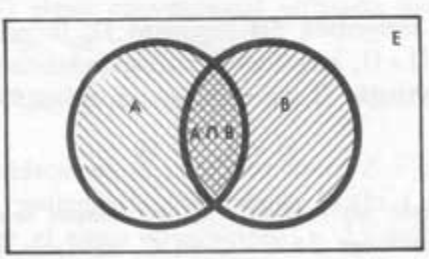


Figura 1.1

partes de E, y recordemos que si A y B son dos partes de E, también su intersección es otra parte de E, es decir:

$$A \subset E \quad \text{y} \quad B \subset E \quad \text{implican} \quad A \cap B \subset E$$

dicho de otro modo:

$$A \in \mathcal{P}(E) \quad \text{y} \quad B \in \mathcal{P}(E) \quad \text{implican} \quad A \cap B \in \mathcal{P}(E)$$

Diremos que *la intersección es una ley de composición interna en* $\mathcal{P}(E)$, ya que a cada pareja (A, B), de partes de E, le asocia otra parte de E; a saber: el conjunto de todos los elementos de E que pertenecen a A y a B

$$(A, B) \xrightarrow{\cap} A \cap B$$

es decir, la intersección de partes de E es una aplicación de $\mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E)$ en $\mathcal{P}(E)$, pues

$$(A, B) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E)$$

En la figura 1.1 se esquematiza, mediante un diagrama de Venn, lo que se acaba de hacer notar.

• EJEMPLO 1.3: Consideremos el conjunto Π, de los puntos de un plano, y la aplicación que asigna a cada pareja de puntos del plano el punto medio del segmento, cuyos extremos son esos dos puntos.

Así, en la figura 1.2, se tiene:

$$(P, Q) \longrightarrow M$$

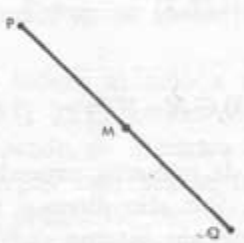


Figura 1.2

Como P y Q son elementos del conjunto Π, la pareja (P, Q) pertenecerá al conjunto producto $\Pi \times \Pi$, luego esta correspondencia es una *ley de composición interna en el conjunto* Π, ya que es una aplicación:

$$\Pi \times \Pi \longrightarrow \Pi$$

• DEFINICIÓN 1.1: *Dado un conjunto C, se llaman leyes de composición interna en C a las aplicaciones de $C \times C$ en C, es decir, a las correspondencias que asignan a cada pareja de elementos de C un elemento de C.*

Las *leyes de composición interna* se llaman también *operaciones internas*.

Cada operación se designa mediante un signo convencional. Así, en el ejemplo 1.1, para indicar que:

$$(2, 3) \xrightarrow{+} 5 \quad \text{se escribe} \quad 2 + 3 = 5$$

es decir, + es signo convencional de la suma de naturales. Asimismo, el signo convencional de la intersección es $\cap$. Análogamente, en el ejemplo 1.3, para indicar que:

$$(P, Q) \longrightarrow M \quad \text{podemos escribir} \quad P * Q = M$$

lo que puede leerse *P compuesto con Q*, o bien *P compuesto Q*, igual a *M*. Por tanto, el signo convencional de la operación del ejemplo 1.3 es $*$. Otros signos convencionales muy utilizados, para representar abreviadamente a las operaciones internas, son: $\perp$, $\circ$, T, etc.

* EJEMPLO 1.4: Sea N el conjunto de los números naturales y $\{0\}$ el conjunto unitario cuyo único elemento es el número cero, y consideremos el conjunto diferencia

$$N^* = N - \{0\}$$

que también puede escribirse en la forma

$$\complement_N\{0\}$$

ya que $\{0\} \subset N$, es decir, el conjunto

$$N^* = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

de los números naturales, excepto el cero. A cada dos elementos de N^* podemos asociar su máximo común divisor. Así:

$$(12, 18) \longrightarrow 6$$

es decir, 6 es el máximo común divisor de 12 y 18. Por tanto, como para cada pareja de elementos de N^* existe un máximo común divisor, se puede decir que *el máximo común divisor es una operación interna o una ley de composición* en N^*. El signo convencional utilizado para expresar el máximo común divisor es $\wedge$. Así, se escribirá:

$$12 \wedge 18 = 6 \quad \text{o bien} \quad \text{m. c. d.}\,(12, 18) = 6$$

* EJEMPLO 1.5: Consideremos el conjunto finito $E = \{i, j, k\}$ y, en él, la ley de composición dada mediante la *tabla* de la figura 1.3. Designaremos a esta ley de composición por el signo convencional $\circ$. La referida *tabla* expresa que

$$(i, j) \longrightarrow k \quad \text{es decir, que} \quad i \circ j = k$$

o sea que el elemento $i \circ j$, se encuentra en la intersección de la fila i con la columna j de la *tabla* de la figura 1.3. Análogamente

$$i \circ k = j; \qquad k \circ i = i; \qquad k \circ j = i; \qquad \text{etc.}$$

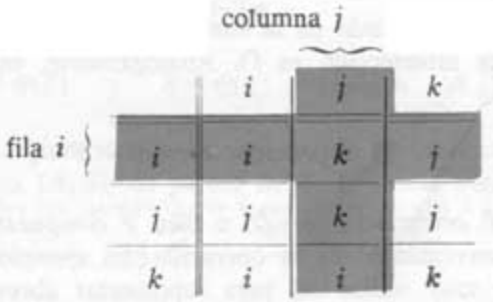


Figura 1.3

Las *tablas* de este tipo, para dar leyes de composición en un conjunto, se llaman *tablas de composición.*

• EJEMPLO 1.6: Consideremos la sustracción en el conjunto N, de los números naturales. A la pareja $(5, 2)$ la sustracción le asocia 3:

$$(5, 2) \xrightarrow{-} 3$$

pero a la pareja $(2, 5)$ no le asocia ningún número natural:

$$(2, 5) \xrightarrow{-} ?$$

ya que la diferencia de 2 y 5 no es ningún número natural, sino el número entero -3. Por tanto, la sustracción de números naturales no es una aplicación de $N \times N$ en N, por lo que la sustracción no es una operación interna en N.

Para expresar que el resultado de una operación entre dos elementos cualesquiera de un conjunto es otro elemento del conjunto se dice también que *el conjunto es cerrado respecto de la operación,* en vez de decir que *la operación es interna en ese conjunto.* Así, el conjunto N es cerrado respecto de $+$, pero no lo es respecto de $-$.

EJERCICIOS

1.1 Comprobar si son operaciones internas:

a) la multiplicación de números naturales;

b) la unión de partes de un conjunto;

c) la división de naturales;

d) el mínimo común múltiplo en el conjunto N^* del ejemplo 1.4;

e) la potenciación de naturales:

$$(a, b) \to a^b$$

f) **la aplicación que asocia a cada pareja de elementos de N^* el resto de dividir el primero por el segundo;**

g) **la radicación de naturales:**

$$(a, b) \to \sqrt[b]{a}$$

h) **la sustracción en el conjunto de los enteros**

$$Z=\{\ldots, -2, -1, 0, 1, \ldots\}$$

1.2 Ponga otros ejemplos de leyes de composición interna.

1.3 ¿Es cerrado respecto de la suma el conjunto $\{0, 1\}$? ¿Lo es respecto del producto? Formar la tabla de composición.

---

2. Algunas posibles propiedades de las leyes de composición

• DEFINICIÓN 2.1: *Dado un conjunto C, diremos que una ley de composición $*$ en C es asociativa, si se verifica:*

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

cualesquiera que sean los elementos a, b, c pertenecientes al conjunto C.

• EJEMPLOS: La suma de números naturales es asociativa, es decir, para cualesquiera números naturales *a, b, c* se verifica:

$$(a+b)+c=a+(b+c)$$

Análogamente, como ya se vio, la unión de partes de un conjunto es aso-

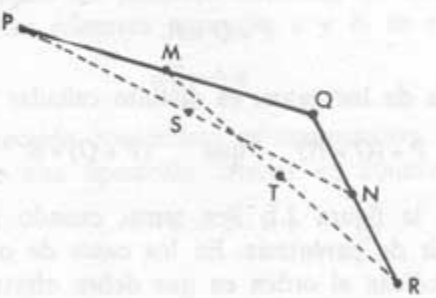


Figura 2.1

ciativa. En cambio, la operación interna del ejemplo 1.3 no es asociativa, pues considerando los puntos *P, Q* y *R* de la figura 2.1 se tiene:

$$\underbrace{(P * Q)}_{M} * R \qquad P * \underbrace{(Q * R)}_{N}$$

$$\underbrace{M * R}_{T} \neq \underbrace{P * N}_{S}$$

EJERCICIOS

2.1 Comprobar si las siguientes operaciones son asociativas:

a) multiplicación de naturales

b) sustracción de enteros

c) máximo común divisor en N^*

d) potenciación de naturales

e) ley de composición del ejemplo 1.5

f) diferencia simétrica en el conjunto de partes de un conjunto E.

2.2 Considere otras leyes de composición y estudie si son asociativas.

2.3 Considere un conjunto finito y establezca en él una ley de composición, mediante una tabla, como se hizo en el ejemplo 1.5, pero de modo que sea asociativa.

Como consecuencia de la propiedad asociativa, puede escribirse:

$$4+3+5$$

es decir, tiene sentido hablar de suma de tres, o más, sumandos, ya que es lo mismo efectuar

$$(4+3)+5 \quad \text{que} \quad 4+(3+5)$$

En cambio, la operación interna del ejemplo 1.3 no es asociativa, por lo que no tiene sentido escribir

$$P * Q * R$$

ya que, en la mayoría de los casos, es distinto calcular

$$P * (Q * R) \quad \text{que} \quad (P * Q) * R$$

como se ha visto en la figura 2.1. Por tanto, cuando no hay asociatividad, no se puede prescindir de paréntesis. En los casos de operaciones no asociativas, los paréntesis indican el orden en que deben efectuarse las operaciones.

EJERCICIOS

2.4 ¿En qué orden hay que efectuar las operaciones en

$$[P * (Q * R)] * S$$

Verifique lo indicado sobre una figura análoga a la figura 2.1. Haga lo

mismo para

$$(P * Q) * (R * S)$$

2.5 **Si en un conjunto N^* se tiene una operación interna $\wedge$ asociativa, probar, como consecuencia de la propiedad asociativa, que**

$$(a \wedge b \wedge c) \wedge (d \wedge e) = a \wedge (b \wedge c \wedge d \wedge e)$$

aplicando reiteradamente la referida propiedad.

2.6 **Recordando que si a y n son números naturales, se define la potencia:**

$$\left.\begin{array}{l} a^n = a\ a\ a\ \ldots\ a \quad (n \text{ veces}) \quad \text{para } n > 1 \\ a^1 = a \\ a^0 = 1 \end{array}\right\}$$

probar la conocida ley de exponentes

$$\boxed{a^n\, a^m = a^{n+m}} \qquad a,\ n,\ m \in N$$

como consecuencia de la propiedad asociativa.

---

* DEFINICIÓN 2.2: *Dado un conjunto C, diremos que una ley de composición $*_T$ en C, es conmutativa, si verifica:*

$$a * b = b * a$$

cualesquiera que sean los elementos a, b pertenecientes al conjunto C.

* EJEMPLOS: El producto de números naturales es conmutativo, es decir, cualesquiera que sean los números naturales a y b, se verifica:

$$a\,b = b\,a$$

Asimismo, la intersección conjuntista es conmutativa. En cambio, la sustracción de enteros es una operación interna no conmutativa:

$$5 - 2 \neq 2 - 5$$

EJERCICIOS

2.7 **Comprobar si las siguientes operaciones son conmutativas:**

a) **suma de naturales**
b) **división de naturales**
c) **ley de composición del ejemplo 1.5**
d) **mínimo común múltiplo en N^***
e) **potenciación de naturales.**

2.8 **Considere otras leyes de composición y estudie su conmutatividad.**

2.9 **Considere el conjunto finito $E=\{a, b, c, d\}$ y establezca en él una ley de composición, mediante una tabla, de modo que sea conmutativa.**

2.10 **Observe, en el ejercicio anterior, que la conmutatividad se refleja en la tabla en el hecho de que los elementos simétricos en una cierta simetría (en el sentido del ejemplo 1.4 del § 4) coinciden. ¿Cuál es esa simetría?**

2.11 **Utilice las propiedades conmutativa y asociativa del producto de naturales para probar la conocida ley de exponentes:**

$$\boxed{(a\,b)^n=a^n\,b^n} \quad a, b, c \in N$$

Considerando la suma de números naturales, observamos que el número natural cero posee la propiedad:

$$a+0=0+a=a$$

cualquiera que sea el número natural a. Por ello diremos que el cero es el elemento neutro de la suma de naturales.

Análogamente, en el conjunto $\mathcal{P}(E)$ de las partes del conjunto E, se tiene

$$A \cup \varnothing = \varnothing \cup A = A$$

cualquiera que sea la parte $A \subset E$. Por ello diremos que $\varnothing$ es el elemento neutro de la unión conjuntista.

• DEFINICIÓN 2.3: *Dado un conjunto C y, en él, una ley de composición $*$, diremos que el elemento $e \in C$ es su elemento neutro, si se verifica*

$$e * a = a * e = a$$

cualquiera que sea el elemento $a \in C$.

No todas las leyes de composición tienen elemento neutro. Por ejemplo, la operación del ejemplo 1.3 no posee elemento neutro, pues no existe ningún punto X, tal que el punto medio del segmento $\overline{XA}$ sea A, cualquiera que sea el punto A.

EJERCICIOS

2.12 **Encontrar el elemento neutro, si existe, para las siguientes operaciones internas:**

a) **producto de números naturales**
b) **intersección de partes de E**
c) **mínimo común múltiplo en N^***
d) **máximo común divisor en N^***

e) **suma de enteros**
f) **potenciación de naturales**
g) **sustracción de enteros**
h) **diferencia simétrica en el conjunto de partes de E.**

2.13 **Considere el conjunto finito $F=\{e, x, y, z\}$ y establezca en él una ley de composición conmutativa y en que e sea el elemento neutro. ¿Cómo se refleja este hecho en la tabla de composición?**

Surge ahora la pregunta de si pueden existir varios elementos neutros, para una misma operación en un conjunto. La respuesta viene dada por la siguiente

• PROPOSICIÓN 2.1: *Si el elemento neutro existe, es único.*

Demostración: Para probar que no hay más que un neutro, supongamos que el elemento e sea neutro para la operación $*$, en el conjunto C, y que el elemento g sea también neutro, y demostremos que entonces e y g han de coincidir. Para ello consideremos

$$e * g$$

Se tiene

$$e * g = g$$

por ser e elemento neutro, y, por otra parte

$$e = e * g$$

por ser g elemento neutro. Por tanto,

$$e = g$$

3. Semigrupos

• EJEMPLO 3.1: La suma de números naturales es una operación interna y asociativa. Por ello decimos que *el conjunto N de los números naturales posee estructura de semigrupo respecto de la operación suma*, o bien que $(N, +)$, *es un semigrupo.*

• EJEMPLO 3.2: En el conjunto $\mathcal{P}(E)$, de las partes de E, la intersección es una operación interna y asociativa. Por ello diremos que $\mathcal{P}(E)$ *tiene estructura de semigrupo respecto de la intersección*, o bien que $[\mathcal{P}(E), \cap]$, *es un semigrupo.*

• DEFINICIÓN 3.1: *Si en un conjunto C, no vacío, está definida una operación $*$, interna y asociativa, diremos que el conjunto C posee estructura de semigrupo respecto de la operación $*$, o bien que $(C, *)$, es un semigrupo.*

Notemos que el semigrupo no es el conjunto, sino el conjunto respecto de la operación. Así, el semigrupo $(N, \cdot)$, de los números naturales respecto de la operación producto, es distinto del semigrupo $(N, +)$, de los números naturales respecto de la operación suma, aunque el conjunto N sea el mismo en ambos casos.

EJERCICIOS

3.1 Comprobar si los siguientes conjuntos tienen estructura de semigrupo respecto de las operaciones que se indican:

a) conjunto de partes de E respecto de la unión

b) enteros respecto de la suma, es decir $(Z, +)$ abreviadamente

c) N^* respecto del máximo común divisor. Abreviadamente: $(N^*, \wedge)$.

d) N^* respecto del mínimo común múltiplo. Abreviadamente: $(N^*, \vee)$.

e) $(Z, \cdot)$.

f) $(N$, potenciación).

g) (Π, punto medio) del ejemplo 1.3.

h) $\mathcal{P}(E)$ respecto de la diferencia simétrica. Abreviadamente: $[\mathcal{P}(E), \Delta]$.

i) $(Z$, sustracción).

j) (Polinomios, +).

k) (Enteros pares, +).

l) (Enteros impares, +).

3.2 Busque otros ejemplos de semigrupos.

• DEFINICIÓN 3.2: *Si en un semigrupo, $(C, *)$, la operación $*$ posee además la propiedad conmutativa, el semigrupo se llama conmutativo.*

• EJEMPLOS: $(N, +)$ es un semigrupo conmutativo. En cambio, la aplicación que asocia a cada pareja ordenada (A, B), de puntos del plano, el segundo de ellos B, es una operación interna asociativa, pero se ve inmediatamente que este semigrupo no es conmutativo.

Se puede también decir *semigrupo abeliano* en vez de *semigrupo conmutativo*, en memoria del matemático noruego ABEL (1802-1829).

EJERCICIO

3.3 Entre los semigrupos que ha encontrado en el ejercicio 3.1 señale cuáles son conmutativos.

• DEFINICIÓN 3.3: *Si en un semigrupo* $(C, *)$ *la operación* $*$ *posee elemento neutro, el semigrupo se dice con elemento neutro,* es decir, $(C, *)$ es entonces un semigrupo con elemento neutro.

• EJEMPLOS: $(N, +)$ es un semigrupo con elemento neutro. En cambio, el semigrupo de los números ~~naturales~~ enteros respecto de la ley de composición que asocia a cada pareja de ~~naturales~~ enteros el mayor de ellos, o el mismo, si son iguales, no posee elemento neutro.[1]

Un semigrupo puede ser conmutativo y sin elemento neutro y recíprocamente.

[1] En el conjunto N de los números naturales el elemento neutro de la ley así definida es el 0. En efecto, si designamos por $\perp$ esta ley, es claro que para todo $a \in N$, $a \perp 0 = 0 \perp a = a$, por ser $a > 0$; se supone $a \neq 0$.

EJERCICIOS

3.4 Entre los semigrupos que ha encontrado en el ejercicio 3.1 diga cuáles poseen elemento neutro.

3.5 Comprobar que el conjunto $\{1, -1\}$ posee estructura de semigrupo conmutativo y con elemento neutro, respecto de la operación producto.

Cuando la operación es la ~~suma~~ adición, el semigrupo suele llamarse *aditivo* y cuando es ~~el producto~~ la multiplicación se llama *multiplicativo.* Así, se puede decir *el semigrupo aditivo de los números naturales* en vez de el semigrupo $(N, +)$. Análogamente, ~~el~~ al semigrupo $(N, \cdot)$ se le llama *el semigrupo multiplicativo de los números naturales.*

Al elemento neutro de un semigrupo aditivo se le suele llamar también *elemento cero,* ya que el cero es el neutro de la ~~suma~~ adición, y al elemento neutro de un semigrupo multiplicativo se le llama también *elemento unidad,* por ser el uno el neutro ~~del producto~~ de la multiplicación.

4. Grupos

• EJEMPLO 4.1: En el semigrupo aditivo de los enteros, es decir, en el par $(Z, +)$, cuyo elemento neutro es el cero, observamos que:

$$3+(-3)=0; \qquad (-7)+7=0; \qquad 1+(-1)=0; \qquad 0+0=0$$

Por ello diremos que -3 *es el simétrico* de 3, pues su suma es el elemento neutro. Análogamente, 7 *es el simétrico* de -7, etc. Cada número entero tiene un simétrico respecto de la suma.

• EJEMPLO 4.2: Consideremos el semigrupo multiplicativo de los números enteros, cuyo elemento neutro es el uno. Como $(-1)\cdot(-1)=1$, diremos que el simétrico de -1 es -1. Análogamente, el simétrico de 1 es 1, pues $1\cdot 1=1$. Ningún otro entero posee simétrico, respecto del producto, pues, por ejemplo,

el simétrico de 3 sería el número entero cuyo producto por 3 fuera 1, y tal número entero no existe.

• EJEMPLO 4.3: Consideremos el conjunto de los números racionales

$$Q=\left\{\ldots, -\frac{7}{2}, \ldots, -\frac{2}{1}, \ldots, 0, \ldots, \frac{1}{1}, \ldots, \frac{4}{3}, \ldots, \frac{13}{5}, \ldots\right\}$$

y observemos que $(Q, +)$ es un semigrupo conmutativo con elemento cero.

Notemos que cada elemento posee simétrico:

$$\frac{7}{2} \text{ es el simétrico de } \left(-\frac{7}{2}\right) \text{ pues } \frac{7}{2}+\left(-\frac{7}{2}\right)=0$$

$$\left(-\frac{6}{5}\right) \text{ es el simétrico de } \frac{6}{5} \text{ pues } \left(-\frac{6}{5}\right)+\frac{6}{5}=0$$

• EJEMPLO 4.4: Dado el conjunto E, consideremos el semigrupo $[\mathcal{P}(E), \cup]$, cuyo elemento neutro es $\emptyset$. Dado un conjunto $A \in \mathcal{P}(E)$, no existe, en general, otra parte de E cuya unión con A sea $\emptyset$. Concretamente, si $A \neq \emptyset$, entonces A no posee simétrico.

• DEFINICIÓN 4.1: *Dado un conjunto C y una operación $*$, entre sus elementos, que posea elemento neutro, e, se llama elemento simétrico del elemento $a \in C$ al elemento $a' \in C$ tal que*

$$a * a' = a' * a = e$$

Cuando la operación $*$ sea conmutativa, bastará escribir

$$a * a' = e$$

ya que entonces

$$a * a' = a' * a$$

Nótese que el simétrico de a se ha designado por a'.

• EJEMPLO 4.5: En el conjunto $E=\{e, a, b\}$ consideremos la operación dada por la tabla de la figura 4.1. (E, T) es un semigrupo conmutativo cuyo ele-

T	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

Figura 4.1

mento neutro es e. Los elementos a y b son simétricos, pues:

$$a \top b = e$$

El simétrico de e es e.

Cuando la operación es la suma, al elemento simétrico se le suele llamar *opuesto*. Así, el opuesto de 4 es -4 en el semigrupo $(Z, +)$. Cuando la operación es el producto, al simétrico se le llama *inverso*. Así, en el ejemplo 4.2 el inverso de 1 es 1 y el inverso de -1 es -1 y los restantes enteros no tienen inverso.

* DEFINICIÓN 4.2: *Si en un conjunto C, no vacío, está definida una operación interna $*$, asociativa, con elemento neutro y tal que cada elemento de C posee un simétrico, diremos que C posee estructura de grupo respecto de $*$, o bien que $(C, *)$ es un grupo.*

* EJEMPLOS: $(Z, +)$ es un grupo, según se ha visto en el ejemplo 4.1.
$(Q, +)$ es un grupo, según se ha visto en el ejemplo 4.3.
$(E, \top)$ es un grupo, según se ha visto en el ejemplo 4.5.
$(Z, \cdot)$ no es grupo, según se vio en el ejemplo 4.2, pues no todos los enteros poseen inverso.

Nótese que un grupo es un semigrupo con elemento neutro, en el que cada elemento posee un simétrico.

* DEFINICIÓN 4.3: *Un grupo $(C, *)$ se dice conmutativo o abeliano si la operación $*$ posee la propiedad conmutativa.*

* EJEMPLO 4.6: El conjunto Q de los números racionales posee estructura de semigrupo respecto del producto. Su elemento neutro es $\frac{1}{1}$. En otras palabras, el semigrupo multiplicativo de los números racionales tiene por elemento unidad el $\frac{1}{1}$. Veamos si este semigrupo es grupo:

el inverso de $\frac{3}{4}$ es $\frac{4}{3}$ pues $\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{1}$

el inverso de $\left(-\frac{5}{8}\right)$ es $\left(-\frac{8}{5}\right)$ pues

$$\left(-\frac{5}{8}\right) \cdot \left(-\frac{8}{5}\right) = \frac{1}{1}$$

pero el número racional cero, es decir $\frac{0}{1}$, no posee inverso, pues no existe ningún número racional que multiplicado por $\frac{0}{1}$ dé $\frac{1}{1}$. Como hay un nú-

mero racional que no tiene inverso, $(Q, \cdot)$ no es grupo. Consideremos el conjunto

$$Q^* = Q - \{0\} = \complement_Q\{0\}$$

de los números racionales, excepto el cero. Es inmediato ver que $(Q^*, \cdot)$ es un grupo. Como el producto de racionales es conmutativo, este grupo es abeliano.

• EJEMPLO 4.7: El conjunto $\mathcal{P}(E)$ es un semigrupo conmutativo respecto de la diferencia simétrica Δ. Su elemento neutro es $\emptyset$. Nótese que cada parte, A, de E, posee un simétrico, el mismo A, por lo que $[\mathcal{P}(E), \Delta]$ es un grupo conmutativo.

EJERCICIOS

4.1 **Comprobar si los conjuntos considerados en el ejercicio 3.1 tienen estructura de grupo, respecto de las operaciones que se indican.**

4.2 **Busque otros ejemplos de grupos.**

4.3 **Considere el conjunto finito $G=\{a, b, c, e\}$ y defina en él una operación $\circ$, mediante una tabla de composición, de modo que $(G, \circ)$ sea un grupo conmutativo, cuyo elemento neutro sea e.**

4.4 **Dado el conjunto $E=\{a, b, c\}$, consideremos el conjunto de las biyecciones de E en E. Teniendo en cuenta la definición 8.1 y el ejercicio 8.1 del § 3 se tiene que el conjunto $\mathcal{P}(E)$ es cerrado respecto de la composición de aplicaciones, es decir, la composición de dos biyecciones es otra biyección. Compruebe que:**

- **a) la composición de biyecciones es asociativa, por lo cual ya estamos ante un semigrupo;**
- **b) la aplicación idéntica, del ejemplo 7.2 del § 3, es el elemento neutro de este semigrupo;**
- **c) cada elemento de este semigrupo posee un simétrico, que es precisamente la correspondencia inversa;**
- **d) el grupo así construido, de las biyecciones de E, es no conmutativo.**

4.5 **Compruebe que en el ejercicio anterior puede sustituirse E por un conjunto arbitrario X, sin que varíe ninguno de aquellos resultados.**

Cabe preguntarse si en un grupo un elemento puede tener varios simétricos, a lo que responde la siguiente

• PROPOSICIÓN 4.1: *En un grupo $(C, *)$ cada elemento posee un único simétrico.*

Demostración: Sea $g \in C$. Supongamos que g' es simétrico del g y que g''

es también simétrico de g. Bastará probar que entonces g' y g'' han de coincidir:

$$\begin{aligned} g'' &= \\ &= e * g'' = && \text{por ser } e \text{ el elemento neutro} \\ &= (g' * g) * g'' = && \text{por ser } g' \text{ simétrico de } g \\ &= g' * (g * g'') = && \text{por asociatividad} \\ &= g' * e = && \text{por ser } g'' \text{ simétrico de } g \\ &= g' && \text{por ser } e \text{ el neutro} \end{aligned}$$

EJERCICIOS

4.6 Repita la demostración anterior para un grupo aditivo, es decir, pruebe que cada elemento de un grupo aditivo posee un único opuesto.

4.7 Pruebe que cada elemento de un grupo multiplicativo tiene un único elemento inverso.

Nótese que la notación, aditiva o multiplicativa, es indiferente. Lo esencial es la estructura de grupo. Por convenio, no se utiliza la notación aditiva para grupos no conmutativos.

5. Subgrupos

• EJEMPLO 5.1: Sea P el subconjunto de Z formado por los enteros pares, es decir, sea

$$P = \{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \ldots\}$$

Observemos que $(P, +)$ es un grupo. Es decir, el conjunto P es un subconjunto de Z y además posee estructura de grupo respecto de la misma operación, $+$, que Z. Por ello decimos que $(P, +)$ *es un subgrupo de* $(Z, +)$.

• EJEMPLO 5.2: Sea $(Q^*, \cdot)$ el grupo multiplicativo de los números racionales, excluido el cero. Consideremos el subconjunto de Q^* siguiente:

$$S = \left\{\frac{1}{1}, -\frac{1}{1}\right\}$$

Observemos que S es cerrado respecto del producto, es decir, que el producto de dos elementos de S es otro elemento de S. Es inmediato verificar que $(S, \cdot)$ es un grupo. Por ello diremos que $(S, \cdot)$ es un subgrupo de $(Q^*, \cdot)$.

• DEFINICIÓN 5.1: *Dado un grupo* $(C, *)$, *si* S *es un subconjunto, no vacío,*

de C, que tiene estructura de grupo respecto de la misma operación $*$, *que C, decimos que* $(S, *)$ *es un subgrupo de* $(C, *)$, o abreviadamente que S es un subgrupo de C.

No todos los subconjuntos son subgrupos. Así, el subconjunto $E=\{0,1\}$ del conjunto Z no es subgrupo de $(Z, +)$, pues $1+1=2 \notin E$, es decir, $+$ no es una ley de composición interna en E, o sea, el conjunto E no es cerrado respecto de la suma.

EJERCICIOS

5.1 Comprobar que el conjunto unitario formado por el elemento neutro de un grupo es un subgrupo respecto de la operación del grupo.

5.2 En el conjunto $A=\{m, n, p, q\}$ se define la operación $\oplus$ mediante la tabla de la figura 5.1. Resuelva las siguientes cuestiones

$\oplus$	m	n	p	q
m	m	n	p	q
n	n	m	q	p
p	p	q	m	n
q	q	p	n	m

Figura 5.1

a) **Compruebe que $(A, \oplus)$ es un grupo. ¿Cuál es su elemento neutro?**
b) **Compruebe que el subconjunto $M=\{m, n\}$ de A es un subgrupo de $(A, \oplus)$. ¿Es $\{p, q\}$ subgrupo? ¿Lo es $\{m, q\}$?**

5.3 Compruebe que el subconjunto $\{\varnothing, E\}$ de $\mathcal{P}(E)$ es subgrupo de $[\mathcal{P}(E), \Delta]$.

5.4 Observemos que el conjunto $C=\{1, -1\}$ posee estructura de grupo respecto del producto, es decir $(C, \cdot)$ es grupo. Por otra parte $C \subset Z$ y se pregunta: ¿es $(C, \cdot)$ un subgrupo de $(Z, +)$?

5.4 Defina los subsemigrupos cambiando la palabra grupo por la palabra semigrupo en la definición 5.1. Busque ejemplos de subsemigrupos, teniendo en cuenta que todo grupo es semigrupo.

5.5 Dado el semigrupo $[\mathcal{P}(E), \cap]$ y supuesto que $F \subset E$ compruebe que $[\mathcal{P}(F), \cap]$ es un subsemigrupo de $[\mathcal{P}(E), \cap]$.

5.6 Compruebe que la intersección de dos subgrupos, de un mismo grupo, es otro subgrupo.

5.7 Comprobar que el conjunto de los enteros que son múltiplos de tres es un subgrupo de $(Z, +)$.

Si se desea profundizar en el estudio de grupos, puede verse el libro: W. LEDERMANN, *Grupos finitos*, ed. Dossat, Madrid.

* EJEMPLO 6.1: Recordemos que $(Z, +)$ es un grupo y, por tanto, un semigrupo. También $(N, +)$ era un semigrupo. Consideremos la aplicación:

$$c : Z \longrightarrow N$$

que asocia a cada número entero su cuadrado. Así:

$c(5)=25$ lo que se lee *cuadrado de 5 igual a 25*

Del mismo modo:

$$c(-2)=4; \quad c(6)=36; \quad c(0)=0; \quad c(-1)=1; \quad \ldots$$

Consideremos dos elementos del conjunto de partida de la aplicación anterior. Sean, por ejemplo, 2 y 3. Sumémoslos, en primer lugar:

$$2+3=5$$

y, en segundo lugar, pasemos de este resultado a su imagen en la aplicación c:

$$c(2+3)=c(5)=25$$

Ahora, por el contrario, comencemos pasando de los números 2 y 3 a sus imágenes en la aplicación c:

$$c(2)=4; \qquad c(3)=9$$

y, a continuación, sumemos dichas imágenes:

$$c(2)+c(3)=4+9=13$$

Se observa que si sumamos 2 y 3 y después pasamos a la imagen en c, obtenemos el resultado 25, distinto del resultado 13, obtenido si, al contrario, en primer lugar pasamos a las imágenes de 2 y 3 en la aplicación c y después sumamos dichas imágenes. En la figura 6.1 se esquematiza esta conclusión:

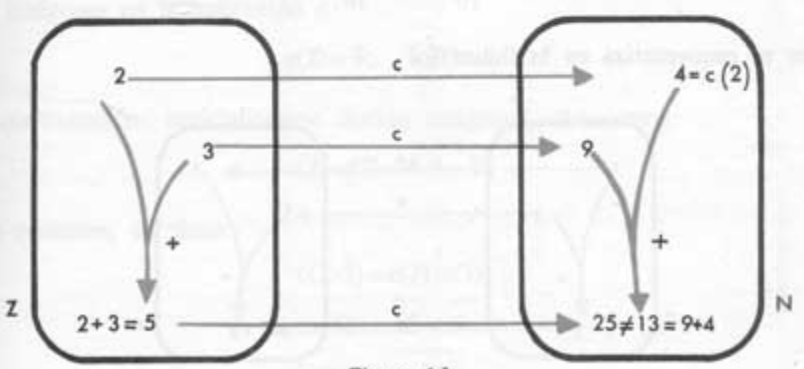


Figura 6.1

Resumiendo, se tiene que:

$$\underbrace{c(2+3)}_{\underbrace{c(5)}_{25}} \neq \underbrace{\underbrace{c(2)}_{4} + \underbrace{c(3)}_{9}}_{13}$$

es decir, si sumamos y después elevamos al cuadrado el resultado, se obtiene un número distinto del que se obtiene si elevamos al cuadrado ambos números y después se suman los resultados. Esta conclusión ya era conocida, pues se sabe que

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

es decir:

$$(a+b)^2 \neq a^2 + b^2$$

• EJEMPLO 6.2: Ya sabemos que $(Z, +)$ es un semigrupo. Por otra parte, del ejemplo 5.1 se deduce que $(P, +)$ es también semigrupo. Consideremos la aplicación

$$d: Z \longrightarrow P$$

que asocia a cada entero su doble. Así:

$d(3)=6$ que se lee *doble de* 3 *igual a* 6

Análogamente

$$d(4)=8; \quad d(5)=10; \quad d(-2)=-4; \quad d(1)=2; \quad d(0)=0$$

Dados dos elementos, 2 y 3, del conjunto de partida, Z, de la aplicación d, si se realiza el mismo proceso del ejemplo 6.1, se tiene:

$$\underbrace{d(2+3)}_{\underbrace{d(5)}_{10}} = \underbrace{\underbrace{d(2)}_{4} + \underbrace{d(3)}_{6}}_{10}$$

lo que se esquematiza en la figura 6.2

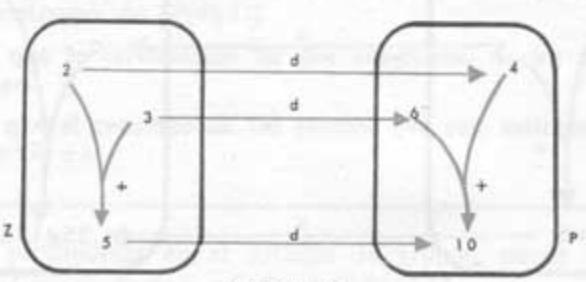


Figura 6.2

es decir, si sumamos los números 2 y 3 y después pasamos al doble, se obtiene el mismo resultado que si pasamos al doble de los números 2 y 3 y luego sumamos. Si sustituimos 2 y 3 por dos enteros cualesquiera, a y b, el resultado anterior sigue siendo cierto, es decir, se verifica

$$\boxed{d(a+b)=d(a)+d(b)}$$

ya que

$$d(a+b)=2(a+b)=2a+2b=d(a)+d(b)$$

Por ello diremos que *la aplicación* $d:Z \longrightarrow P$ *es un homomorfismo de* $(Z, +)$ *en* $(P, +)$.

En cambio, la aplicación $c:Z \longrightarrow N$ del ejemplo 6.1 no era homomorfismo, ya que

$$c(2+3) \neq c(2)+c(3)$$

según vimos.

* EJEMPLO 6.3: Dado el semigrupo multiplicativo de los números naturales, es decir, el semigrupo $(N, \cdot)$, consideremos la aplicación:

$$c:N \longrightarrow N$$

consistente en elevar al cuadrado. Así:

$$c(2)=4; \quad c(3)=9; \quad c(1)=1; \quad c(0)=0; \quad \ldots$$

Consideremos, en particular, los números 3 y 2. Multipliquémoslos:

$$2\cdot 3=6$$

y después pasemos de 6 a su imagen en c:

$$c(6)=36$$

Si ahora, por el contrario, pasamos, en primer lugar, de los números 2 y 3 a sus imágenes en la aplicación c:

$$c(2)=4; \quad c(3)=9$$

y, a continuación, multiplicamos dichas imágenes, obtenemos:

$$c(2)\cdot c(3)=4\cdot 9=36$$

En resumen, se tiene:

$$\begin{array}{ccc} c(2\cdot 3) & = & c(2)\cdot c(3) \\ \overbrace{\quad}^{} & & \overbrace{\quad}^{} \\ c(6) & & 4 \cdot 9 \\ \underbrace{\quad}_{} & & \underbrace{\quad}_{} \\ 36 & & 36 \end{array}$$

y, en general, si se sustituyen 2 y 3 por dos naturales cualesquiera, a y b, se verifica:

$$c(a \cdot b) = c(a) \cdot c(b)$$

por lo que *la aplicación* $c: N \longrightarrow N$ *es un homomorfismo de* $(N, \cdot)$ *en* $(N, \cdot)$; lo que, en este caso, es tanto como decir que el cuadrado del producto de dos números naturales es igual al producto de sus cuadrados.

EJERCICIOS

6.1 Pruebe la última expresión escrita.

6.2 Construya un esquema similar al de la figura 6.2, pero que se adapte al caso del ejemplo 6.3.

• EJEMPLO 6.4: Consideremos el semigrupo aditivo de los números naturales, no nulos, es decir, el semigrupo $(N^*, +)$. Sea P el conjunto de los enteros pares. Es inmediato verificar que P es un semigrupo multiplicativo, es decir, que $(P, \cdot)$ es un semigrupo. Sea la aplicación:

$$e: N^* \longrightarrow P$$

distinto de 0

que asocia a cada número natural n el número par 2^n. Así:

$$e(3) = 2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8; \quad e(4) = 2^4 = 16; \quad e(1) = 2^1 = 2;$$
$$e(0) = 2^0 = 1; \quad \ldots$$

Consideremos, en particular, los números 4 y 3. Sumándolos tenemos:

$$4 + 3 = 7$$

Pasemos ahora de 7 a su imagen en e:

$$e(7) = 2^7 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 128$$

Si ahora, por el contrario, pasamos, en primer lugar, de los números 4 y 3 a sus imágenes en e:

$$e(4) = 16; \qquad e(3) = 8$$

y a continuación multiplicamos dichas imágenes, se obtiene también

$$16 \cdot 8 = 128$$

En resumen, se tiene:

$$e(4+3)=e(4)\cdot e(3)$$
$$e(7)\quad 16\cdot 8$$
$$128\quad 128$$

lo que se esquematiza en la figura 6.3.

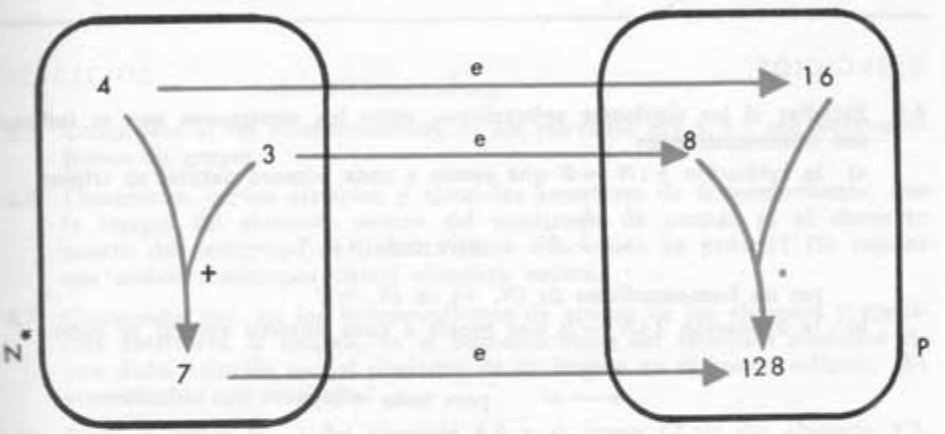


Figura 6.3

En general, si sustituimos 2 y 3 por dos números naturales cualesquiera, a y b, se tendrá

$$e(a+b)=e(a)\cdot e(b)$$

EJERCICIO

6.3 Pruebe que este resultado sigue del ejercicio 2.6 del § 5.

El resultado anterior se prueba diciendo que *la aplicación* $e: N^* \longrightarrow P$ del ejemplo 6.4 *es un homomorfismo de* $(N^*, +)$ *en* $(P, \cdot)$.

* DEFINICIÓN 6.1: *Dados dos semigrupos*

$$(C, *) \quad \text{y} \quad (E, \oplus)$$

diremos que una aplicación

$$h : C \longrightarrow E$$

es un homomorfismo de $(C, *)$ *en* $(E, \oplus)$, *si se verifica*

$$h(a * b) = h(a) \oplus h(b)$$

cualesquiera que sean los elementos a *y* b, *pertenecientes a* C.

EJERCICIOS

6.4 **Estudiar si las siguientes aplicaciones, entre los semigrupos que se indican, son homomorfismos:**

a) la aplicación $h : N \longrightarrow N$ **que asocia a cada número natural su triplo:**

$$n \overset{h}{\longrightarrow} 3n \qquad \text{para todo } n \in N$$

¿es un homomorfismo de $(N, +)$ **en** $(N, +)$**?**

b) la aplicación $f : N \longrightarrow N$ **que asocia a cada número natural su cubo:**

$$n \overset{f}{\longrightarrow} n^3 \qquad \text{para todo } n \in N$$

¿es un homomorfismo de $(N, +)$ **en** $(N, \cdot)$**?**

c) la aplicación $g : N \longrightarrow N$ **que asocia a cada número natural su cubo:**

$$n \overset{g}{\longrightarrow} n^3 \qquad \text{para todo } n \in N$$

¿es un homomorfismo de $(N, \cdot)$ **en** $(N, \cdot)$**?**

6.5 **Sea un conjunto cualquiera** E. **Sabemos que el conjunto** $\mathcal{P}(E)$, **de las partes de** E, **tiene estructura de semigrupo respecto de la operación unión y respecto de la operación intersección también. Probar que la aplicación:**

$$c : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E)$$

que asocia a cada parte de E **su complemento en** E**:**

$$A \overset{c}{\longrightarrow} \complement_E A$$

es un homomorfismo del semigrupo $[\mathcal{P}(E), \cup]$ **en el semigrupo** $[\mathcal{P}(E), \cap]$. **Ayúdese del enunciado del ejercicio 9.5 del § 2 para ello.**

6.6 **Si la aplicación** $h : G \longrightarrow G'$ **es un homomorfismo del semigrupo** $(G, +)$ **en el semigrupo** $(G', +)$ **y se verifica que:**

la imagen del elemento $a \in G$ **es el elemento** $a' \in G'$ **y**
la imagen del elemento $b \in G$ **es el elemento** $b' \in G'$,

¿cuál es entonces la imagen del elemento $a+b$**?**

En la definición 6.1 se puede sustituir la palabra *semigrupo* por la palabra grupo, con lo que se tienen definidos los homomorfismos de grupos.

* EJEMPLOS: En el ejemplo 6.2 el semigrupo $(Z, +)$ es grupo. También lo es el $(P, +)$. Por tanto, la aplicación $d: Z \longrightarrow P$, allí definida, es un homomorfismo del grupo $(Z, +)$ en el grupo $(P, +)$. En cambio, el homomorfismo del ejemplo 6.3 no es un homomorfismo de grupos, sino solamente de semigrupos, ya que el semigrupo $(N, \cdot)$ no es grupo.

EJERCICIOS

6.7 Comprobar si los homomorfismos de los ejercicios 6.4 y 6.5 son homomorfismos de grupos.

6.8 Compruebe, en los ejemplos y ejercicios anteriores de homomorfismos, que la imagen del elemento neutro del semigrupo de partida es el elemento neutro del semigrupo de llegada. ¿Será esto cierto en general? (Se supone que ambos semigrupos tienen elemento neutro.)

6.9 Compruebe que, en los homomorfismos de grupos de los ejemplos y ejercicios anteriores, la imagen, en el homomorfismo del elemento simétrico de uno dado, coincide con el simétrico de su imagen en el homomorfismo. ¿Es generalizable este resultado?

6.10 Dado el grupo $(C, \cdot)$ del ejercicio 5.4 y el grupo $(A, \oplus)$ del ejercicio 5.2, comprobar que la aplicación

$$h : C \to A$$

dada por

$$h(1)=m; \qquad h(-1)=n$$

es un homomorfismo del grupo $(C, \cdot)$ en $(A, \oplus)$.

6.11 Dado el homomorfismo

$$f : A \to B$$

de $(A, +)$ en $(B, +)$ y el homomorfismo

$$g : B \to C$$

de $(B, +)$ en $(C, +)$, comprobar que la aplicación compuesta

$$gf : A \to C$$

es también un homomorfismo, de $(A, +)$ en $(C, +)$.

---

* DEFINICIÓN 6.2: *Los homomorfismos que, a su vez, son biyecciones se llaman isomorfismos.*

• EJEMPLOS: El homomorfismo del ejemplo 6.2 es una aplicación biyectiva, por lo que es un isomorfismo. En cambio, el homomorfismo del ejemplo 6.3 no es biyección, por no ser suprayección. Por ello este homomorfismo no es isomorfismo.

EJERCICIOS

6.12 Compruebe si los homomorfismos de los ejercicios anteriores son isomorfismos.

6.13 Interprete el siguiente esquema de la figura 6.4.

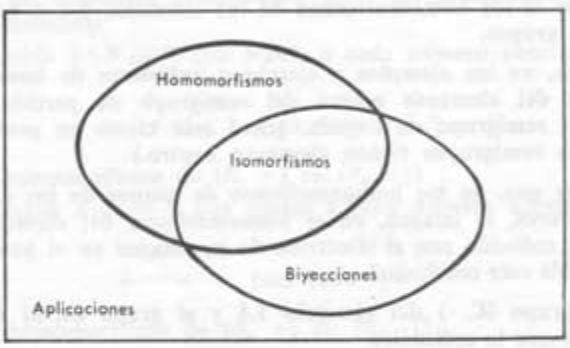


Figura 6.4

6.14 Pruebe que la aplicación compuesta de dos isomorfismos es otro isomorfismo. Utilice para ello los resultados del ejercicio 8.1 del § 3 y del ejercicio 6.11 de este párrafo.

6.15 Compruebe que la correspondencia inversa de un isomorfismo es otro isomorfismo. Para ello haga uso del ejercicio 7.1 del § 3.

7. Propiedad distributiva

• EJEMPLO 7.1: Consideremos el conjunto N de los números naturales. Elijamos tres de ellos: 2, 3 y 5, por ejemplo. Se verifica:

$$\underbrace{2\cdot(3+5)}_{2\cdot 8}=\underbrace{(2\cdot 3)}_{6}+\underbrace{(2\cdot 5)}_{10}$$

$$\underbrace{16}_{}\qquad\underbrace{6+10}_{16}$$

Sustituyendo 2, 3 y 5 por tres números naturales cualesquiera, a, b y c,

también se verifica:

$$\boxed{a\cdot(b+c)=(a\cdot b)+(a\cdot c)}$$

Esta propiedad, en que intervienen la suma y el producto, se llama *propiedad distributiva del producto respecto de la suma de números naturales.*

* EJEMPLO 7.2: Si en la expresión anterior sustituimos las letras minúsculas, que representaban números naturales, por letras mayúsculas, que representen conjuntos, y además sustituimos el signo · por el signo $\cap$ y el signo + por el signo $\cup$, obtenemos la expresión:

$$\begin{array}{c} a\cdot(b+c)=(a\cdot b)+(a\cdot c) \\ \downarrow\downarrow\ \downarrow\ \downarrow\downarrow\quad\downarrow\downarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow\downarrow\ \downarrow\downarrow \\ A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C) \end{array}$$

que, por tanto, expresa *la propiedad distributiva de la intersección respecto de la unión* conjuntista. Esta propiedad ya fue estudiada en el § 2.

* DEFINICIÓN 7.1: *Sea un conjunto C en el que están definidas dos operaciones, que representaremos por $*$ y $\oplus$. Supongamos que la operación $*$ es conmutativa. Diremos que la operación $*$ es distributiva respecto de la operación $\oplus$, en el conjunto C, si se verifica:*

$$a*(b\oplus c)=(a*b)\oplus(a*c)$$

cualesquiera que sean los elementos a, b y c, pertenecientes al conjunto C.

Nota: Si la operación $*$ no fuera conmutativa, no se verificaría, en general:

$$a*d=d*a$$

y, por tanto, no sería cierto, en general, que

$$a*(b\oplus c)=(b\oplus c)*a$$

y tendríamos que enunciar la propiedad distributiva de $*$ respecto de $\oplus$ mediante las dos condiciones:

$$a*(b\oplus c)=(a*b)\oplus(a*c)$$
$$(b\oplus c)*a=(b*a)\oplus(c*a)$$

es decir, no bastaría con la primera de estas relaciones. Cuando solamente se verifica la primera de estas relaciones se dice que *la operación $*$ es distributiva por la izquierda respecto de la operación $\oplus$*, y cuando sólo se verifica la segunda se dice que *la operación $*$ es distributiva por la derecha respecto de la operación $\oplus$.*

* OTROS EJEMPLOS: En el conjunto Z de los números enteros el producto es

distributivo respecto de la sustracción, es decir, se verifica:

$$a\cdot(b-c)=(a\cdot b)-(a\cdot c)$$

cualesquiera que sean los números enteros a, b y c. En cambio, en el mismo conjunto Z, la sustracción no es distributiva respecto del producto, pues:

$$\underbrace{7-(3\cdot 2)}_{1}\neq\underbrace{(7-3)\cdot(7-2)}_{20}$$

Nótese que así como en las propiedades conmutativa, asociativa, etc., sólo intervenía una operación, en cambio, en la distributiva intervienen dos operaciones.

Convenio: Dados los números a, b, c y d, la expresión:

$$(a\cdot b)+(c\cdot d)$$

suele escribirse abreviadamente en la forma:

$$a\cdot b+c\cdot d$$

En otras palabras, convenimos en que:

$$a\cdot b+c\cdot d$$

signifique

$$(a\cdot b)+(c\cdot d)$$

lo que se puede expresar diciendo que *el producto tiene prioridad frente a la suma de números.*

EJERCICIOS

7.1 Compruebe que

$$(2\cdot 7)+(3\cdot 5)\neq 2\cdot(7+3)\cdot 5$$

Cuando vea escrito $2\cdot 7+3\cdot 5$, ¿debe interpretar el primero o el segundo miembro de la desigualdad anterior?

7.2 Dada la expresión

$$A\cap B\cup A\cap C$$

donde A, B y C son conjuntos, compruebe, con un diagrama de Venn o con conjuntos finitos (de letras) que se obtienen distintos resultados, en general, según demos prioridad a la unión respecto de la intersección o, por el contrario, se dé prioridad a la intersección respecto de la unión.

Por tanto, la expresión anterior no tiene sentido, puesto que no se ha convenido en dar prioridad a la unión frente a la intersección, o al revés.

7.3 Teniendo en cuenta que también se conviene en que el producto tiene prioridad frente a la diferencia, calcule:

$$7\cdot 5-7\cdot 3$$

7.4 Teniendo en cuenta el convenio anterior, escriba la propiedad distributiva del ejemplo 7.1 sin paréntesis en el segundo miembro de la expresión del citado ejemplo.

7.5 Supongamos en un conjunto A definidas dos operaciones internas, que representaremos por los signos $\circ$ y $\perp$, la primera de las cuales es conmutativa. Escriba la propiedad distributiva de la operación $\circ$ respecto de la operación $\perp$.

7.6 Compruebe si son distributivas las operaciones que se indican en los casos siguientes:

a) unión respecto de la intersección en el conjunto de las partes de un conjunto (véase § 2);
b) suma respecto del producto de números naturales;
c) unión respecto de la diferencia en el conjunto de partes de un conjunto;
d) suma respecto de la diferencia de enteros.

7.7 Compruebe que la potenciación es distributiva por la derecha respecto del producto de naturales. Para ello encontrará facilidad si escribe $a \otimes n$ para representar a^n y tiene en cuenta el ejercicio 2.11, ¿es cierta la distributividad por la izquierda?

7.8 Resuelva las mismas cuestiones del ejercicio anterior para la división respecto de la suma de naturales, para números tales que sea posible efectuar la divisiones indicadas, pues la división no es una operación interna en N.

7.9 Compruebe que

$$A \cap (B-C)=(A \cap B)-(A \cap C)$$

utilizando diagramas de Venn o conjuntos finitos. Demuéstrela. ¿Cómo llamará a esta propiedad?

7.10 Compruebe que la intersección es distributiva respecto de la diferencia simétrica, es decir que

$$A \cap (B \triangle C)=(A \cap B) \triangle (A \cap C)$$

utilizando diagramas de Venn o conjuntos finitos.

7.11 Demuestre la expresión del ejercicio anterior, teniendo en cuenta el ejercicio 7.9 y el ejemplo 7.2.

8. Anillos y cuerpos

• EJEMPLO 8.1: Ya hemos visto que el conjunto Z de los números enteros es un grupo aditivo conmutativo. Por otra parte, Z es un semigrupo multiplicativo y además el producto es distributivo respecto de la suma, en el

conjunto Z. Por todo ello, diremos que Z *tiene estructura de anillo respecto de la suma y el producto.* Abreviadamente: como se verifica que

$$\begin{cases} a) & (Z, +) \text{ es un grupo conmutativo} \\ b) & (Z, \cdot) \text{ es un semigrupo, y} \\ c) & \cdot \text{ es un distributivo respecto de } + \text{ en } Z, \end{cases}$$

decimos que

$$(Z, +, \cdot) \textit{ es un anillo}$$

o bien que Z posee estructura de anillo respecto de $+$ y $\cdot$.

• EJEMPLO 8.2: Dado el conjunto arbitrario E, el conjunto $\mathcal{P}(E)$, de las partes de E, tiene estructura de grupo conmutativo respecto de la operación diferencia simétrica, según vimos en el ejemplo 4.7; por otra parte, el conjunto $\mathcal{P}(E)$ posee estructura de semigrupo respecto de la operación intersección, según vimos en el ejemplo 3.2. Además, la operación intersección es distributiva respecto de la diferencia simétrica, según se ha visto en los ejercicios 7.10 y 7.11. Por todo ello, diremos que el conjunto $\mathcal{P}(E)$ *posee estructura de anillo respecto de las operaciones diferencia simétrica e intersección.* Abreviadamente, como se verifica

$$\begin{cases} a) & [\mathcal{P}(E), \Delta] \text{ es un grupo conmutativo,} \\ b) & [\mathcal{P}(E), \cap] \text{ es un semigrupo,} \\ c) & \cap \text{ es distributiva respecto de } \Delta \text{ en } \mathcal{P}(E), \end{cases}$$

decimos que

$$[\mathcal{P}(E), \Delta, \cap] \textit{ es un anillo}$$

o bien que $\mathcal{P}(E)$ tiene estructura de anillo respecto de la diferencia simétrica y la intersección.

• DEFINICIÓN 8.1: *Sea un conjunto A en el que están definidas dos operaciones, $*$ y $\oplus$, tales que $(A, \oplus)$ sea un grupo conmutativo y $(A, *)$ sea un semigrupo. Si, además, la operación $*$ es distributiva respecto de la operación $\oplus$ se dice que $(A, \oplus, *)$ es un anillo, o bien que A posee estructura de anillo respecto de las operaciones $\oplus$ y $*$.*

Nótese que para poder decir que $(A, \oplus, *)$ es un anillo exigimos que A tenga estructura de grupo conmutativo respecto de la primera de las operaciones, $\oplus$, indicadas en el paréntesis $(A, \oplus, *)$ y de semigrupo respecto de la segunda de las operaciones, $*$, allí indicadas, además de la propiedad distributiva de $*$ respecto de $\oplus$.

Habitualmente se utilizan los signos $+$ y $\cdot$ para designar las dos operaciones del anillo, como se ha hecho en el anillo $(Z, +, \cdot)$ del ejemplo 8.1, es decir, reservando el signo $+$ para la operación respecto de la cual el con-

unto dado posee estructura de grupo conmutativo y el signo · para la otra operación.

Un anillo es, por tanto, una *estructura algebraica respecto de dos operaciones*, así como un grupo es una estructura algebraica respecto de una sola operación.

EJERCICIO

8.1 Estudiar si los siguientes conjuntos tienen estructura de anillo respecto de las operaciones que se indican:

a) **$(N, +, \cdot)$, donde N representa a los naturales;**
b) **$(Z[x], +, \cdot)$, donde $Z[x]$ es el conjunto de los polinomios en una indeterminada, x, y con coeficientes enteros y donde $+$ y $\cdot$ son la suma y el producto habituales de polinomios;**
c) **$[\mathcal{P}(E), \cup, \cap]$, donde $\mathcal{P}(E)$ es el conjunto de las partes del conjunto E;**
d) **$(P, +, \cdot)$, donde P es el conjunto de los números enteros pares considerado en el ejemplo 5.1;**
e) **$(Z, \cdot, +)$, donde el orden de las operaciones $+$ y $\cdot$ está cambiado respecto del ejemplo 8.1.**

• DEFINICIÓN 8.2: *El anillo $(A, +, \cdot)$ se llama conmutativo si la operación $\cdot$ es conmutativa.*

EJERCICIO

8.2 Observe si los anillos de los ejemplos y ejercicios anteriores son conmutativos.

• DEFINICIÓN 8.3: *El anillo $(A, +, \cdot)$ se dice con elemento unidad si la operación $\cdot$ posee elemento neutro,* es decir, elemento unidad, ya que cuando a la operación se le llama producto, al elemento neutro se le llama elemento unidad, según vimos en el párrafo de semigrupos.

EJERCICIOS

8.3 Observe si los anillos de los ejemplos y ejercicios anteriores son anillos con elementos unidad.

8.4 Compruebe que el conjunto $C=\{e, a, b\}$ tiene estructura de anillo respecto de las operaciones $+$ y $\cdot$ dadas por las tablas:

$+$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

$\cdot$	e	a	b
e	e	e	e
a	e	a	b
b	e	b	a

¿Es un anillo conmutativo? ¿Tiene elemento unidad?

8.5 Compruebe que el elemento cero es distinto del elemento unidad, en todos los casos anteriores de anillo con elemento unidad.

• EJEMPLO 8.3: En el ejemplo 4.3 se ha visto que el conjunto Q de los números racionales posee estructura de grupo respecto de la operación suma, siendo abeliano o conmutativo este grupo. Además, Q es un semigrupo multiplicativo cuyo elemento unidad (o neutro) es $\frac{1}{1}$. Por otra parte, el producto de números racionales es distributivo respecto de la suma. Por todo ello, $(Q, +, \cdot)$ es un anillo con elemento unidad. Pero además, cada elemento de Q, excepto el cero (neutro de la suma), posee un inverso, según se vio en el ejemplo 4.6. Por ello diremos que el anillo $(Q, +, \cdot)$ es un *cuerpo.*

• DEFINICIÓN 8.4: *Diremos que el anillo con elemento unidad $(C, +, \cdot)$ es un cuerpo, si todos los elementos de C, excepto el cero, tienen inverso.*

El anillo $(Z, +, \cdot)$ del ejemplo 8.1 no es un cuerpo, pues sólo tienen inverso los enteros 1 y -1, según se vio en el ejemplo 4.2.

EJERCICIOS

8.6 Comprobar si los anillos estudiados anteriormente son cuerpos.

8.7 Defina lo que es un cuerpo conmutativo y ponga un ejemplo.

8.8 Comprobar que si $(C, +, \cdot)$ es un cuerpo, el conjunto C^* formado por los elementos de C, excluido el cero, es grupo respecto de la operación $\cdot$

Recordemos que, dados los grupos

$$(G, +) \quad \text{y} \quad (G', +)$$

una aplicación

$$h: G \longrightarrow G'$$

se llamaba homomorfismo si

$$h(a+b)=h(a)+h(b)$$

cualesquiera que sean los elementos a y b, pertenecientes a G. Pero los grupos eran estructuras algebraicas respecto de una sola operación (que en este caso hemos designado por $+$). En cambio, los anillos son estructuras respecto de dos operaciones, que suelen designarse por los signos $+$ y $\cdot$, según ya se ha indicado anteriormente. De aquí la siguiente definición:

* DEFINICIÓN 8.5: *Dados los anillos*

$$(A,\ +,\ \cdot) \qquad \text{y} \qquad (A',\ +,\ \cdot)$$

diremos que la aplicación

$$h: A \longrightarrow A'$$

es un homomorfismo de anillos si verifica las dos condiciones siguientes

$$h(a+b)=h(a)+h(b)$$
$$h(a\cdot b)=h(a)\cdot h(b)$$

cualesquiera que sean los elementos a y b, pertenecientes a A.

* EJEMPLO 8.4: Dados los anillos $(P, +, \cdot)$, del ejercicio 8.1 *d)*, y $(Z, +, \cdot)$, del ejemplo 8.1, la aplicación identidad

$$i: P \longrightarrow Z$$

del ejemplo 7.2 del § 3, que asocia a cada entero par, p, el mismo número p, es un homomorfismo de anillos.

EJERCICIOS

8.9 **Observe que $P \subset Z$, por lo que se dice que $(P, +, \cdot)$ es un subanillo de $(Z, +, \cdot)$. Generalice la definición de subanillo, basándose en este ejemplo y en la definición 5.1.**

8.10 **Defina un subcuerpo.**

8.11 **Comprobar si los siguientes subconjuntos de Z son subanillos de $(Z, +, \cdot)$:**

a) los enteros que son múltiplos de 5;
b) los enteros impares;
c) los naturales;
d) los enteros que son múltiplos de un entero dado z.

8.12 **Comprobar si la aplicación de Z en Q, que asocia a cada entero a el número racional $\frac{a}{1}$, es un homomorfismo del anillo $(Z, +, \cdot)$ en el anillo $(Q, +, \cdot)$.**

Si se desea ampliar esta introducción al estudio de estructuras algebraicas, puede consultarse el libro:
A. LENTIN y J. RIVAUD, *Lecciones de Algebra Moderna*, Ed. Aguilar.

6 EL EDIFICIO MATEMATICO

1. Métodos utilizados en la Matemática

La Matemática comenzó siendo experimental, lo mismo que las demás Ciencias. Pero el hombre no se conforma con observar los hechos que presenta la vida e intenta predecir resultados de experiencias imaginadas, es decir, el hombre intuye.

La importancia de la intuición en el proceso de matematización es fundamental. No obstante, las posibilidades de la intuición son limitadas. La intuición no basta para predecir ciertos resultados. Otras veces la intuición nos engaña de manera sorprendente. Existen numerosos ejemplos curiosos que muestran cómo puede engañarnos la intuición. También existen ejemplos que muestran la impotencia de la intuición para predecir ciertos resultados.

Por ello, hoy la Matemática es una Ciencia deductiva, que *utiliza los métodos de la Lógica* para organizar y sistematizar los resultados obtenidos mediante la experiencia y la intuición.

Demostrar o deducir una afirmación es establecerla como consecuencia de afirmaciones anteriores. Estas afirmaciones se establecen, a su vez, como consecuencia de otras afirmaciones anteriores en el proceso deductivo. Así llegaríamos a unas afirmaciones primarias, que no es posible deducir a partir de otras más sencillas. Estas afirmaciones primarias se llaman *axiomas* y las otras afirmaciones, que se deducen a partir de ellas, son los *teoremas*.

La primera exposición deductiva de la Matemática fue hecha por el griego EUCLIDES en sus famosos *Elementos* hace veintitrés siglos.

La primera formulación y fundamentación de la Matemática actual se debe al matemático alemán DAVID HILBERT (1862-1943).

De lo dicho anteriormente se desprende que una afirmación, de una cierta teoría, se considera como verdadera cuando se puede demostrar a partir de los axiomas, o de teoremas deducidos previamente a partir de esos axiomas.

No podemos decir que una afirmación sea verdadera o falsa si no precisamos a qué teoría nos referimos. Una misma afirmación puede ser verdadera en una teoría y falsa en otra.

Consideremos un ejemplo, ya clásico, que aclarará esta idea. Uno de los axiomas de la Geometría plana euclidea dice: *dada una recta y un punto exterior, existe una única recta que pasa por el punto dado y no corta a la recta dada.* Una imagen intuitiva de esta Geometría la tenemos en el plano ordinario. Si se conservan todos los demás axiomas de esta Geometría y se cambia únicamente el que acaba de enunciarse por este otro axioma, *dada una recta y un punto exterior, no existe ninguna recta que pase por el punto dado y no corte a la recta dada,* se obtiene así otra Geometría, llamada Geometría de Riemann. Una imagen intuitiva de esta Geometría la encontramos en la superficie esférica, llamando rectas a sus circunferencias máximas, es decir, a las circunferencias cuyo radio es el de la superficie esférica. Consideremos ahora la afirmación *dada una recta r y un punto P, por el punto P puede trazarse una única recta x, que sea perpendicular a la recta r.* Se puede demostrar que esta afirmación es cierta para la Geometría plana euclidea (lo que se visualiza en la figura 2.1), pero es falsa para la Geometría de Riemann. Basta, para darse cuenta de ello, considerar uno de los puntos, R, en que la recta perpendicular al plano de la circunferencia máxima r, trazada por el centro de dicha circunferencia, corta a la superficie esférica (figura 2.2). Por el punto R pasan infinitas circunferencias, x, x', x'', ..., todas ellas máximas y perpendiculares a la circunferencia máxima dada r.

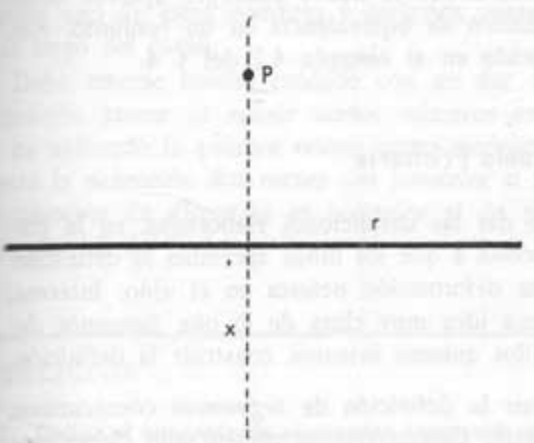


Figura 2.1

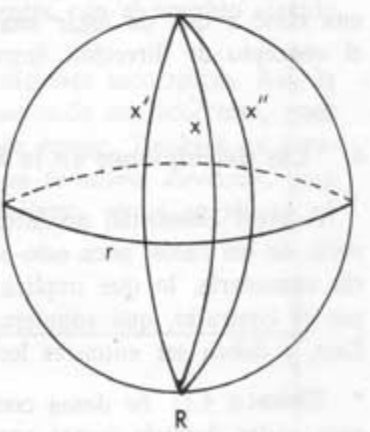


Figura 2.2

Por tanto, no puede decirse que una afirmación sea verdadera o falsa, de modo absoluto, sino referida a una cierta teoría.

El lector interesado en Lógica Matemática puede consultar, entre otros, el libro: D. HILBERT y W. ACKERMANN, *Elementos de Lógica Teórica*, Ed. Tecnos, Madrid, 1962.

3. Ideas primeras y definiciones: clases

En los diccionarios hay que admitir algunas palabras, a partir de las cuales se definen las demás. Análogamente, en la Matemática hemos de admitir, sin definición, algunas ideas primarias y, a partir de ellas, definir otras más complicadas.

Por ejemplo, en el § 2 hemos admitido como primaria la idea de conjunto. Allí dijimos que *la idea de conjunto aparece intuitivamente como colección de objetos*, sin que esto sea una definición, pues la palabra *colección* ha sido utilizada como sinónimo de *conjunto*. Esta frase sólo ha permitido quizás ayudar a captar la idea primaria de conjunto que se deseaba introducir.

En Geometría, *el punto, la recta* y *el plano* se aceptan sin definición, es decir, se aceptan como conceptos primarios, a partir de los cuales se definen los demás.

En Matemática se utilizan dos tipos de definiciones:

a) *Definiciones explícitas*, donde el nuevo concepto aparece como caso particular de otro concepto introducido anteriormente, al que añadimos una, o varias, condiciones adicionales. Así, el concepto de inyección, introducido en la definición 6.2 del § 3, aparece como caso particular de otro concepto establecido anteriormente, el de aplicación, e imponiendo una nueva condición, la de que el conjunto original de cada elemento del conjunto de llegada sea unitario o vacío.

b) *Definiciones por abstracción*, donde el nuevo concepto aparece como una clase a que da lugar una relación de equivalencia en un conjunto. Así, el concepto de dirección, introducido en el ejemplo 4.2 del § 4.

4. Las definiciones en la Escuela Primaria

A nivel elemental, no interesa dar las definiciones elaboradas, en la mayoría de los casos, pues esto se presta a que los niños aprendan la definición sin entenderla, lo que implica una deformación nefasta en el niño. Interesa, por el contrario, que adquieran una idea muy clara de lo que deseamos definir, y deben ser entonces los niños quienes intenten construir la definición.

• EJEMPLO 4.1: Se desea construir la definición de *segmentos consecutivos*, para poder después sumar segmentos. Comenzaremos presentando claramente la idea de segmentos consecutivos. Estaremos seguros de que han captado

la idea cuando al pedirles que dibujen dos segmentos consecutivos lo hagan como en el caso de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ de la figura 4.1. También se puede llegar a la misma idea manejando *regletas* (materialización del concepto de segmento). Una vez adquirida la idea se puede intentar una definición. Si contestan que *dos segmentos consecutivos son los que tienen un punto común*, puede hacerse notar que los segmentos $\overline{MN}$ y $\overline{PQ}$ de la figura 4.1 verifican

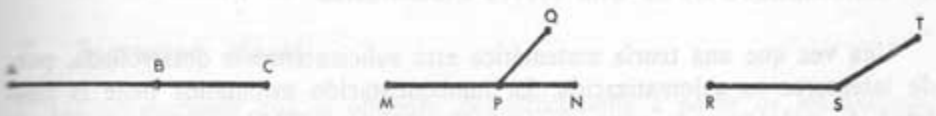


Figura 4.1

esa condición. Si, en otro intento, contestan que *dos segmentos son consecutivos si tienen un extremo común*, puede presentarse el caso de los segmentos $\overline{RS}$ y $\overline{ST}$ de la figura 4.1. Y así continuaríamos intentando mejorar la definición.

Conviene tener presente que el tiempo empleado de este modo no se pierde. Al contrario, este proceso de elaboración de definiciones sencillas por parte del niño es altamente formativo.

En cambio, muchas veces es inútil que aprendan definiciones, si éstas les resultan difíciles y la idea, que es lo importante, está adquirida.

No interesa dar excesivas definiciones seguidas, abusando de la memorización. Sólo interesa dar palabras nuevas, cuando se vayan a utilizar el suficiente número de veces como para que justifique tal introducción de nuevos vocablos.

Se habrá notado la abundancia de sinónimos en lo que hasta ahora se ha estudiado. Por ejemplo, en el § 3, a las aplicaciones biyectivas se les llama también biyecciones e incluso correspondencias biunívocas. Al niño sólo daríamos uno de estos nombres y seríamos consecuentes con el vocablo elegido a lo largo del curso.

Debe tenerse mucho cuidado con no dar definiciones incorrectas. Así, la definición *sumar es reunir varios números en uno solo* es incorrecta, pues se ha utilizado la palabra *reunir* como sinónimo de *sumar*. También es incorrecta la definición *dos rectas son paralelas si tienen la misma dirección*, pues el concepto de dirección es posterior al de paralelismo, según se vio en el ejemplo 4.2 del § 4.

EJERCICIOS

4.1 Defina el concepto de segmentos consecutivos.

4.2 Defina el concepto de ángulos consecutivos.

4.3 Defina el concepto de polígono a partir del de poligonal cerrada.

4.4 Defina el concepto de polígono convexo.

4.5 Defina el concepto de figura convexa.

5. Axiomatización de una teoría matemática

Una vez que una teoría matemática está suficientemente desarrollada, puede intentarse su axiomatización. La fundamentación axiomática tiene la finalidad de ordenar unos conocimientos. Su mayor utilidad es consecuencia de la limitación de nuestra memoria.

El proceso de axiomatización consiste en elegir algunas de las afirmaciones que pueden hacerse sobre los objetos matemáticos en estudio y obtener todas las demás afirmaciones a partir de aquéllas, mediante un proceso deductivo. Las afirmaciones elegidas, a partir de las cuales se obtienen las demás, se llaman *axiomas* o *postulados*. Es decir, el proceso de axiomatización consiste en elegir un subconjunto, del conjunto de las afirmaciones que pueden hacerse, de modo que las demás afirmaciones puedan obtenerse lógicamente a partir de las de ese subconjunto.

Para una misma teoría matemática pueden elegirse axiomáticas distintas, es decir, pueden elegirse distintos subconjuntos de afirmaciones, a partir de las cuales se obtienen las restantes. En otras palabras, una misma teoría se puede axiomatizar generalmente de varios modos. Dos axiomatizaciones se llaman equivalentes cuando a partir de ellas se puede llegar a las mismas afirmaciones, mediante razonamientos lógicos.

No sólo se pueden elegir axiomáticas equivalentes, en una misma teoría, sino incluso se pueden elegir a veces distintas ideas primarias. Así, la Geometría plana puede desarrollarse axiomáticamente tomando como concepto primitivo el segmento en vez de la recta. Así hizo el matemático alemán PASCH (1843-1931), por considerar más intuitivas las afirmaciones referentes a un trozo finito de plano que a todo el plano.

6. Axiomas

Los axiomas se eligen de modo que reflejen afirmaciones evidentes. Así, en la axiomática de la Geometría de Euclides se admiten, entre otros, el conocido axioma que dice *por dos puntos distintos pasa una única recta.*

Para que un sistema de axiomas sea válido es necesario que a partir de ellos no se llegue a afirmaciones contradictorias, empleando los métodos de la Lógica, lo que se expresa diciendo que *los axiomas han de ser compatibles.*

Además es deseable que ninguno de los axiomas se deduzca lógicamente de los demás, lo que se expresa diciendo que *los axiomas deben ser independientes.* Esta condición no es esencial, como la de compatibilidad, sino de

elegancia. Una axiomatización es tanto más elegante cuanto menor sea el número de afirmaciones admitidas sin demostración, es decir, cuanto menor sea el número de postulados o axiomas. No obstante, a veces conviene sacrificar la independencia absoluta de los axiomas, en beneficio de una mayor brevedad en las demostraciones de algunas de las afirmaciones que de ellas se deducen.

7. Teoremas: clases

Las afirmaciones que se obtienen deductivamente a partir de los axiomas, o bien a partir de otras afirmaciones obtenidas deductivamente a partir de los axiomas, se llaman *teoremas* o *proposiciones*.

Se llaman *lemas* a las proposiciones de las cuales se obtiene un teorema importante. Se llaman *corolarios* a las proposiciones que se demuestran fácilmente a partir de los teoremas fundamentales. Así, por ejemplo, la proposición 4.1 del § 4 se puede considerar como lema del teorema fundamental expresado mediante la proposición 4.2 del § 4, y a la proposición 4.3 podríamos haberla llamado corolario del teorema fundamental expresado en la proposición 4.2.

Un teorema se compone de *hipótesis* y *tesis*. Así, el teorema o proposición 4.1 del § 4, que decía:

$$si\ \ a\,R\,b\ \ entonces\ se\ verifica\ que\ \ \{\{a\}\}=\{\{b\}\}$$

se puede también enunciar así:

$$Hipótesis:\ a\,R\,b \qquad Tesis:\ \{\{a\}\}=\{\{b\}\}$$

El mismo teorema se podría también enunciar en la forma siguiente:

$$a\,R\,b \quad implica \quad \{\{a\}\}=\{\{b\}\}$$

EJERCICIO

7.1 Enunciar cada una de las proposiciones que se citan a continuación en cada una de las tres formas indicadas anteriormente:

a) proposición 4.2 del § 4
b) proposición enunciada en el ejercicio 4.1 del § 4
c) proposición: los triángulos equiláteros son equiángulos
d) proposición: si dos triángulos tienen sus lados iguales, respectivamente, entonces su ángulos son respectivamente iguales
e) proposición: si un número natural es múltiplo de 6, entonces es también múltiplo de 3
f) si un punto pertenece a la mediatriz de un segmento, entonces equidista de los extremos de dicho segmento
g) si $a=b$ entonces es $a^2=b^2$, donde a y b son números naturales
h) el mismo caso anterior cuando a y b son números enteros.

Ya hemos utilizado repetidas veces la expresión *recíprocamente*. Dos teoremas se dicen recíprocos si la hipótesis de uno coincide con la tesis del otro, y viceversa. Así, el teorema recíproco de la proposición 4.1 del § 4 será el enunciado del ejercicio 4.1 del § 4.

EJERCICIOS

7.2 Escriba las proposiciones recíprocas de las de los apartados a), c), f) y g) del ejercicio 7.1.

7.3 Observe que las proposiciones recíprocas de los apartados d), e) y h) del ejercicio 7.1 son falsas.

Se habrá notado que si una proposición es cierta, su recíproca puede ser cierta o falsa. Cuando un teorema y su recíproco son ciertos, se dice que la afirmación expresada en la hipótesis y la expresada en la tesis son *equivalentes*. Así, como la proposición 4.1 del § 4 y su recíproca son ciertas, como ya se ha indicado, diremos que

$$\boxed{a\,R\,b} \quad \textit{equivale a} \quad \boxed{\{\{a\}\}=\{\{b\}\}}$$

EJERCICIO

7.4 Exprese, en la forma indicada anteriormente, los apartados del ejercicio 7.1 que sean equivalencias.

Consideremos ahora la proposición:

$$\boxed{a\,R\,b} \quad \textit{implica} \quad \boxed{\{\{a\}\}\neq\{\{b\}\}}$$

Esta proposición se llama contraria de la proposición 4.1 del § 4. Su hipótesis, $a \not R\, b$, es la negación de la hipótesis, $a\,R\,b$, de la proposición 4.1 del § 4, y su tesis, $\{\{a\}\}\neq\{\{b\}\}$, es la negación de la tesis de aquella proposición. Por tanto, dos teoremas se dicen *contrarios* si la hipótesis y la tesis de uno son las negaciones respectivas de la hipótesis y la tesis del otro.

EJERCICIOS

7.5 **Escriba las proposiciones contrarias de cada una de las proposiciones enunciadas en el ejercicio 7.1.**

7.6 **Escriba el recíproco del contrario de cualquiera de los teoremas del ejercicio 7.1 y observe que coincide con el contrario del recíproco de dicho teorema.**

El recíproco del contrario (o el contrario del recíproco) se llama el *contrarrecíproco* de un teorema. Por ejemplo, dado el teorema:

$$\boxed{a=b} \quad \textit{implica} \quad \boxed{a^2=b^2}$$

donde a y b son números, su contrarrecíproco diría:

$$\boxed{a^2\neq b^2} \quad \textit{implica} \quad \boxed{a\neq b}$$

Notemos que, por ser cierto un teorema, su contrarrecíproco también es cierto. En el ejemplo anterior, por ser cierto el teorema:

$$\boxed{a=b} \quad \textit{implica} \quad \boxed{a^2=b^2}$$

su contrarrecíproco también es cierto, es decir, que

$$\textit{si} \ \boxed{a^2\neq b^2}, \ \textit{entonces también es} \ \boxed{a\neq b}$$

pues si fuera $a=b$, sería $a^2=b^2$, contra la hipótesis de esta proposición contrarrecíproca de la de partida. Este razonamiento es completamente general, es decir, dos teoremas contrarrecíprocos son ambos ciertos o ambos falsos, pero nunca uno cierto y el otro falso.

EJERCICIO

7.7 **Demostrar, como hemos hecho para el ejemplo anterior, que los contrarrecíprocos de cada uno de los teoremas del ejercicio 7.1 son ciertos.**

Por tanto, para probar un teorema basta probar su contrarrecíproco. Este método de demostración se llama *por reducción al absurdo*. Un ejemplo de demostración por reducción al absurdo es el siguiente:

Para probar que, dados los conjuntos A y B, si $A=\emptyset$, entonces el conjunto producto $A\times B=\emptyset$, razonamos así:

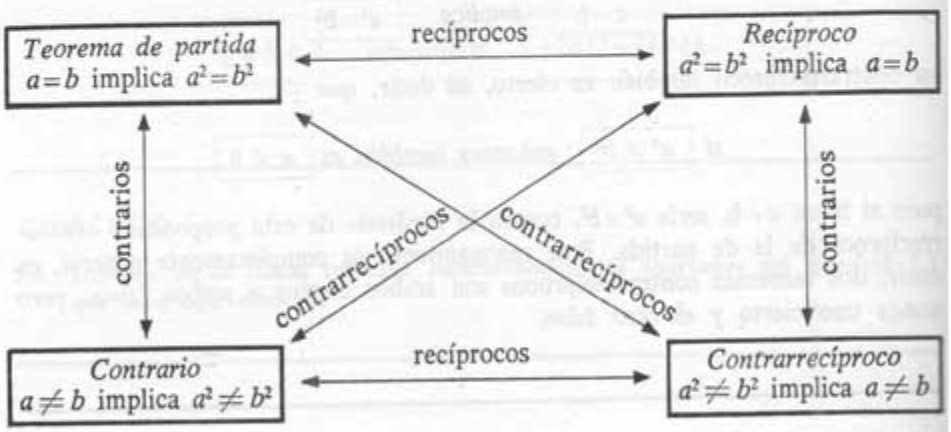
Si fuera $A\times B\neq\emptyset$, entonces $A\times B$ tendría al menos un elemento (a, b), donde $a\in A$ y $b\in B$, luego A no sería vacío, contra la hipótesis, ya que el elemento a pertenecería al conjunto A.

EJERCICIOS

7.8 Demostrar, por reducción al absurdo, que si el conjunto producto, $A\times B=\emptyset$, entonces uno, al menos, de los conjuntos A y B es vacío.

7.9 Comprobar que el contrarrecíproco del contrario de un teorema es su recíproco, es decir, que el contrario y el recíproco, de un mismo teorema, son entre sí contrarrecíprocos.

Por tanto, probado un teorema y su contrario, está probado también su recíproco, luego estamos ante una equivalencia. El siguiente esquema resume estos resultados:



Nótese que todos ellos son ciertos cuando a y b son números naturales.

EJERCICIOS

7.10 Hágase un esquema similar al anterior para las proposiciones del ejercicio 7.1 que sean equivalencias.

7.11 **Dada la afirmación:**

$$x \in A \quad \textbf{implica} \quad x \in B$$

lo que, como sabemos, significa que $A \subset B$, como se esquematiza en la figura 7.1, escribir las afirmaciones recíproca, contraria y contrarrecíproca

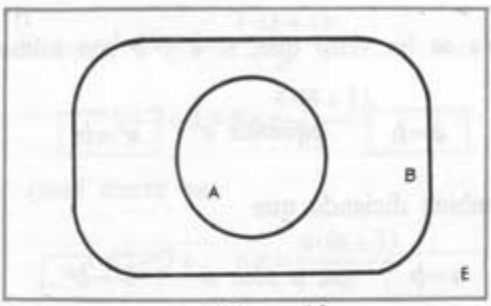


Figura 7.1

de la dada y concluir que todas ellas son ciertas sólo en el caso de ser $A=B$. Haga uso del concepto de conjuntos complementarios para escribir las afirmaciones contraria y recíproca.

He aquí ahora un ejemplo muy interesante de afirmaciones contrarrecíprocas: en las definiciones 2.3 y 2.4 del § 4 dijimos que eran equivalentes, lo que se comprobó, para algunos casos, en el ejercicio 2.6 de aquel §, pero aún no ha sido demostrado en general. La definición 2.4 del § 4 expresaba que:

$$\left.\begin{matrix} a\,R\,b \\ b\,R\,a \end{matrix}\right\} \quad \textit{implican} \quad a=b$$

la afirmación contrarrecíproca expresará que

$$a \neq b \quad \textit{implica que} \quad \text{no puede ocurrir que } a\,R\,b \text{ y } b\,R\,a$$

es decir, que

$$\text{si } a\,R\,b \text{ entonces } b\,\not{R}\,a$$

es decir, la afirmación contrarrecíproca puede escribirse en la forma:

$$a \neq b \quad \textit{implica que} \quad \textit{si } a\,R\,b \textit{ entonces } b\,\not{R}\,a$$

o todavía en la forma:

$$\textit{si}\ \boxed{a \neq b}\ \textit{, entonces}\ \boxed{\boxed{a\,R\,b}\ \textit{implica}\ \boxed{b\,\not R\,a}}$$

lo que constituye la definición 2.3. Queda así probada la equivalencia de ambas definiciones.

Nomenclaturas: Ya se ha visto que, si a y b son números naturales, entonces

$$\boxed{a=b}\quad \textit{equivale a}\quad \boxed{a^2=b^2}$$

lo que se expresa también diciendo que

$$\boxed{a=b}\quad \textit{si, y sólo si}\quad \boxed{a^2=b^2}$$

ya que a es igual a b cuando $a^2=b^2$ y si a^2 no es igual a b^2, entonces tampoco a es igual a b, por tratarse de una equivalencia. La equivalencia anterior también se expresa diciendo que:

$$\textit{la condición necesaria y suficiente para que sea}\ \boxed{a=b}\ \textit{es que sea}\ \boxed{a^2=b^2}$$

Notemos que esta última expresión se justifica teniendo en cuenta que

$$\boxed{a=b}\quad \textit{implica}\quad \boxed{a^2=b^2}$$

se puede expresar diciendo que

$$\textit{la condición}\ \boxed{a=b}\ \textit{basta para que se verifique}\ \boxed{a^2=b^2}$$

o sea:

$$\textit{la condición}\ \boxed{a=b}\ \textit{es suficiente para que se verifique}\ \boxed{a^2=b^2}$$

y la proposición contraria afirmará que:

$$\textit{si}\ \boxed{a \neq b}\quad \textit{entonces}\quad \boxed{a^2 \neq b^2}$$

es decir:

$$\textit{la condición}\ \boxed{a=b}\ \textit{es necesaria para que se verifique}\ \boxed{a^2=b^2}$$

Un ejemplo muy importante de razonamiento por reducción al absurdo es el *método de inducción*, también llamado *teorema de recurrencia*, que expo-

emos a continuación. Observemos que:

$$1=\frac{1\cdot(1+1)}{2}$$

$$1+2=\frac{2\cdot(2+1)}{2}$$

$$1+2+3=\frac{3\cdot(3+1)}{2}$$

$$1+2+3+4=\frac{4\cdot(4+1)}{2}$$

y nos preguntamos: ¿será cierto que

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

cualquiera que sea el número natural n?

Si a los dos miembros de la penúltima igualdad escrita (caso $n=4$) sumamos el número 5, obtenemos la igualdad:

$$(1+2+3+4)+5=\frac{4\cdot(4+1)}{2}+5$$

cuyo segundo miembro se puede escribir en la forma:

$$\frac{4\cdot(4+1)}{2}+\frac{5\cdot2}{2}=\frac{4\cdot(4+1)+5\cdot2}{2}=\frac{4\cdot5+5\cdot2}{2}=$$

$$=\frac{5\cdot(4+2)}{2}=\frac{5\cdot6}{2}=\frac{5\cdot(5+1)}{2}$$

luego queda:

$$1+2+3+4+5=\frac{5\cdot(5+1)}{2}$$

El mismo cálculo que nos ha permitido pasar del caso $n=4$ al caso $n=5$ nos permite pasar del caso $n=h$ al caso $n=h+1$. Resumiendo: hemos visto que la propiedad anteriormente enunciada, en la que interviene el número natural n, es cierta para el caso de ser $n=1$. Además, si se supone cierta para $n=h$, también es cierta para $n=h+1$, según se ha indicado. De aquí concluimos que la propiedad es cierta para cualquier número natural n, ya que si no lo fuera para todos, habría algunos números naturales para los que la propiedad no sería cierta; si fuera k el menor número natural para el cual la propiedad no fuera cierta, para el anterior, $k-1$, si lo sería, en contra de que, si es cierta para h, entonces también lo es para $h+1$. Este razonamiento, por reducción al absurdo, es totalmente general, lo que permite enunciar el siguiente resultado:

Dada una propiedad en que interviene esencialmente el número n, se tiene

TEOREMA:

Hipótesis:

1.ª *parte:* la propiedad es cierta para el caso $n=1$.

2.ª *parte:* si se supone que la propiedad es cierta para el caso $n=h$, entonces también resulta ser cierta para el caso $n=h+1$.

Tesis: la propiedad es cierta para cualquier número natural n.

La dificultad de este teorema de recurrencia proviene del hecho de que la hipótesis es doble y sobre todo de que la segunda parte de la hipótesis es una implicación, a su vez.

Por tanto, para probar que una propiedad, que depende esencialmente del número natural n, es cierta, basta probar que es cierta para $n=1$ y que es cierta para $n=h+1$, supuesto que lo es para $n=h$.

Observemos la diferencia entre este método de inducción, en que hay que probar la certeza para todo número natural n (por lo que se llama método de inducción completa o método de inducción matemática) y el método de inducción incompleta utilizado en las ciencias experimentales, donde se sacan conclusiones a partir de un número finito de experiencias, aunque este número finito puede ser muy elevado.

EJERCICIO

7.12 Utilizar el método de inducción para probar las siguientes propiedades, que dependen del número natural n:

a) $$1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

b) $$1^3+2^3+3^3+4^3+\ldots+n^3=\frac{n(n+1)^2}{2}$$

c) El producto $n(2n+1)(7n+1)$ es múltiplo de 6, cualquiera que sea el número natural n.

7.13 Intente probar, por recurrencia, que

$$1+3+5+\ldots+(2n+1)=(n-1)^2$$

Al intentar probar el ejercicio anterior habrá notado que su enunciado es falso. Basta considerar el caso $n=2$, y tendremos:

$$\underbrace{(2\cdot 0+1)}_{1}+\underbrace{(2\cdot 1+1)}_{3}+\underbrace{(2\cdot 2+1)}_{5}+\underbrace{(2\cdot 3+1)}_{7}\neq\underbrace{(3-1)^2}_{4}$$

Muchas veces en Matemáticas nos preguntamos si un resultado, que intuimos, será cierto o falso. Un método, útil a menudo, consiste en buscar un *contraejemplo*, es decir, comprobar si es cierto en algunos casos particulares. Con sólo que no sea cierto para un caso particular, ya podemos asegurar su falsedad, como hemos indicado para el ejercicio 7.13.

8. Lenguaje matemático

La Matemática opera, en general, con entes abstractos, lo que exige un especial cuidado en la *precisión* de su lenguaje. En el lenguaje ordinario no es frecuente utilizar tal precisión, que resultaría pedante, por la sencilla razón de ser innecesaria, habitualmente. En la Matemática la precisión es necesaria, si se desea evitar confusiones en los conceptos.

La segunda característica fundamental del lenguaje matemático es su *concisión*, es decir, su brevedad. Naturalmente esta concisión podrá aumentar cuanto mayor sea la edad mental del alumno. Citemos, al respecto, el diálogo debido al original novelista y dramaturgo francés COURTELINE (1861-1929):

> *Le juge:* Accusé, vous tâcherez d'être bref.
> *L'accusé:* Je tâcherai d'être clair.

con que comienza el prólogo del primer volumen de uno de los mejores tratados de Algebra Superior que existen en la actualidad:

O. ZARISKI y PIERRE SAMUEL, *Conmutative Algebra*, Ed. Van Nostrand, Nueva York, 1963.

9. Simbolismo

Los símbolos matemáticos han evolucionado mucho, hasta llegar a los que actualmente están en uso. No cabe duda de que tal evolución continuará y algunos de los símbolos que hoy se utilizan serán sustituidos por otros.

Vamos a introducir algunos otros símbolos, que, junto a los ya conocidos, son los que se utilizan en la mayoría de los libros actuales de Matemáticas y permiten abreviar y, por tanto, facilitar la exposición.

Comencemos por los signos de implicación y equivalencia lógica. El teorema:

$$a=b \quad implica \quad a^2=b^2$$

se puede abreviar así:

$$\boxed{a=b \Longrightarrow a^2=b^2}$$

es decir, el signo de implicación es $\Longrightarrow$

En el caso de ser a y b números naturales, ya vimos que:

$$a=b \quad \textit{equivale a} \quad a^2=b^2$$

es decir que:

$$a=b \Longrightarrow a^2=b^2$$
$$a=b \Longleftarrow a^2=b^2$$

lo que se expresa abreviadamente escribiendo:

$$\boxed{a=b \iff a^2=b^2}$$

es decir, el signo de equivalencia es $\iff$.

EJERCICIO

9.1 Expresar las proposiciones del ejercicio 7.1, utilizando el signo de implicación o el de equivalencia lógica, según convenga.

Vamos ahora a introducir los cuantificadores. Recordemos la propiedad reflexiva de las relaciones: si en un conjunto C está definida una relación R, diremos que es reflexiva, si *para todo* $a \in C$ se verifica $a\,R\,a$. Otras muchas veces se ha utilizado la expresión *para todo* o, de otro modo, *para cualesquiera*, como, por ejemplo, en la definición de conmutatividad, donde se decía: una operación $\oplus$ en un conjunto C es conmutativa, si *para cualesquiera* elementos, a y b, pertenecientes al conjunto C, se verifica $a \oplus b = b \oplus a$. Para abreviar se introduce el signo $\forall$, que leeremos *para todo*. Así, en la definición de la propiedad reflexiva escribiremos:

$$\forall\, a \in C \quad \text{y se lee} \quad \textit{para todo a perteneciente a } C$$

y en la definición de la propiedad conmutativa, escribiremos:

$$\forall\, a \in C \quad \text{y} \quad \forall\, b \in C \quad \text{y se lee} \quad \textit{para cualesquiera a y b pertenecientes a } C$$

o bien, se escribe, más condensadamente:

$$\forall\, a, b \in C \quad \text{y se lee como antes.}$$

EJERCICIO

9.2 Utilizar el signo $\forall$ en las definiciones siguientes:

a) propiedad simétrica de las relaciones;
b) propiedad transitiva de las relaciones;
c) propiedad asociativa de las operaciones;
d) busque otros casos donde pueda aplicarlo.

Recordemos ahora cómo enunciábamos la existencia de elemento neutro: se dice que la operación $\oplus$, en el conjunto C, posee elemento neutro si *existe* un elemento $e \in C$, tal que $e \oplus a = a \oplus e = a$, cualquiera que sea $a \in C$. Para abreviar se introduce el signo $\exists$, que leeremos *existe*. Así, la definición anterior puede escribirse:

$$\exists\, e \in C \quad \text{tal que} \quad e \oplus a = a \oplus e = a, \quad \text{cualquiera que sea } a \in C$$

o todavía, haciendo uso de $\exists$ y $\forall$, en la forma:

$$\exists\, e \in C \quad \text{tal que} \quad \forall\, a \in C \quad \text{se verifica} \quad e \oplus a = a \oplus e = a$$

o más condensadamente:

$$\exists\, e \in C; \qquad \forall\, a \in C; \qquad a \oplus e = e \oplus a = a$$

Al signo $\exists$ le llamaremos *cuantificador existencial* y al $\forall$ *cuantificador universal.*

EJERCICIO

9.3 **Utilizar el signo $\exists$ en las definiciones siguientes:**

a) existencia de elemento cero;
b) existencia de elemento unidad.

Nótese que la propiedad de existencia de elemento simétrico, respecto de la operación $\oplus$ en el conjunto C, puede enunciarse:

$$\forall\, a \in C; \qquad \exists\, a' \in C; \qquad a \oplus a' = a' \oplus a = e$$

EJERCICIOS

9.4 **Compare el orden en que aparecen los cuantificadores en las propiedades de existencia de elemento neutro y de elemento simétrico. ¿Se puede cambiar su orden?**

9.5 **Escriba las propiedades de existencia de elemento opuesto y de elemento inverso, utilizando los cuantificadores.**

Nosotros hemos introducido $\forall$ y $\exists$ como simples abreviaciones de lenguaje, si bien su significado es más profundo, como puede verse en:
N. BOURBAKI, *Eléments de Mathématique*, Ed. Hermann, París.

La propiedad transitiva de una relación R, entre los elementos de un conjunto C, puede escribirse:

$$(a\,R\,b \wedge b\,R\,c) \Longrightarrow a\,R\,c$$

donde el signo $\wedge$ se lee *y*. Por tanto, $\wedge$ es el signo lógico equivalente a la conjunción copulativa *y*.

Análogamente $\vee$ es el signo de disyunción lógica, y lo leeremos *o*. Así, recordando el concepto de conjunto unión, podemos escribir:

$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$$

EJERCICIOS

9.6 Escriba abreviadamente la definición de conjunto intersección, utilizando el signo $\wedge$ y la nota 4.1 del § 2.

9.7 Escriba la definición 2.4 del § 4 utilizando el signo $\wedge$.

9.8 Escriba el signo $\wedge$ o $\vee$, según convenga, en el lugar indicado por la flecha $\uparrow$, en la siguiente expresión, donde a y b son números naturales:

$$[a \geqslant b] \Longrightarrow [(a > b) \uparrow (a = b)]$$

Nótese que los signos $\vee$ y $\wedge$ tienen aquí distinto significado que en el ejercicio 3.1 c) y d) del § 5.

10. Rigor matemático

El rigor matemático consiste en seguir únicamente el camino del razonamiento lógico, para pasar de unas proposiciones a las siguientes en la cadena deductiva.

Por ejemplo, aunque la Geometría comenzó siendo una Ciencia experimental e intuitiva, fue formalizada por Euclides, en el sentido de que a partir de unas ideas intuitivas formuló unos axiomas, a partir de los cuales dedujo como teoremas los demás resultados. Este proceso deductivo puede hacerse prescindiendo por completo de la intuición y las figuras, sirviendo éstas únicamente para aclarar las ideas o el orden a seguir en el proceso deductivo. Pero una vez completado dicho proceso, puede prescindirse de la imagen intuitiva que lo generó y entonces la teoría construida puede adaptarse a explicar diversos modelos. Así, si en la axiomática de la Geometría plana, hecha por Euclides, se prescinde del axioma de paralelismo, que afirma: *dada una recta y un punto exterior, existe una única recta que pasa por*

punto dado y no corta a la recta dada, resulta una Geometría de la que pueden ser modelos.

a) Los puntos y rectas del plano ordinario.

b) Los puntos y circunferencias máximas de una superficie esférica.

c) Otros modelos que no podemos citar aquí.

11. Paralogismos

A los razonamientos incorrectos se les llama paralogismos.

Una causa frecuente de paralogismo es la división por cero. Si tenemos la igualdad

$$5 \cdot 2 = 5 \cdot b$$

podemos dividir por 5 ambos miembros de la igualdad, como se verá más adelante, y queda

$$2 = b$$

Por otra parte, como

$$3 \cdot 0 = 0 \quad \text{y} \quad 2 \cdot 0 = 0$$

se puede escribir

$$3 \cdot 0 = 2 \cdot 0$$

pero no es lícito simplificar, en este caso:

$$3 \cdot \boxed{0 = 2 \cdot 0}$$

es decir, no se puede aquí dividir por cero, para concluir que

$$3 = 2$$

En otras palabras, no se puede tachar el cero en ambos miembros de una igualdad.

Veamos un ejemplo de paralogismo, debido a la división por cero:

Sean p y q dos números iguales, es decir, sea

$$p = q$$

Multiplicando ambos miembros de esta igualdad por p, tenemos

$$p^2 = pq$$

Restando q^2 a ambos miembros, se tiene:

$$p^2 - q^2 = pq - q^2$$

El primer miembro de esta expresión, p^2-q^2, se puede escribir en la forma $(p+q)\,(p-q)$, ya que suma por diferencia es diferencia de cuadrados. El segundo miembro, $pq-q^2$, se puede escribir en la forma $(p-q)q$, sacando factor común q. Por tanto, la igualdad anterior se puede escribir en la forma

$$(p+q)\,(p-q)=(p-q)q$$

y dividiendo ambos miembros por $(p-q)$, queda

$$p+q=q$$

En particular, haciendo $p=q=1$, de esta igualdad se deduce que

$$1+1=1 \qquad \text{¡Falso!}$$

La incorrección, en el razonamiento anterior, ha sido cometida al dividir por $p-q$, pues como $p=q$, será $p-q=0$; es decir, hemos dividido por cero.

Otras causas frecuentes de paralogismos son:

a) La *utilización indebida de la intuición.*

b) La *utilización de figuras geométricas incorrectas,* como, por ejemplo, la que se utiliza para probar que todos los triángulos son isósceles.

c) El uso incorrecto de *justificaciones experimentales.*

d) El *círculo vicioso,* consistente en tomar como hipótesis la tesis que se desea probar.

e) La *extensión indebida de resultados,* que sólo son válidos en una situación más restringida. Así, por ejemplo, la implicación

$$a^2=b^2 \Longrightarrow a=b$$

que es cierta cuando a y b son números naturales, no lo es al intentar extender este resultado a números enteros, ya que

$$(-3)^2=3^2$$

COMBINATORIA 7

1. Factoriales

* EJEMPLO 1.1: El producto

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$$

se escribe abreviadamente

$$5!$$

es decir:

$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$

* EJEMPLO 1.2: Análogamente:

$$6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$$

donde 6! se lee *factorial de* 6, o bien 6 *factorial.*

* DEFINICIÓN 1.1: *Si h es un número natural mayor que* 1, *se llama factorial de h, y se representa por* $h!$, *al producto de los h primeros números naturales, excluidos el cero, es decir:*

$$\boxed{h! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (h-2)(h-1)h}$$

EJERCICIOS

1.1 Calcular 3! y 7!

1.2 Comprobar que $5!(5+1) = 6!$

• CONSECUENCIAS de la definición 1.1:

a) $h!(h+1)=(h+1)!$

b) $h!(h+1)(h+2)\dots(n-2)(n-1)n=n!$

EJERCICIOS

1.3 Comprobar b) para $h=3$; $n=7$.

1.4 Demostrar a) y b).

Recordemos que $h!$ ha sido definido únicamente para $h>1$. Si en la consecuencia *a)* sustituimos h por 1, queda:

$$1!(1+1)=(1+1)!$$

es decir:

$$1!2=2!$$

luego, para que esta igualdad sea cierta, ha de ser

$$1!=1$$

Esto no es una demostración, ya que 1! aún no ha sido definido. Pero permite justificar la siguiente definición:

• DEFINICIÓN 1.2: *Factorial de* 1 *es igual a* 1, *es decir:*

$$\boxed{1!=1}$$

EJERCICIO

1.5 Si en a) hacemos $h=0$, ¿qué valor hemos de dar a 0! para que la igualdad a) sea también cierta en este caso?

El ejercicio anterior justifica la siguiente definición:

• DEFINICIÓN 1.3: *Factorial de* 0 *es igual a* 1, es decir:

$$\boxed{0!=1}$$

• EJEMPLO 1.3: El producto

$$9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$$

de cuatro factores, decrecientes de unidad en unidad, a partir de 9, se designa abreviadamente por $9^{(4}$. Es decir:

$$9^{(4} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$$

• DEFINICIÓN 1.4: *Sean n y h números naturales tales que* $n \geqslant h \geqslant 2$. *Se llama factorial generalizada* $n^{(h}$ *al producto de h factores, decrecientes de unidad en unidad, a partir de n. Es decir:*

$$\boxed{n^{(h} = n(n-1)(n-2) \ldots (n-h+1)}$$

Nota 1.1: En el segundo miembro de la expresión anterior hay h factores, pues también puede escribirse:

$$n^{(h} = \underbrace{(n-0)}_{n}(n-1)(n-2) \ldots \underbrace{[n-(h-1)]}_{n-h+1}$$

donde cada factor es una diferencia, siendo los respectivos sustraendos:

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ h-1$$

EJERCICIOS

1.6 **Calcular** $8^{(3}$.

1.7 **Teniendo en cuenta la anterior nota 1.1, diga cuál es el más pequeño de los factores del producto, que se escribe condensadamente en la forma** $312^{(86}$.

1.8 **Escriba condensadamente** $8^{(8}$ **de otro modo, teniendo en cuenta la definición 1.1.**

• CONSECUENCIAS de la definición 1.4:

a') $n^{(n} = n!$

b') $n^{(n-h} = n(n-1)(n-2) \ldots (h+1)$.

c') $[n^{(n-h}] \cdot [h!] = n!$

d') $[n^{(h}] \cdot [(n-h)!] = n!$

e') $[n^{(h}] \cdot [(n-h)!] = [n^{(n-h}] \cdot [h!]$.

f') $n^{(h} \cdot (n-h) = n^{(h+1}$.

g') $n^{(h} \cdot (n+1) = (n+1)^{(h+1}$.

Demostración de e'):

$$\underbrace{n(n-1)(n-2)\dots(n-h+1)}_{n^{(h}}\ \underbrace{(n-h)\dots 3\cdot 2\cdot 1}_{(n-h)!}=n!$$

EJERCICIOS

1.9 Comprobar las consecuencias a'), b'), ..., g'), para $h=3$; $n=7$.

1.10 Demostrar las consecuencias anteriores, como se ha hecho para e').

Recordemos que $n^{(h}$ ha sido definido únicamente para $n \geqslant h > 1$.

EJERCICIO

1.11 Si en g') hacemos $h=1$, ¿qué valor hemos de dar a $n^{(1}$ para que la consecuencia g') sea también cierta en este caso?

El ejercicio anterior justifica la siguiente definición:

- DEFINICIÓN 1.5:

$$\boxed{n^{(1}=n}$$

EJERCICIO

1.12 Repita el ejercicio 1.10, cambiando $h=1$ por $h=0$.

- DEFINICIÓN 1.6:

$$\boxed{n^{(0}=1}$$

EJERCICIOS

1.13 Compruebe que $12^{(5}$ es divisible por 5!

1.14 Demuestre que $n^{(h}$ es divisible por h!

---

2. Números combinatorios

* DEFINICIÓN 2.1: *Se llama número combinatorio* n sobre h, *y se escribe* $\binom{n}{h}$ *al cociente* $\frac{n^{(h}}{h!}$, *es decir:*

$$\boxed{\binom{n}{h}=\frac{n^{(h}}{h!}}$$

* EJEMPLO 2.1: El número combinatorio 7 *sobre* 3 será:

$$\binom{7}{3}=\frac{7^{(3}}{3!}=\frac{7\cdot 6\cdot 5}{3!}=\frac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3}=35$$

EJERCICIO

2.1 **Calcular los números combinatorios**

$$\binom{12}{4} \quad \text{y} \quad \binom{86}{3}$$

Nótese que $\binom{n}{h}$ es siempre un número natural (sigue del ejercicio 1.14). A n se le llama *numerador* y a h *denominador* del número combinatorio $\binom{n}{h}$

EJERCICIOS

2.2 **Probar que**

$$h!\binom{n}{h}=n^{(h}$$

2.3 **Probar que**

$$\binom{n}{h}=\frac{n!}{h!(n-h)!}$$

---

* CONSECUENCIAS de la definición 2.1:

a") $\binom{n}{0}=1$, cualquiera que sea el número natural n.

b'') $\binom{n}{1}=n$, cualquiera que sea el número natural n.

c'') $\binom{n}{n-h}=\binom{n}{h}$, es decir, dos números combinatorios del mismo numerador y cuyos denominadores sumen el numerador común, son iguales.

d'') $\binom{n}{h}+\binom{n}{h+1}=\binom{n+1}{h+1}$.

DEMOSTRACIÓN de *d''):*

$$\binom{n}{h}+\binom{n}{h+1}=\frac{n^{(h}}{h!}+\frac{n^{(h+1}}{(h+1)!}=\frac{n^{(h}}{h!}\cdot\frac{h+1}{h+1}+\frac{n^{(h+1}}{(h+1)!}=$$

$$=\frac{n^{(h}(h+1)}{h!(h+1)}+\frac{n^{(h+1}}{(h+1)!}\underset{a)}{=}\frac{n^{(h}(h+1)}{(h+1)!}+\frac{n^{(h+1}}{(h+1)!}=$$

$$=\frac{n^{(h}(h+1)+n^{(h+1}}{(h+1)!}\underset{f')}{=}\frac{n^{(h}(h+1)+n^{(h}(n-h)}{(h+1)!}=$$

$$=\frac{n^{(h}(h+1+n-h)}{(h+1)!}=\frac{n^{(h}(n+1)}{(h+1)!}\underset{g')}{=}\frac{(n+1)^{(h+1}}{(h+1)!}=$$

$$=\binom{n+1}{h+1}.$$

Nótese que debajo de algunos signos de igualdad se ha indicado la propiedad utilizada para efectuar ese paso.

EJERCICIOS

2.4 Comprobar las propiedades a''), b''), c'') y d'') para $n=7$; $h=3$.

2.5 Demostrar las propiedades a''), b'') y c''). Téngase en cuenta que la consecuencia c'') sigue de la consecuencia e').

2.6 Hallar el número natural x, distinto de 4, tal que

$$\binom{13}{4}=\binom{13}{x}$$

2.7 La suma

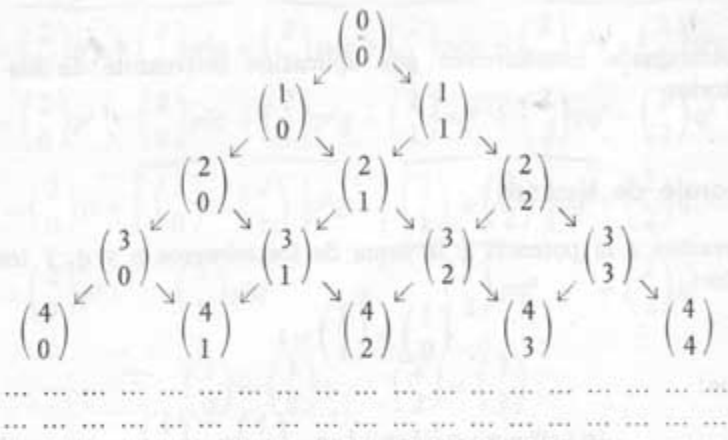
$$\binom{12}{4}+\binom{12}{5}$$

es otro número combinatorio. ¿Cuál?

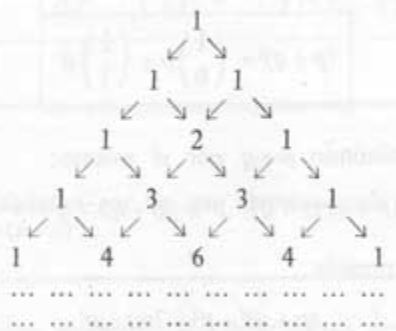
---

3. Triángulo de Tartaglia

Si disponemos los números combinatorios como sigue:



y ahora sustituimos cada uno de ellos por su valor, obtenemos:



Observemos, en este esquema numérico, que cada número se obtiene sumando los dos que tiene encima (los dos de los que parte una flecha que llega hasta ese número). Los extremos de cada fila son unos. Así, los números de cada fila se obtienen de los de la precedente.

Este esquema numérico se conoce con el nombre de *triángulo aritmético de* TARTAGLIA *o de* PASCAL.

EJERCICIOS

3.1 Continuar el triángulo de Pascal hasta la fila décima.

3.2 Comprobar que el resultado obtenido para $\binom{9}{4}$, en el ejercicio anterior, coincide con el que se obtiene aplicando directamente la definición 2.1.

3.3 Interpretar las propiedades a''), b'') y c'') de los números combinatorios, sobre el triángulo de Tartaglia.

A continuación estudiaremos una aplicación interesante de los números combinatorios.

4. Binomio de Newton

Si elevamos a la potencia 1 la suma de los números p y q, y tenemos en cuenta que

$$\binom{1}{0} = \binom{1}{1} = 1$$

obtenemos:

$$(p+q)^1 = p+q = 1 \cdot p + 1 \cdot q = \binom{1}{0} p + \binom{1}{1} q$$

es decir:

$$\boxed{(p+q)^1 = \binom{1}{0} p + \binom{1}{1} q}$$

Al multiplicar el binomio $p+q$ por sí mismo:

$$(p+q)^2 = (p+q)(p+q) = p^2 + pq + qp + q^2 = p^2 + 2pq + q^2$$

hemos obtenido la expresión:

$$(p+q)^2 = p^2 + 2pq + q^2$$

conocida desde los primeros cursos, y que puede ahora escribirse, teniendo en cuenta que:

$$\binom{2}{0} = 1; \qquad \binom{2}{1} = 2; \qquad \binom{2}{2} = 1$$

en la forma:

$$\boxed{(p+q)^2 = \binom{2}{0} p^2 + \binom{2}{1} pq + \binom{2}{2} q^2}$$

Si multiplicamos a ambos miembros de la igualdad anterior por $p+q$, obtenemos:

$$(p+q)^2 (p+q) = \left[\binom{2}{0} p^2 + \binom{2}{1} pq + \binom{2}{2} q^2 \right] (p+q)$$

de donde

$$(p+q)^3=\underbrace{\binom{2}{0}p^2(p+q)}+\underbrace{\binom{2}{1}pq(p+q)}+\underbrace{\binom{2}{2}q^2(p+q)}=$$

$$=\binom{2}{0}p^2p+\binom{2}{0}p^2q+\binom{2}{1}pqp+\binom{2}{1}pqq+\binom{2}{2}q^2p+\binom{2}{2}q^2q=$$

$$=\binom{2}{0}p^3+\underbrace{\binom{2}{0}p^2q+\binom{2}{1}p^2q}+\underbrace{\binom{2}{1}pq^2+\binom{2}{2}pq^2}+\binom{2}{2}q^3=$$

$$=\binom{2}{0}p^3+\underbrace{\left[\binom{2}{0}+\binom{2}{1}\right]p^2q}+\underbrace{\left[\binom{2}{1}+\binom{2}{2}\right]pq^2}+\binom{2}{2}q^3=$$

$$=\binom{2}{0}p^3+\underbrace{\binom{3}{1}p^2q}+\underbrace{\binom{3}{2}pq^2}+\binom{2}{2}q^3$$

pero

$$\binom{2}{0}=\binom{3}{0};\qquad \binom{2}{2}=\binom{3}{3}$$

luego

$$\boxed{(p+q)^3=\binom{3}{0}p^3+\binom{3}{1}p^2q+\binom{3}{2}pq^2+\binom{3}{3}q^3}$$

4.1 Especifique las propiedades por las que efectúan cada uno de los pasos en el cálculo anterior de $(p+q)^3$.

Si multiplicamos ambos miembros de la igualdad anterior por $p+q$, obtenemos:

$$(p+q)^3(p+q)=\left[\binom{3}{0}p^3+\binom{3}{1}p^2q+\binom{3}{2}pq^2+\binom{3}{3}q^3\right](p+q)$$

luego

$$(p+q)^4=\underbrace{\binom{3}{0}p^3(p+q)}+\underbrace{\binom{3}{1}p^2q(p+q)}+\underbrace{\binom{3}{2}pq^2(p+q)}+\underbrace{\binom{3}{3}q^3(p+q)}=$$

$$=\binom{3}{0}p^3p+\underbrace{\binom{3}{0}p^3q}+\underbrace{\binom{3}{1}p^2qp}+\underbrace{\binom{3}{1}p^2qq}+\underbrace{\binom{3}{2}pq^2p}+\underbrace{\binom{3}{2}pq^2q}+\underbrace{\binom{3}{3}q^3p}+\binom{3}{3}q^3q=$$

$$=\binom{3}{0}p^4+\underbrace{\left[\binom{3}{0}+\binom{3}{1}\right]p^3q}+\underbrace{\left[\binom{3}{1}+\binom{3}{2}\right]p^2q^2}+\underbrace{\left[\binom{3}{2}+\binom{3}{3}\right]pq^3}+\binom{3}{3}q^4=$$

$$=\binom{4}{0}p^4+\underbrace{\binom{4}{1}p^3q}+\underbrace{\binom{4}{2}p^2q^2}+\underbrace{\binom{4}{3}pq^3}+\binom{4}{4}q^4$$

EJERCICIOS

4.2 Comprobar que

$$(p+q)^5=\binom{5}{0}p^5+\binom{5}{1}p^4q+\binom{5}{2}p^3q^2+\binom{5}{3}p^2q^3+\binom{5}{4}pq^4+\binom{5}{5}q^5$$

a partir de la expresión anterior, de modo análogo a como se llegó a ésta a partir de $(p+q)^3$.

4.3 Análogamente para $(p+q)^6$.

Nos preguntamos ahora si será cierto que

$$(p+q)^h=\binom{h}{0}p^h+\binom{h}{1}p^{h-1}q+\binom{h}{2}p^{h-2}q^2+\ldots+\binom{h}{h}q^h$$

Es evidente que se trata de una propiedad que depende esencialmente del número natural h. Por tanto, parece natural aplicar el método de inducción, tratado en el párrafo 7 del § anterior.

EJERCICIO

4.4 Suponiendo cierta la expresión anterior, demostrar a partir de ella que

$$(p+q)^{h+1}=\binom{h+1}{0}p^{h+1}+\binom{h+1}{1}p^hq+\ldots+\binom{h+1}{h+1}q^{h+1}$$

del mismo modo que se ha operado en los casos de los ejercicios 4.2 y 4.3.

• TEOREMA 4.1: *La siguiente expresión, llamada fórmula del binomio de Newton, generaliza los resultados anteriores:*

$$(p+q)^n=\binom{n}{0}p^n+\binom{n}{1}p^{n-1}q+\binom{n}{2}p^{n-2}q^2+\ldots+\binom{n}{h}p^{n-h}q^h+\ldots+\binom{n}{n}q^n$$

Demostración: Ya hemos visto, al principio de este párrafo, que la expresión anterior es cierta para $n=1$. Por otra parte, en el ejercicio 4.4, hemos visto que supuesta cierta para $n=h$, entonces también es cierta para $n=h+1$. Por tanto, es cierta para cualquier número natural n, según dijimos al estudiar el método de inducción.

Basta observar la fórmula de Newton para justificar el hecho de que a los números combinatorios se les llame también *coeficientes binómicos*, pues son los coeficientes del desarrollo de la potencia del binomio $p+q$.

- COROLARIO 4.1:

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}=2^n$$

Demostración: Basta hacer $p=q=1$ en la fórmula del binomio.

EJERCICIOS

4.5 Desarrollar $(x+3)^5$ por la fórmula del binomio, haciendo uso del triángulo de Tartaglia para calcular los números combinatorios o coeficientes binómicos correspondientes.

4.6 Desarrollar $(a-b)^5$ por la fórmula del binomio, teniendo en cuenta que

$$a-b=a+(-b)$$

4.7 Escribir directamente, sin hacer el desarrollo completo, el coeficiente de x^{96} en el desarrollo de $(x+4)^{100}$.

La fórmula del binomio se debe al italiano TARTAGLIA (1500-1557) y fue generalizada por el inglés NEWTON (1642-1727) para exponentes no enteros. El francés PASCAL vivió entre 1623 y 1662.

5. Combinaciones: su formación

Consideremos el conjunto $V=\{a, e, i, o, u\}$, de las vocales. Recordando la definición de *cardinal* de un conjunto, dada al final del párrafo 1 del § 3, se tiene que:

$$Card\,(V)=5$$

es decir, el conjunto V está formado por 5 elementos. Formemos los subconjuntos de V, cuyo cardinal es 1:

$$\{a\},\quad \{e\},\quad \{i\},\quad \{o\},\quad \{u\}$$

Diremos que hemos formado así las *combinaciones* de orden 1 con los cinco elementos del conjunto V. Análogamente, las combinaciones de orden 4 con los elementos del conjunto V son:

$$\{e,i,o,u\},\quad \{a,i,o,u\},\quad \{a,e,o,u\},\quad \{a,e,i,u\},\quad \{a,e,i,o\}$$

• DEFINICIÓN 5.1: *Dado un conjunto finito, A, cuyo cardinal sea n, se llaman combinaciones de orden h, con los elementos de A, a los subconjuntos de A, cuyo cardinal sea h.*

Nótese que el número natural h ha de ser menor, o igual, que n, pues a partir de un conjunto de n elementos no se pueden formar subconjuntos cuyo cardinal sea mayor que n.

EJERCICIOS

5.1 Formar las combinaciones de orden 1 con los elementos del conjunto

$$A=\{a, b, c\}$$

5.2 Formar las combinaciones de orden 2 con los elementos del conjunto A del ejercicio anterior.

Supongamos ordenado totalmente el conjunto V:

primer elemento: a
segundo » : e
tercer » : i
cuarto » : o
y quinto » : u

A partir de las combinaciones de orden 1 con los elementos de V, formemos las combinaciones de orden 2, como se indica a continuación:

$\{a\} \longrightarrow \{a,e\}, \{a,i\}, \{a,o\}, \{a,u\}$
$\{e\} \longrightarrow \{e,i\}, \{e,o\}, \{e,u\}$
$\{i\} \longrightarrow \{i,o\}, \{i,u\}$
$\{o\} \longrightarrow \{o,u\}$
$\{u\}$

Así, a partir de $\{a\}$, hemos formado

$$\{a, e\}, \quad \{a, i\}, \quad \{a, o\}, \quad \{a, u\}$$

obtenidas añadiendo, sucesivamente, cada uno de los elementos, e, i, o, u, posteriores al elemento a, en la ordenación total citada anteriormente.

Análogamente, a partir de $\{e\}$, hemos formado:

$$\{e, i\}, \quad \{e, o\}, \quad \{e, u\}$$

pues i, o, u son los elementos posteriores al elemento e. A partir de $\{i\}$, se

han formado

$$\{i, o\}, \quad \{i, u\}$$

pues o, u son los elementos posteriores al elemento i. A partir de $\{o\}$ sólo se ha formado

$$\{o, u\}$$

pues u es el único elemento posterior al elemento o. Por último, a partir de $\{u\}$ no hemos formado ninguna, ya que u es el último elemento en la ordenación anterior.

Observemos que, de este modo, se han formado *todas las combinaciones* de orden 2 con los elementos de V. En efecto, imaginemos cualquier subconjunto de V, cuyo cardinal sea 2. Sea $\{i, e\}$, por ejemplo. Ordenemos sus elementos de acuerdo con la ordenación total anterior: $\{e, i\}$. Como el elemento i es posterior al e, el subconjunto $\{e, i\}$ ya ha sido construido por el procedimiento anterior.

Por otra parte, *dos cualesquiera subconjuntos, de cardinal* 2, *de los obtenidos por el procedimiento anterior*, a partir de las combinaciones de orden 1, son *distintos*, ya que, o proceden de distinta combinación de orden 1, o bien, si proceden de la misma combinación de orden 1, difieren en el elemento posteriormente añadido.

EJERCICIO

3.3 **Formar las combinaciones de orden 1 y, a partir de éstas, las de orden 2, con los elementos del conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.**

Del mismo modo, a partir de las combinaciones de orden 2, con los elementos de V, pueden formarse las combinaciones de orden 3, como se indica a continuación:

$$\{a, e\} \longrightarrow \{a, e, i\}, \quad \{a, e, o\}, \quad \{a, e, u\}$$
$$\{a, i\} \longrightarrow \{a, i, o\}, \quad \{a, i, u\}$$
$$\{a, o\} \longrightarrow \{a, o, u\}$$
$$\{a, u\}$$
$$\{e, i\} \longrightarrow \{e, i, o\}, \quad \{e, i, u\}$$
$$\{e, o\} \longrightarrow \{e, o, u\}$$
$$\{e, u\}$$
$$\{i, o\} \longrightarrow \{i, o, u\}$$
$$\{i, u\}$$
$$\{o, u\}$$

A partir de $\{e, i\}$ hemos formado

$$\{e, i, o\}, \quad \{e, i, u\}$$

obtenidas añadiendo sucesivamente cada uno de los elementos, o, u, posteriores al último elemento, i, de $\{e, i\}$. Análogamente, para los demás casos.

Notemos que *se han formado así todas las combinaciones de orden* 3, con los elementos de V. En efecto, imaginemos cualquier otro subconjunto de V, cuyo cardinal sea 3. Sea, por ejemplo, $\{u, i, e\}$. Ordenamos sus elementos de acuerdo con la ordenación total introducida anteriormente en V, con lo que el subconjunto anterior se escribirá en la forma $\{e, i, u\}$. Si prescindimos del último elemento, u, queda la combinación de orden 2: $\{e, i\}$. Por ser u posterior al último elemento, i, de $\{e, i\}$, el subconjunto $\{e, i, u\}$ ha sido obtenido por el procedimiento anterior.

Por otra parte, *dos subconjuntos cualesquiera,* de cardinal 3, *de los obtenidos por el procedimiento anterior,* a partir de las combinaciones de orden 2, *son distintos,* pues proceden de distinta combinación de orden 2, o, si proceden de la misma, difieren en el elemento añadido posteriormente.

EJERCICIO

5.4 Formar las combinaciones de orden 3 con los elementos del conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, utilizando el ejercicio 5.3.

A partir de las combinaciones de orden 3, con los elementos de V pueden formarse, por el mismo procedimiento, las de orden 4:

$\{a, e, i\} \longrightarrow \{a, e, i, o\}, \quad \{a, e, i, u\}$

$\{a, e, o\} \longrightarrow \{a, e, o, u\}$

$\{a, e, u\}$

$\{a, i, o\} \longrightarrow \{a, i, o, u\}$

$\{a, i, u\}$

$\{a, o, u\}$

$\{e, i, o\} \longrightarrow \{e, i, o, u\}$

$\{e, i, u\}$

$\{e, o, u\}$

$\{i, o, u\}$

EJERCICIOS

5.5 **Demostrar que de este modo se han formado todas las combinaciones de orden 4 con los elementos de V.**

5.6 **Demostrar que dos cualesquiera subconjuntos de V, de cardinal 4, obtenidos por el procedimiento anterior, son distintos.**

5.7 **Formar las combinaciones de orden 4 con los elementos del conjunto**

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

5.8 **Formar las combinaciones de orden 5 con los elementos del conjunto**

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

A partir de las combinaciones de orden 4 con los elementos de V, pueden formarse las de orden 5 , por el procedimiento mencionado anteriormente:

$$\{a, e, i, o\} \longrightarrow \{a, e, i, o, u\}$$
$$\{a, e, i, u\}$$
$$\{a, e, o, u\}$$
$$\{a, i, o, u\}$$
$$\{e, i, o, u\}$$

EJERCICIO

5.9 **Formar las combinaciones de orden 6 con los elementos del conjunto**

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

El procedimiento anterior es general, es decir, aplicable al caso de las combinaciones de orden h, con los elementos de un conjunto cuyo cardinal sea n, supuesto $h \leqslant n$. Así, supuestas formadas las combinaciones de orden h, se forman las de orden $h+1$ añadiendo a cada una de las de orden h los elementos siguientes al último de los que en ella figuran, sucesivamente. Razonando como hemos hecho en el ejemplo V, se prueba que, supuestas formadas las combinaciones de orden h, y aplicando la regla de formación enunciada anteriormente, *se forman todas las combinaciones de orden* $h+1$, *siendo distintos dos cualesquiera subconjuntos de cardinal* $h+1$, obtenidos por el procedimiento anterior.

En la figura 5.1 se esquematiza la formación de las combinaciones de cada orden, a partir de las de orden inmediatamente inferior:

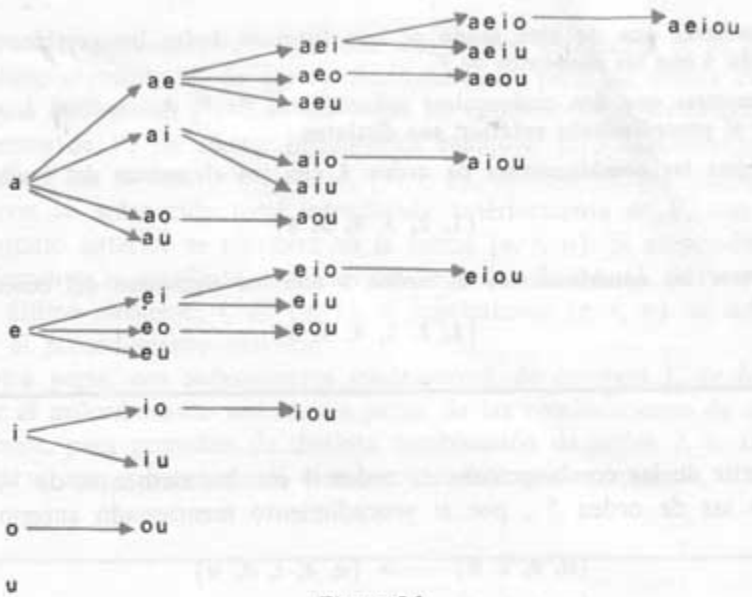


Figura 5.1

Nótese que, para abreviar, hemos escrito aei en vez de $\{a, e, i\}$. Lo mismo se ha hecho para las demás combinaciones de los distintos órdenes.

EJERCICIOS

5.10 Construir un esquema similar al de la figura 5.1, para las combinaciones de órdenes sucesivos, con los elementos del conjunto

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

5.11 Formar todas las combinaciones de orden 3 con los siete colores del arco iris.

6. Número de combinaciones

Como $\varnothing \subset V$ y Card $(\varnothing)=0$, podemos decir que existe una única combinación de orden 0. Si al número de combinaciones de orden 0, formadas a partir del conjunto V, cuyo cardinal es 5, se representa por $C_{5,0}$, tendremos que

$$C_{5,0}=1$$

y recordando que

$$\binom{5}{0}=1$$

se tiene que

$$C_{5,0}=\binom{5}{0}$$

En el párrafo anterior vimos cómo a partir del conjunto V, o de otro conjunto cualquiera, cuyo cardinal sea cinco, se pueden formar 5 combinaciones de orden 1. Si representamos por $C_{5,1}$ al número de combinaciones de orden 1, formadas a partir de un conjunto de cinco elementos, como el conjunto V, se tiene

$$C_{5,1}=5$$

y recordando que

$$\binom{5}{1}=5$$

hallamos que

$$C_{5,1}=\binom{5}{1}$$

También vimos que, a partir del conjunto V, se podían formar diez subconjuntos de cardinal 2. Es decir, si representamos por $C_{5,2}$ al número de combinaciones de orden 2, que pueden formarse a partir de un conjunto cuyo cardinal sea cinco, se tiene que

$$C_{5,2}=10$$

y recordando que el número combinatorio

$$\binom{5}{2}=10$$

hallamos que

$$C_{5,2}=\binom{5}{2}$$

EJERCICIOS

a) Si se designa por $C_{5,3}$ al número de combinaciones de orden 3, que pueden formarse a partir de un conjunto de cardinal 5, como el V, comprobar que

$$C_{5,3}=\binom{5}{3}$$

b) Comprobar que

$$C_{5,4}=\binom{5}{4}; \qquad C_{5,5}=\binom{5}{5}$$

6.3 Como

$$\binom{5}{4}=\binom{5}{1}$$

será:

$$C_{5,4}=C_{5,1}$$

Interpretar este resultado en las combinaciones. Generalice este resultado.

Parece natural preguntarnos ahora: si representamos por $C_{n,h}$ al número de combinaciones de orden h, formadas a partir de un conjunto de cardinal n, ¿será $C_{n,h}=\binom{n}{h}$?

Consideremos de nuevo las combinaciones de orden 3, formadas con los elementos del conjunto V, es decir, los subconjuntos de V cuyo cardinal es 3. Al observar estas combinaciones, que se encuentran representadas en la figura 6.1, notamos que hay unas combinaciones en que figura el elemento a (las

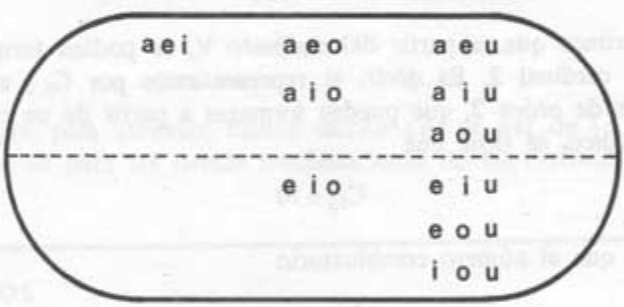


Figura 6.1

que se encuentran encima de la línea de trazo discontinuo) y otras en que no aparece el elemento a (las que se encuentran debajo de la misma línea). Si en aquellas en que figura el elemento a, suprimimos dicho elemento a, nos que-

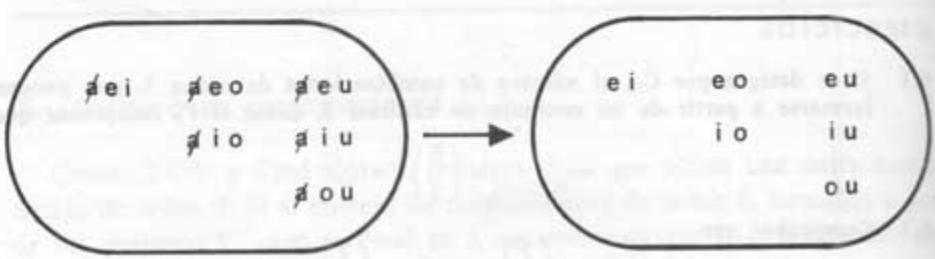


Figura 6.2

dan, como se indica en la figura 6.2, los subconjuntos de cardinal 2 que se pueden formar a partir del conjunto de cardinal 4

$$\{e, i, o, u\}$$

es decir, las combinaciones de orden 2, que se pueden formar a partir del conjunto $\{e, i, o, u\}$. El número de estas combinaciones de orden 2 será $C_{4,2}$, luego el número de combinaciones de orden 3, en que aparece el elemento a será $C_{4,2}$. Aquellos subconjuntos de cardinal 3, del conjunto V, en que no figura el elemento a (situados bajo la línea discontinua en la figura 6.1) son los subconjuntos de 3 elementos, formados a partir del conjunto de cuatro elementos $\{e, i, o, u\}$. Por tanto, hay $C_{4,3}$ combinaciones de orden 3, formadas con elementos del conjunto V, en las que no aparece el elemento a. El número total, $C_{5,3}$, de combinaciones de orden 3, formadas con los elementos del conjunto V, será:

$$C_{5,3}=C_{4,2}+C_{4,3}=\binom{4}{2}+\binom{4}{3}=\binom{5}{3}$$

EJERCICIO

6.4 Con un razonamiento análogo al que acaba de hacerse, demostrar que

$$C_{5,3}+C_{5,4}=C_{6,4}$$

utilizando el conjunto $\{r, s, t, u, v, w\}$.

• TEOREMA 6.1: *El número $C_{n,h}$ de combinaciones de orden h que se pueden formar a partir de un conjunto de n elementos ($n \geqslant h$) es igual al número combinatorio* $\binom{n}{h}$.

Demostración: Razonemos por inducción. Es evidente que

$$C_{1,1}=1=\binom{1}{1}$$

pues a partir de un conjunto unitario sólo puede formarse una combinación de orden 1. Además, como $\varnothing$ está contenido en cualquier conjunto, será

$$C_{1,0}=1=\binom{1}{0}$$

Luego el enunciado del teorema 6.1 es cierto para $n=1$. Supongámoslo también

cierto para $n=h$, es decir, admitamos que se verifica:

$$C_{h,0}=\binom{h}{0};\quad C_{h,1}=\binom{h}{1};\quad C_{h,2}=\binom{h}{2};\ \ldots;\ C_{h,h}=\binom{h}{h}$$

Imaginemos formadas todas las combinaciones de orden i a partir de un conjunto de cardinal $h+1$. De esas $C_{h+1,i}$ combinaciones, hay unas en que figura un elemento fijo, y otras en que no figura ese elemento. Si en aquéllas en que figura dicho elemento fijo prescindimos de él, nos quedan las $C_{h,i-1}$ combinaciones de orden $i-1$ de los h elementos restantes. Además, aquéllas en que no figura dicho elemento fijo serán las $C_{h,i}$ combinaciones de orden i de los h elementos restantes. Se tiene, por tanto,

$$C_{h+1,i}=C_{h,i-1}+C_{h,i}=\binom{h}{i-1}+\binom{h}{i}=\binom{h+1}{i}$$

EJERCICIOS

6.5 Formar las combinaciones de orden 2 a partir del conjunto

$$\{a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6,\ a_7\}$$

Comprobar que el número $C_{7,2}$ de tales combinaciones es $\binom{7}{2}$.

6.6 ¿De cuántas maneras pueden elegirse 5 personas a partir de un conjunto de 40 personas?

El número total de subconjuntos del conjunto V será:

$$\binom{5}{0}+\binom{5}{1}+\binom{5}{2}+\binom{5}{3}+\binom{5}{4}+\binom{5}{5}$$

y teniendo en cuenta el corolario 4.1 podemos afirmar que *el conjunto V tiene* 2^5 *subconjuntos.*

EJERCICIO

6.7 En el ejemplo 8.1 del § 2 se formaron todos los subconjuntos del conjunto

$$H=\{a,\ e,\ u\}$$

Expresar el número de tales subconjuntos como potencia de 2, e interpretar el resultado.

• PROPOSICIÓN 6.2: *Un conjunto de n elementos posee* 2^n *subconjuntos.*

7. Permutaciones

El conjunto unitario $\{a\}$ sólo puede ordenarse de un modo único. El conjunto $\{a, b\}$ puede ordenarse totalmente de dos modos:

$$ab \qquad ba$$

según que a sea anterior a b, o bien a sea posterior a b. El conjunto $\{a, b, c\}$ puede ordenarse totalmente de varios modos:

$$abc, \quad acb, \quad bac, \quad bca, \quad cab, \quad cba$$

* DEFINICIÓN 7.1: *Dado un conjunto finito A, de cardinal h, se llaman permutaciones a las ordenaciones totales que pueden hacerse con los elementos del conjunto A.*

A partir del conjunto $\{a, b\}$, pasamos al conjunto $\{a, b, c\}$ añadiendo el nuevo elemento c. A partir de la permutación ab, del conjunto $\{a, b\}$, podemos construir tres permutaciones del conjunto $\{a, b, c\}$, haciendo que el nuevo elemento c ocupe las tres posiciones posibles:

$\uparrow ab$ anterior al elemento $a \longrightarrow cab$

$a \uparrow b$ posterior al elemento a y anterior a $b \longrightarrow acb$

$ab \uparrow$ posterior al elemento $b \longrightarrow abc$

Análogamente, a partir de la permutación ba, del conjunto $\{a, b\}$, obtenemos las tres permutaciones:

$$\begin{array}{ccc} cba, & bca, & bac \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \end{array}$$

del conjunto $\{a, b, c\}$, haciendo que el nuevo elemento c ocupe sucesivamente las tres posibles posiciones indicadas.

Observemos que se han formado así seis permutaciones para el conjunto $\{a, b, c\}$:

$$\begin{array}{llll} ab \longrightarrow & cab, & acb, & abc \\ ba \longrightarrow & cba, & bca, & bac \end{array}$$

Notemos que *dos cualesquiera de estas seis permutaciones son distintas.* En efecto: si proceden de la misma permutación de $\{a, b\}$, como acb y abc (que proceden ambas de la permutación ab), entonces difieren en la posición del nuevo elemento c, y si proceden de distinta permutación de $\{a, b\}$, como acb y bac, entonces ya difieren en el orden de a respecto de b.

Además, *se han formado así todas las posibles ordenaciones del conjunto* $\{a, b, c\}$. En efecto, imaginemos cualquier ordenación de este conjunto.

Sea, por ejemplo *bca*. Si prescindimos del elemento *c* en esta permutación, nos queda *ba*, que es una ordenación de $\{a, b\}$. Pero *bca* se obtiene a partir de *ba*, añadiendo el elemento *c* en una de las posibles posiciones. Luego el procedimiento anterior permite construir todas las permutaciones de $\{a, b, c\}$ a partir de las de $\{a, b\}$.

De modo análogo, supuestas formadas todas las permutaciones del conjunto $\{a, b, c\}$, para formar las del conjunto $\{a, b, c, d\}$ haremos que el nuevo elemento *d* ocupe todas las posibles posiciones en cada una de las permutaciones de $\{a, b, c\}$, como se indica a continuación:

$\uparrow c \uparrow a \uparrow b \uparrow$	$\longrightarrow$ *dabc,*	*cdab,*	*cadb,*	*cabd*
a c b	$\longrightarrow$ *dacb,*	*adcb,*	*acdb,*	*acbd*
a b c	$\longrightarrow$ *dabc,*	*adbc,*	*abdc,*	*abcd*
c b a	$\longrightarrow$ *dcba,*	*cdba,*	*cbda,*	*cbad*
b c a	$\longrightarrow$ *dbca,*	*bdca,*	*bcda,*	*bcad*
b a c	$\longrightarrow$ *dbac,*	*bdac,*	*badc,*	*bacd*

EJERCICIOS

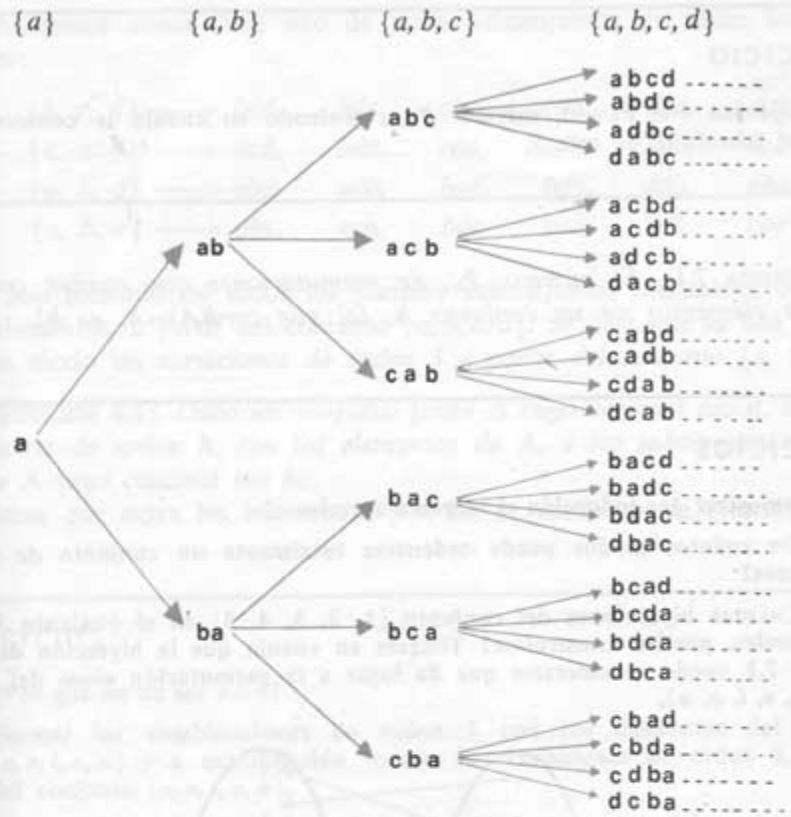
7.1 **Probar que dos cualesquiera permutaciones así obtenidas, a partir del conjunto $\{a, b, c, d\}$, son distintas, razonando como se ha hecho en $\{a, b, c\}$.**

7.2 **Probar que se han formado de este modo todas las posibles permutaciones de $\{a, b, c, d\}$, razonando como hemos hecho para $\{a, b, c\}$.**

7.3 **Formar todas las permutaciones de $\{a, b, c, d, e\}$, a partir de las ya formadas de $\{a, b, c, d\}$, siguiendo el procedimiento anterior.**

El procedimiento anterior es totalmente general. Es decir, supuestas formadas las permutaciones de *h* elementos, para formar las de $h+1$ elementos, basta hacer que el nuevo elemento ocupe todas las posiciones posibles, en cada una de las permutaciones ya formadas de *h* elementos. Dos cualesquiera de las permutaciones así obtenidas son distintas y además se forman todas ellas por este procedimiento. Para probarlo basta razonar del mismo modo que lo hemos hecho para pasar de las permutaciones de $\{a, b\}$ a las de $\{a, b, c\}$.

En el siguiente esquema se resume el proceso de formación de las permutaciones por el procedimiento anteriormente explicado:



Si designamos por P_1 al número de permutaciones del conjunto $\{a\}$, o de cualquier otro conjunto unitario, se tiene que:

$$P_1=1$$

A partir del conjunto $\{a\}$ se forman las permutaciones *ab* y *ba* del conjunto $\{a, b\}$. Si designamos por P_2 al número de permutaciones de $\{a, b\}$, o de cualquier otro conjunto de cardinal 2, se tiene que

$$P_2=2=1\cdot 2=2!$$

Designemos por P_3 al número de combinaciones de $\{a, b, c\}$, o de cualquier otro conjunto de cardinal 3; ya vimos cómo a partir de cada permutación de $\{a, b\}$ se formaban 3 permutaciones de $\{a, b, c\}$. Por tanto:

$$P_3=P_2\cdot 3=2!3=3!$$

Análogamente, a partir de cada permutación de $\{a, b, c\}$ se forman 4 permutaciones de $\{a, b, c, d\}$, pues el nuevo elemento d puede situarse en cuatro posiciones. Por tanto:

$$P_4=P_3\cdot 4=3!4=4!$$

EJERCICIO

7.4 Supuesto que $P_h = h!$, calcular P_{h+1}, teniendo en cuenta la consecuencia a) del párrafo 1 de este §.

• TEOREMA 7.1: *El número, P_h, de permutaciones que pueden construirse con los elementos de un conjunto A, tal que card(A)=h, es h!*

EJERCICIOS

7.5 Demostrar por inducción el teorema anterior.

7.6 ¿De cuántos modos puede ordenarse totalmente un conjunto de seis personas?

7.7 ¿Cuántas biyecciones del conjunto {1, 2, 3, 4, 5} en el conjunto V, de las vocales, pueden construirse? Téngase en cuenta que la biyección de la figura 7.1 puede considerarse que da lugar a la permutación *eiauo* del conjunto {a, e, i, o, u}.

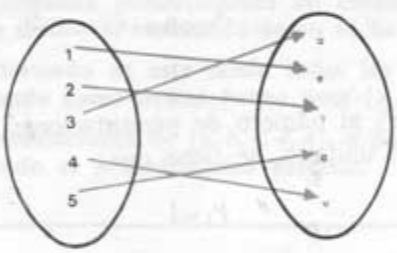


Figura 7.1

7.8 ¿Cuántas biyecciones del conjunto {i, j, k}, en sí mismo, pueden construirse? Constrúyalas y compruebe su número.

7.9 Si Card (A)=10, ¿cuántas biyecciones del conjunto A en sí mismo pueden construirse?

8. Variaciones

• EJEMPLO 8.1: Formemos las combinaciones de orden 3 con los elementos del conjunto $C=\{a, b, c, d\}$:

$$\{b, c, d\}, \quad \{a, c, d\}, \quad \{a, b, d\}, \quad \{a, b, c\}$$

Permutemos ahora cada uno de estos subconjuntos de todos los modos posibles:

$$\{b, c, d\} \longrightarrow bcd,\quad bdc,\quad cbd,\quad cdb,\quad dbc,\quad dcb$$
$$\{a, c, d\} \longrightarrow acd,\quad adc,\quad cad,\quad cda,\quad dac,\quad dca$$
$$\{a, b, d\} \longrightarrow abd,\quad adb,\quad bad,\quad bda,\quad dab,\quad dba$$
$$\{a, b, c\} \longrightarrow abc,\quad acb,\quad bac,\quad bca,\quad cab,\quad cba$$

Se han formado así todos los posibles subconjuntos totalmente ordenados de 3 elementos, a partir del conjunto $\{a, b, c, d\}$. Se dice que se han formado de este modo las *variaciones de orden* 3 *a partir del conjunto* $\{a, b, c, d\}$.

* DEFINICIÓN 8.1: *Dado un conjunto finito A cuyo cardinal sea n, se llaman variaciones de orden h, con los elementos de A, a los subconjuntos ordenados de A cuyo cardinal sea h.*

Nótese que entre los números h y n ha de verificarse la relación: $h \leqslant n$.

EJERCICIOS

8.1 ¿Por qué ha de ser $h \leqslant n$?

8.2 Formar las combinaciones de orden 2 con los elementos del conjunto $\{a, e, i, o, u\}$ y a continuación formar las variaciones de orden 2, a partir del conjunto $\{a, e, i, o, u\}$.

8.3 Formar las variaciones de orden 3 con los elementos del conjunto de las vocales, considerado en el ejercicio anterior.

---

* EJEMPLO 8.2: En el ejemplo 8.1 se ha visto que cada combinación de orden 3 se ha ordenado posteriormente de P_3 formas distintas. Si designamos por $V_{4,3}$ al número de variaciones de orden 3 que pueden formarse a partir del conjunto $\{a, b, c, d\}$, o de cualquier otro conjunto cuyo cardinal sea 4, se tiene que:

$$V_{4,3} = C_{4,3} \cdot P_3 = C_{4,3} \cdot 3! = \binom{4}{3} \cdot 3! = \frac{4^{(3}}{3!} \cdot 3! = 4^{(3} = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$$

EJERCICIO

8.4 Si se designa por $V_{5,2}$ al número de variaciones de orden 2 que pueden formarse a partir de un conjunto de cardinal cinco, como el conjunto $\{a, e, i, o, u\}$, calcular $V_{5,2}$, razonando de modo análogo a como se ha hecho en el ejemplo 8.2 y comprobar que ese número coincide con el de variaciones formadas en el ejercicio 8.2.

• TEOREMA 8.1: Si designamos por $V_{n,h}$ *al número de variaciones que se pueden formar a partir de un conjunto de cardinal* $n (h \leqslant n)$, *se tiene que:*

$$V_{n,h} = C_{n,h} \cdot P_h$$

Demostración: Basta razonar como en el ejemplo 8.2.

• COROLARIO 8.1:

$$V_{n,h} = n^{(h}$$

EJERCICIOS

8.5 Demostrar el corolario 8.1, haciendo uso del ejercicio 2.2.

8.6 En una clase de 28 alumnos se realiza un sorteo con un primero, un segundo y un tercer premio, distintos entre sí. ¿De cuántos modos pueden repartirse los premios?

8.7 Repita el ejercicio anterior, pero ahora suponiendo iguales entre sí los tres premios referidos.

8.8 ¿Cuántas aplicaciones inyectivas del conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$ en el conjunto $\{a, b, c, d, e, f, g\}$ pueden construirse? Téngase en cuenta que la aplicación inyectiva dada por el diagrama de flechas de la figura 8.1 puede considerarse que da lugar a la variación de orden cuatro: *cbeg*.

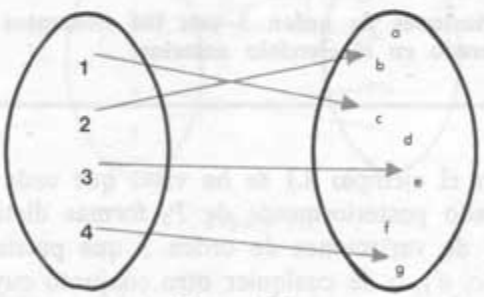


Figura 8.1

8.9 ¿Cuántos subconjuntos pueden formarse a partir del conjunto

$$\{a, b, c, d, e, f, g\}$$

y cuántos de estos subconjuntos tienen por cardinal 4?

8.10 ¿Cuántos subconjuntos ordenados totalmente y de cardinal cuatro pueden formarse a partir del conjunto $\{a, b, c, d\}$?

Otras formas posibles de exponer la Combinatoria las encontrará en los libros:
PAPY, *Mathématique Moderne*, Ed Didier, vol. 5, livre 1.
REY PASTOR, *Análisis Algebraico*, Madrid, 1961, capítulo III.

8 ESTADISTICA

1. Fenómenos aleatorios. Sucesos

En los fenómenos *causales,* supuesta una causa, se sigue un efecto. Así, al aplicar una determinada fuerza hacia arriba (causa) a una piedra de masa conocida, ésta alcanza una altura (efecto), que puede predecirse, con un sencillo cálculo, antes de realizar la experiencia.

Consideremos ahora el fenómeno consistente en lanzar al aire una moneda y observar, una vez que ha caído sobre una superficie plana, la parte que no apoya sobre dicha superficie. Al repetir la experiencia varias veces se obtiene unas veces *cara* y otras *cruz,* sin que pueda predecirse, en cada experiencia particular, si el resultado va a ser cara o cruz. Los fenómenos de este tipo, en que supuesta una causa el efecto es incierto, se llaman fenómenos *aleatorios* o fenómenos de azar.

Cuando lanzamos al aire un dado, tampoco puede predecirse el resultado del experimento, es decir, la cara que va a quedar hacia arriba cuando otra de las caras del dado, su opuesta, apoya sobre una superficie plana horizontal, después de caer. Se trata, por tanto, de otro fenómeno aleatorio.

Cuando nace un nuevo ser, tampoco puede predecirse su sexo. Este es otro fenómeno aleatorio.

Otros ejemplos de fenómenos aleatorios son: sacar una carta de una baraja, supuesta bien barajada; sacar una bola de una urna que contiene varias de distintos colores; obtener premio en la lotería, etc.

Las causas de esta incertidumbre, en el resultado de una experiencia aleatoria, pueden ser de origen diverso. En el caso del dado, son la imposibilidad de medir con toda exactitud la fuerza impulsora aplicada, la complicación del cálculo de la trayectoria, etc. Otras veces las causas son de origen histórico: hoy podría predecirse el sexo si se conocieran veintisiete generaciones anteriores.

EJERCICIO

1.1 Busque ejemplos de fenómenos aleatorios.

Los posibles resultados a que puede dar lugar un experimento aleatorio se llaman *sucesos elementales*. En el caso del dado, referido anteriormente, los sucesos elementales son

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$$

y en el caso de la moneda

cara, cruz

Al conjunto de todos los sucesos elementales a que puede dar lugar un experimento aleatorio le llamaremos *conjunto total de sucesos*. En el caso del dado, el conjunto total de sucesos será

$$S=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$$

que podemos representar intuitivamente con la ayuda de la figura 1.1. A los subconjuntos del conjunto total de sucesos se les llama *sucesos*. En el caso

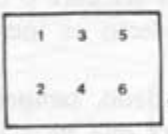


Figura 1.1

del dado, el suceso A, consistente en obtener un número par, como resultado del experimento, será el subconjunto de S siguiente:

$$A=\{2,\ 4,\ 6\}$$

que se puede representar intuitivamente como se indica en la figura 1.2. Aná-

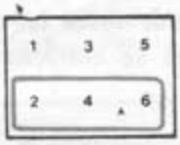


Figura 1.2

logamente, el suceso B, consistente en obtener un múltiplo de tres al lanzar el dado, será:

$$B=\{3,\ 6\}$$

que es otro subconjunto de S. Se encuentra representado en el diagrama de la figura 1.3.

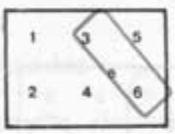


Figura 1.3

* DEFINICIÓN 1.1: *Dado un suceso A, se llama suceso contrario a su conjunto complementario, respecto del conjunto total de sucesos.*

* EJEMPLO 1.1: En el caso del dado, el suceso contrario del suceso

$$B=\{3,\ 6\}$$

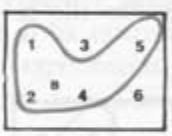


Figura 1.4

será el suceso

$$\overline{B}=\{1,\ 2,\ 4,\ 5\}$$

representado en la figura 1.4.

Nótese que el suceso contrario del B se representa por $\overline{B}$.

* DEFINICIÓN 1.2: *Dos sucesos, C y D, se dicen incompatibles cuando no pueden suceder simultáneamente, es decir, cuando*

$$C \cap D=\varnothing$$

* EJEMPLO 1.2: En el caso del dado, los sucesos

$$C=\{1,\ 2\}$$

consistente en obtener un número menor que tres, y

$$D=\{6\}$$

consistente en obtener un número mayor que cinco, son incompatibles, ya que

$$C \cap D=\varnothing$$

como se muestra en la figura 1.5.

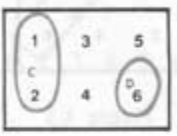


Figura 1.5

• EJEMPLO 1.3: Los sucesos A y B, representados en las figuras 1.2 y 1.3, no son incompatibles, pues

$$A \cap B=\{6\} \neq \varnothing$$

como se muestra en la figura 1.6. Por ello se dice que los sucesos A y B son compatibles.

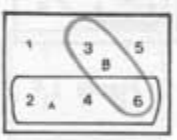


Figura 1.6

EJERCICIOS

1.2 En el caso del dado, ponga un ejemplo, distinto de los anteriores, de sucesos contrarios.

1.3 En el mismo caso del dado, ponga un ejemplo, distinto de los anteriores, de sucesos incompatibles y otro de sucesos compatibles.

1.4 En el caso de la baraja española de cuarenta cartas, ponga ejemplos de sucesos contrarios y de incompatibles. Utilice diagramas similares a los de las figuras anteriores de este párrafo.

1.5 Analice el caso de la moneda, para poner un ejemplo de sucesos contrarios y de incompatibles.

El conjunto total de sucesos, es decir, el conjunto de todos los sucesos elementales a que puede dar lugar un experimento aleatorio, constituye el llamado *suceso cierto*. En el caso del dado, el suceso cierto será

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

El suceso contrario del suceso cierto se llama *suceso imposible*. Es decir, el suceso imposible es $\varnothing$.

2. Frecuencias: sus propiedades

• EJEMPLO 2.1: En el experimento aleatorio consistente en lanzar al aire un dado, consideremos el suceso $B=\{3, 6\}$. Lancemos el dado veinte veces. Supongamos que siete veces, de las veinte, ocurre el suceso B, es decir, se obtiene uno de los dos números

$$3, 6$$

y las trece veces restantes ocurre el suceso contrario, $\bar{B}$, es decir, se obtiene uno de los cuatro números

$$1, 2, 4, 5$$

Diremos, por ello, que la *frecuencia absoluta* del suceso B ha sido siete. Ahora bien, decir que el suceso B ha ocurrido siete veces tiene poco interés, si no se menciona el número de experiencias realizadas. Más interesante es el cociente de la frecuencia absoluta de un suceso y el número de experiencias realizadas, es decir, el número

$$\frac{7}{20}$$

en nuestro caso. A este número se le llama *frecuencia relativa* del suceso B, o simplemente *frecuencia* del suceso B.

• DEFINICIÓN 2.1: *Si repetimos n veces un experimento aleatorio y el suceso B ocurre n_B veces, de las n veces, se llama frecuencia absoluta del suceso B al número n_B y se llama frecuencia relativa del suceso B, o simplemente frecuencia del suceso B, al cociente*

$$\frac{n_B}{n}$$

A la frecuencia del suceso B se la representa por

$$fr\,(B)$$

Por tanto,

$$fr\,(B)=\frac{n_B}{n}$$

• EJEMPLO: En el caso del ejemplo 2.1, se tiene

$$n=20; \qquad n_B=7; \qquad fr\,(B)=\frac{7}{20}=0{,}35$$

EJERCICIOS

2.1 Al lanzar al aire un dado cincuenta veces se obtiene veintinueve veces, de las cincuenta, un número par y las restantes veces impar. Calcular la frecuencia relativa del suceso A, consistente en obtener par. ¿Qué tanto por ciento de veces se ha obtenido par?

2.2 Láncese al aire una moneda quince veces y anótense los resultados obtenidos. Calcúlese la frecuencia del suceso cara.

Vamos a estudiar ahora las propiedades de las frecuencias.

Dado un suceso A, como su frecuencia absoluta, n_A, ha de ser menor o igual al número n, de experiencias realizadas, la frecuencia relativa del suceso A será un número comprendido entre cero y uno, es decir,

$$0 \leqslant fr\,(A)=\frac{n_A}{n} \leqslant 1$$

Si realizamos n experiencias, la frecuencia absoluta del suceso cierto es n, por lo que

$$fr\,(\text{suceso cierto})=\frac{n}{n}=1$$

La frecuencia absoluta del suceso imposible es cero, por lo que

$$fr\,(\text{suceso imposible})=\frac{0}{n}=0$$

Consideremos un experimento aleatorio que puede dar lugar, entre otros, a los sucesos A y B. Es evidente que los subconjuntos

$$A-B, \qquad A\cap B, \qquad B-A$$

determinan una partición del conjunto $A\cup B$, como se visualiza en la figu-

ra 2.1, donde aparecen:

$A - B$ rayado en negro únicamente
$A \cap B$ rayado en rojo y en negro, y
$B - A$ rayado en rojo únicamente

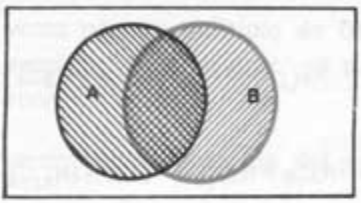


Figura 2.1

Por tanto,

$$A \cup B = (A - B) + (A \cap B) + (B - A)$$

• EJEMPLO 2.2: Caso del dado, esquematizado en la figura 2.2

$$A = \{2, 4, 6\}; \qquad B = \{3, 6\}$$
$$\{2, 3, 4, 6\} = \{2, 4\} + \{6\} + \{3\}$$
$$\widetilde{A \cup B} = \widetilde{(A - B)} + \widetilde{(A \cap B)} + \widetilde{(B - A)}$$

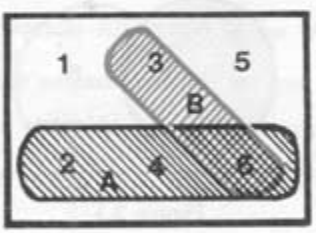


Figura 2.2

EJERCICIO

2.3 **En el experimento aleatorio consistente en extraer una carta de la baraja, se consideran los sucesos:**

***R* consistente en obtener** rey;
***C* consistente en obtener** copa.

Hágase una partición del conjunto $R \cup C$, de modo análogo al del ejemplo 2.2. Utilícese una figura análoga a la 2.2.

Por tanto, si llamamos:

$n_{A \cup B}$ a la frecuencia absoluta del suceso $A \cup B$
n_{A-B} a la frecuencia absoluta del suceso $A - B$
$n_{A \cap B}$ a la frecuencia absoluta del suceso $A \cap B$, y
n_{B-A} a la frecuencia absoluta del suceso $B - A$

se tendrá

$$n_{A \cup B} = n_{A-B} + n_{A \cap B} + n_{B-A}$$

luego

$$n_{A \cup B} = (n_{A-B} + n_{A \cap B} + n_{B-A}) + (n_{A \cap B} - n_{A \cap B})$$

de donde

$$n_{A \cup B} = (n_{A-B} + n_{A \cap B}) + (n_{B-A} + n_{A \cap B}) - n_{A \cap B}$$

Pero

$$A = (A - B) + (A \cap B)$$

como se muestra en la figura 2.3, donde aparece

$A \cap B$ rayado en rojo, y
$A - B$ rayado en negro,

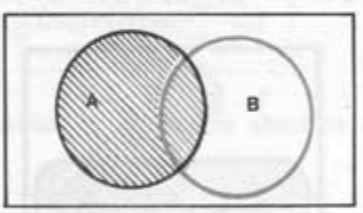


Figura 2.3

de modo que A está representado por todo lo rayado, en uno u otro color.

Por tanto,

$$n_A = n_{A-B} + n_{A \cap B}$$

Análogamente

$$n_B = n_{B-A} + n_{A \cap B}$$

luego

$$n_{A \cup B} = n_A + n_B - n_{A \cap B}$$

de donde

$$\frac{n_{A \cup B}}{n} = \frac{n_A}{n} + \frac{n_B}{n} - \frac{n_{A \cap B}}{n}$$

es decir,

$$fr(A \cup B) = fr(A) + fr(B) - fr(A \cap B)$$

• EJEMPLO 2.3: Se han verificado veinte lanzamientos de un dado y se han obtenido:

5 veces par, no múltiplo de tres
4 veces múltiplo de tres, no par
2 veces el resultado seis

Se tiene, pues, de acuerdo con la notación del ejemplo 2.2:

$$n = 20; \quad n_{A-B} = 5; \quad n_{B-A} = 4; \quad n_{A \cap B} = 2$$

luego:

$$n_A = 5 + 2 = 7; \quad n_B = 4 + 2 = 6; \quad n_{A \cup B} = 11$$

$$\frac{11}{20} = \frac{7}{20} + \frac{6}{20} - \frac{2}{20}$$

$$\widetilde{fr(A \cup B)} = \widetilde{fr(A)} + \widetilde{fr(B)} - \widetilde{fr(A \cap B)}$$

EJERCICIOS

2.4 **Opérese, a partir del ejercicio 2.3, como se ha hecho en el ejemplo anterior, para los siguientes datos:**
se han verificado cien extracciones, de las que

8 veces se ha obtenido rey, **sin ser** copa
15 veces se ha obtenido copa, **sin ser** rey
3 veces se ha obtenido el rey **de** copas

Compruebe que

$$fr(R \cup C) = fr(R) + fr(C) - fr(R \cap C)$$

Si los sucesos A y B son incompatibles, $A \cap B$ será el suceso imposible, es decir,

$$A \cap B = \varnothing$$

luego

$$fr(A \cap B) = 0$$

quedando

$$fr(A \cup B) = fr(A) + fr(B)$$

En realidad, en este caso, por ser los subconjuntos A y B disjuntos, podrá escribirse $A+B$ en vez de $A \cup B$, luego se tiene

$$\boxed{fr(A+B)=fr(A)+fr(B)}$$

• EJEMPLO 2.4: En el caso de la baraja, los sucesos *copa* y *espada* son incompatibles, luego

$$fr(C+E)=fr(C)+fr(E)$$

donde E representa al suceso *espada*.

EJERCICIOS

2.5 En el caso de la moneda, considérense los sucesos incompatibles cara y cruz. **Con los resultados obtenidos en el ejercicio 2.2, comprobar que**

$$fr(F+Z)=fr(F)+fr(Z)$$

donde F representa al suceso cara **y Z al suceso** cruz.

2.6 Demostrar que si A, B y C son tres sucesos incompatibles dos a dos, se verifica

$$fr(A+B+C)=fr(A)+fr(B)+fr(C)$$

• EJEMPLO 2.5: Volvamos sobre el ejemplo 2.3, donde se tenía $n_A=7$. Consideremos sólo estas siete experiencias, olvidándonos, por ahora, de las restantes, en las que no ha ocurrido el suceso A. De estas siete experiencias, en dos de ellas ha ocurrido el suceso B. Por ello diremos que la frecuencia del suceso B, *condicionada por el suceso* A, es

$$\frac{2}{7}$$

• DEFINICIÓN 2.2: *Sea un experimento aleatorio que puede dar lugar, entre otros, a los sucesos A y B. Se llama frecuencia del suceso B, condicionada por el suceso A, al cociente*

$$\frac{n_{A\cap B}}{n_A}$$

La frecuencia de B condicionada por A se representa por

$$fr(B/A)$$

Por tanto,

$$fr\,(B/A)=\frac{n_{A\cap B}}{n_A}$$

• EJEMPLOS: En el ejemplo 2.5 se tenía

$$n_A=7;\qquad n_{A\cap B}=2$$

luego

$$fr\,(B/A)=\frac{2}{7}$$

Análogamente, la frecuencia de A condicionada por B se definirá en la forma

$$fr\,(A/B)=\frac{n_{B\cap A}}{n_B}$$

y para los datos del ejemplo 2.3, donde se tenía

$$n_B=6;\qquad n_{B\cap A}=2$$

será

$$fr\,(A/B)=\frac{2}{6}$$

EJERCICIO

2.7 Con los datos del ejercicio 2.4, calcular las frecuencias condicionadas

$$fr\,(R/C)\qquad \text{y}\qquad fr\,(C/R)$$

Si multiplicamos los dos miembros de la expresión

$$fr\,(B/A)=\frac{n_{A\cap B}}{n_A}$$

por n_A, obtenemos

$$n_A\,fr\,(B/A)=n_{A\cap B}$$

Dividiendo ahora por el número, n, de experiencias realizadas, queda

$$\frac{n_A}{n}\,fr(B/A)=\frac{n_{A\cap B}}{n}$$

es decir,

$$fr(A)\,fr(B/A)=fr(A\cap B)$$

EJERCICIO

2.8 A partir de

$$fr(A/B)=\frac{n_{B\cap A}}{n_B}$$

probar que

$$fr(B\cap A)=fr(B)\,fr(A/B)$$

Por tanto, se tiene

$$fr(A\cap B)=fr(A)\,fr(B/A)=fr(B)\,fr(A/B)$$

es decir, la frecuencia del suceso intersección de otros dos sucesos es igual a la frecuencia de uno cualquiera de ellos por la frecuencia del otro, condicionada por éste.

EJERCICIOS

2.9 Comprobar la expresión anterior para el caso del dado, con los datos del ejemplo 2.3.

2.10 Repita el ejercicio anterior, ahora para el caso de la baraja, con los datos del ejercicio 2.4.

---

3. Probabilidades

Consideremos el experimento aleatorio consistente en lanzar al aire la moneda. Realicemos la experiencia varias veces y calculemos la frecuencia relativa del suceso cara. Supongamos que se han obtenido los resultados de la tabla de la figura 3.1.

Se observa que cuando el número de experiencias realizadas se hace muy grande, la frecuencia relativa del suceso cara tiende a estabilizarse hacia el número 0,5.

Esta observación experimental de que la frecuencia relativa tiende a esta-

Número de experiencias realizadas	*Frecuencia absoluta del suceso cara*	*Frecuencia relativa del suceso cara*
1	1	1
2	2	1
3	2	2/3
4	3	3/4
5	3	3/5
6	4	4/6
7	4	4/7
8	4	4/8
9	4	4/9
10	4	4/10
11	5	5/11
12	5	5/12
13	6	6/13
14	7	7/14
15	8	8/15

Figura 3.1

bilizarse hacia un cierto número, cuando el número de experiencias realizadas es muy grande, puede comprobarse en multitud de fenómenos aleatorios.

Este número hacia el cual tienden a estabilizarse las frecuencias relativas, cuando el número de experiencias realizadas se hace tan grande como imaginemos, se llama *probabilidad*.

Del concepto de *frecuencia* se pasa, de este modo, por un proceso de abstracción, al concepto de probabilidad. Como en un experimento aleatorio, a cada suceso podemos asignarle un número, su frecuencia, análogamente la probabilidad asocia a cada suceso un número. La probabilidad es, por tanto, una aplicación del conjunto de los sucesos en el conjunto de los números y que ha de verificar unas ciertas propiedades, que serán reflejos de las propiedades de las frecuencias.

EJERCICIO

3.1 ¿Cuántos sucesos pueden considerarse en el caso del dado?

Para las frecuencias hemos encontrado, en el párrafo anterior, las siguientes propiedades:

F1) $0 \leqslant fr(A) \leqslant 1$.

F2) $fr\,(\textit{suceso cierto}) = 1$.

F3) $fr\,(A \cup B) = fr\,(A) + fr\,(B) - fr\,(A \cap B)$.

F4) $fr\,(A \cap B) = fr\,(A)\,fr\,(B/A) = fr\,(B)\,fr\,(A/B)$.

El concepto de probabilidad se introduce axiomáticamente, postulando sus propiedades, por un proceso de abstracción, a partir de las propiedades de las frecuencias, como se indica a continuación.

• DEFINICIÓN 3.1: *Dado un experimento aleatorio, se llama probabilidad a una aplicación, P, del conjunto de los sucesos* (a los que puede dar lugar ese experimento aleatorio) *en el conjunto de los números reales, que verifica las siguientes propiedades:*

P1) *Cualquiera que sea el suceso A, se verifica:* $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.

P2) P(*suceso cierto*) = 1.

P3) *Cualesquiera que sean los sucesos A y B, se verifica:*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

donde P(*A*) se lee *probabilidad de A*, etc.

CONSECUENCIAS de la definición anterior:

C1) Si los sucesos *A* y *B* son incompatibles, se verifica

$$P(A \cup B) = P(A + B) = P(A) + P(B)$$

C2) Para el suceso $\overline{A}$, contrario del *A*, se verifica

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

C3) $$P\,(\text{suceso imposible}) = 0$$

C4) $$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

EJERCICIO

3.2 Demostrar las cuatro consecuencias anteriores, a partir de la definición 3.1.

Supongamos un fenómeno aleatorio que puede dar lugar a varios sucesos elementales. Sea, por ejemplo, el caso del dado. Admitamos que el dado no está cargado, es decir, que la probabilidad de que al lanzarlo se obtenga como

resultado 2 es igual a la probabilidad de que se obtenga 5, etc. Es decir, supongamos que

$$P(1)=P(2)=P(3)=P(4)=P(5)=P(6)$$

Como los sucesos elementales

$$\{1\},\ \{2\},\ \{3\},\ \{4\},\ \{5\},\ \{6\}$$

son incompatibles, dos a dos, se verificará

$$P(\{1,2,3,4,5,6\})=P(1)+P(2)+P(3)+P(4)+P(5)+P(6)=6P(1)$$

pero $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ es el suceso cierto, luego

$$1=6\,P(1)$$

Por tanto

$$P(1)=\frac{1}{6}=P(2)=\ldots=P(6)$$

La probabilidad del suceso $B=\{3, 6\}$ será

$$P(B)=P(\{3,\ 6\})=P(3)+P(6)=2P(3)=2\cdot\frac{1}{6}=\frac{2}{6}$$

Este experimento aleatorio puede dar lugar a seis sucesos elementales posibles

$$\{1\},\ \{2\},\ \{3\},\ \{4\},\ \{5\},\ \{6\}$$

pero sólo dos de ellos

$$\{3\},\ \{6\}$$

son favorables al suceso B. Hemos obtenido

$$P(B)=\frac{2}{6}=\frac{\text{número de sucesos elementales favorables al suceso } B}{\text{número de sucesos elementales posibles}}$$

El razonamiento anterior es inmediatamente generalizable. Sea un fenómeno aleatorio que puede dar lugar a los sucesos elementales

$$A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_r$$

incompatibles entre sí dos a dos y cuya suma sea el suceso cierto, es decir, de modo que estos r sucesos sean todos los posibles. Consideremos uno de los sucesos, B, a que puede dar lugar este experimento aleatorio y supongamos, por ejemplo, que

$$B=A_1+A_2+\ldots+A_m;\qquad m\leqslant r$$

por lo que diremos que A_1, A_2, ..., A_m son los sucesos elementales favorables al suceso B. Supongamos que no existe ninguna razón que haga suponer que la probabilidad de uno de estos sucesos elementales sea mayor que la de otro de ellos, es decir, supongamos equiprobables todos los sucesos elementales posibles, o sea, admitamos que

$$P(A_1)=P(A_2)=\ldots=P(A_m)=P(A_{m+1})=\ldots=P(A_r)$$

Tendremos:

$$rP(A_1)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_r)=P(A_1+A_2+\ldots+A_m+\ldots+A_r)=1$$

luego

$$P(A_1)=\frac{1}{r}$$

Por tanto,

$$P(B)=P(A_1+A_2+\ldots+A_m)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_m)=mP(A_1)=m\cdot\frac{1}{r}=\frac{m}{r}$$

es decir,

$$P(B)=\frac{m}{r}=\frac{\text{número de sucesos elementales favorables al suceso } B}{\text{número de sucesos elementales posibles}}$$

Este resultado es conocido como *regla de Laplace*, pues fue tomado por el gran físico-matemático francés LAPLACE (1749-1827) como definición de probabilidad:

• DEFINICIÓN 3.2 (de Laplace): La probabilidad de un suceso, en un fenómeno aleatorio que puede dar lugar a varios sucesos elementales *igualmente posibles*, es igual al cociente entre el número de sucesos elementales favorables y el número de sucesos elementales posibles.

Notemos que en esta definición se utiliza la expresión *igualmente posibles* en el sentido de *igualmente probables*. ¡Círculo vicioso!

Volvemos a insistir en que la regla de Laplace solamente es aplicable cuando los sucesos elementales son incompatibles entre sí dos a dos y equiprobables.

EJERCICIOS

3.3 Utilice la regla de Laplace para calcular las siguientes probabilidades:

a) probabilidad de obtener un número par, al lanzar el dado
b) probabilidad de obtener rey, **al extraer una carta de la baraja**
c) probabilidad de obtener cara, **al lanzar una moneda**
d) probabilidad de obtener bola negra, **al extraer una bola de una bolsa que contiene cinco bolas blancas y tres negras.**

3.4 En el caso de la baraja de cuarenta cartas, calcular $P(\text{rey} \cup \text{copa})$.

3.5 En el caso del dado, si llamamos A al suceso consistente en obtener par y B al consistente en obtener múltiplo de tres, calcular

$$P(A \cup B)$$

3.6 En el caso de la baraja de cuarenta cartas, calcular

$$P(\text{copa} \cup \text{espada})$$

3.7 Una bolsa contiene tres bolas blancas, cinco azules y cuatro rojas. Llamemos A al suceso bola azul, B al consistente en obtener bola blanca y R al suceso bola roja. ¿Cuál es el suceso $\bar{A}$, contrario del A? Calcular $P(A)$ y $P(\bar{A})$.

3.8 Se lanzan al aire dos monedas. Calcular la probabilidad de que:

a) ninguna de las dos salga cara
b) se obtenga, al menos, una cara
c) se obtenga una sola cara.

Hemos introducido la definición 3.1 de probabilidad, axiomatizando sus propiedades, sugeridas por las propiedades F1), F2) y F3) de las frecuencias. La propiedad F4) de las frecuencias, de la que hasta ahora no habíamos hecho uso para probabilidades, sugiere la siguiente definición:

• DEFINICIÓN 3.3: *Si un experimento aleatorio puede dar lugar, entre otros, a los sucesos A y B, se llama probabilidad de A condicionada por B al cociente*

$$P(A/B)=\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

lo que tiene sentido supuesto que $P(B) \neq 0$, ya que no puede dividirse por cero, según se dijo en el párrafo 11 del § 6.

Comparemos $P(A/B)$ con $P(A)$.

• EJEMPLO 3.1: Si en el caso del dado consideramos los sucesos

$$A=\{\text{par}\}; \qquad B=\{3,\ 6\}$$

se tiene

$$P(B)=\frac{2}{6}; \qquad P(A)=\frac{3}{6}; \qquad P(A \cap B)=\frac{1}{6}$$

luego

$$P(A/B)=\frac{P(A \cap B)}{P(B)}=\frac{1}{2}$$

Como

$$\frac{1}{2}=\frac{3}{6}$$

se tiene que

$$P(A/B)=P(A)$$

es decir, la probabilidad del suceso A es igual a la probabilidad del suceso A supuesto verificado el suceso B. En otras palabras, la probabilidad del suceso A, condicionado por B, es igual a la probabilidad de A. Por ello diremos que *el suceso A es independiente del suceso B.*

• EJEMPLO 3.2: El resultado del ejemplo anterior no siempre es cierto. Supongamos, en el mismo caso del dado, el suceso C consistente en obtener 4.

Se tiene

$$P(C)=\frac{1}{6}; \qquad P(C\cap A)=\frac{1}{6}$$

$$P(C/A)=\frac{P(C\cap A)}{P(A)}=\frac{1}{3}$$

lo que se visualiza en la figura 3.2. Se tiene, pues,

$$P(C)\neq P(C/A)$$

es decir, la probabilidad de C depende de que se haya verificado previamente A, por lo que diremos que *el suceso C depende del suceso A.*

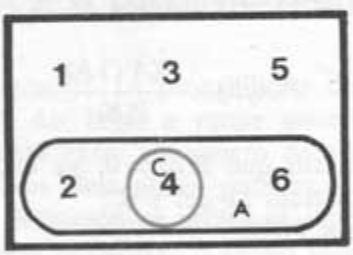


Figura 3.2

• DEFINICIÓN 3.4: *Sea un fenómeno aleatorio que puede dar lugar, entre otros, a los sucesos A y B. Diremos que el suceso A es independiente del suceso B, si se verifica*

$$P(A/B)=P(A)$$

En caso contrario, es decir, si

$$P(A/B)\neq P(A)$$

se dice que el suceso A depende del B.

EJERCICIO

3.9 Estudiar si los siguientes sucesos son independientes:

a) rey y copa, **en el caso de la baraja;**
b) rey y as, **en el caso de la baraja;**
c) copa y oro, **en el caso de la baraja;**
d) copa y caballo, **en el caso de la baraja;**
e) *A* y *C*, **en el caso del dado;**
f) *B* y *A*, **en el caso del dado.**

Nota: En el ejemplo 3.1 se ha visto que *A* es independiente de *B*, mientras que en el apartado f) se pide comprobar si *B* es independiente de *A*. Háganse, para cada apartado, figuras similares a la 3.2.

• PROPOSICIÓN 3.1: *Si A y B son dos sucesos posibles en un fenómeno aleatorio y suponemos que* $P(A)>0$ y $P(B)>0$, *entonces*

$$A \text{ es independiente de } B \Longrightarrow B \text{ es independiente de } A$$

Demostración:

$$P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{P(B)P(A/B)}{P(A)}\overset{\text{Por hipótesis: } P(A/B)=P(A)}{=}\frac{P(B)P(A)}{P(A)}=P(B)$$

pues $P(A\cap B)=P(B)P(A/B)$

según se deduce de la definición 3.3.

• TEOREMA 3.2: *Si A y B son dos sucesos independientes, se verifica*

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)$$

EJERCICIO

3.10 Demuéstrese el teorema anterior, a partir de las definiciones 3.3 y 3.4.

• EJEMPLO 3.3: En el caso del dado, los sucesos *A* y *B* del ejemplo 3.1 vimos que eran independientes, luego

$$\underbrace{P(A\cap B)}_{\frac{1}{6}}=\underbrace{P(A)}_{\frac{3}{6}}\cdot\underbrace{P(B)}_{\frac{2}{6}}$$

EJERCICIOS

3.11 **Comprobar el teorema 3.2 en los apartados del ejercicio 3.9 a los cuales sea aplicable.**

3.12 **Sea un fenómeno aleatorio que puede dar lugar, entre otros, a los sucesos A, B y C. Demostrar que si los sucesos A y B son independientes y, además, el suceso $A \cap B$ es independiente del C, entonces**

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)\,P(B)\,P(C)$$

3.13 **Elija, para el caso de la baraja, un ejemplo en que sea aplicable el resultado del ejercicio anterior y compruébelo.**

• EJEMPLO 3.4: Consideremos ahora el *experimento aleatorio compuesto* consistente en lanzar un dado y a continuación una moneda. Designemos abreviadamente *cara* por F y *cruz* por Z. Representemos por $(2, F)$ el suceso compuesto elemental consistente en obtener 2 en el dado y *cara* en moneda. Los sucesos compuestos elementales a que puede dar lugar este experimento aleatorio son:

$$\begin{array}{llllll} (1, F), & (2, F), & (3, F), & (4, F), & (5, F), & (6, F) \\ (1, Z), & (2, Z), & (3, Z), & (4, Z), & (5, Z), & (6, Z) \end{array}$$

Designemos por $(-, F)$ al suceso compuesto, consistente en obtener cara en la moneda, sin importarnos lo que se ha obtenido en el dado. Si llamamos B al suceso consistente en obtener múltiplo de tres en el experimento aleatorio simple consistente en lanzar el dado, designemos por $(B, -)$ al suceso compuesto consistente en obtener múltiplo de tres en el dado, cualquiera que sea el resultado obtenido en la moneda. Ambos sucesos compuestos se esquematizan en la figura 3.3, donde aparece el suceso $(-, F)$ en negro y el $(B, -)$ en rojo.

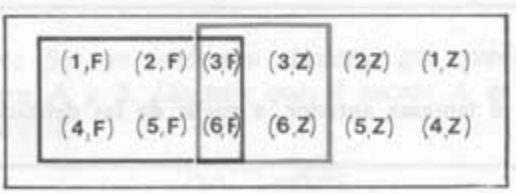


Figura 3.3

Si designamos por (B, F) al suceso compuesto consistente en obtener múltiplo de tres en el dado y a continuación cara en la moneda, se tiene

$$(B, F) = (B, -) \cap (-, F)$$

y aplicando el teorema 3.2 se tendrá

$$P(B, F) = P(B, -)\, P[(-, F)/(B, -)] = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

pues

$$P(B, -) = \frac{2}{6}$$

y como el suceso $(-, F)$ es independiente del $(B, -)$, es decir, el resultado obtenido en la moneda no depende del número que haya salido al lanzar el dado, se tendrá

$$P[(-, F)/(B, -)] = P(-, F) = \frac{1}{2}$$

EJERCICIOS

3.14 Comprobar que

$$P[(-, F)/(B, -)] = P(-, F)$$

aplicando la definición 3.4 con ayuda de la figura 3.3.

3.15 Intente relacionar la figura 3.3 con la idea de conjunto producto, tratada en el § 3.

3.16 En el experimento aleatorio compuesto, consistente en lanzar un dado y extraer una carta de la baraja, calcular la probabilidad de obtener par **en el dado y** as **en la baraja.**

3.17 Resuelva el ejercicio 3.8 de otro modo, con ayuda del ejemplo 3.4.

3.18 En el experimento aleatorio compuesto consistente en lanzar al aire un dado, extraer una carta de la baraja y lanzar al aire una moneda, calcular la probabilidad de que ocurra el suceso aleatorio compuesto:

(par, copa, cara)

---

* EJEMPLO 3.5: Consideremos el experimento aleatorio simple consistente en extraer una bola de una bolsa que contiene cuatro bolas verdes y siete rojas. Realicemos ahora el experimento aleatorio compuesto consistente en extraer una bola de la bolsa anteriormente citada y, sin devolverla a la bolsa, extraer una segunda bola. Calculemos la probabilidad de que ocurra el suceso compuesto (V, R), consistente en obtener bola verde en la primera extracción y roja en la segunda. Se tendrá:

$$(V, R) = (V, -) \cap (-, R)$$

luego

$$P(V, R)=P[(V, -)\cap(-, R)]=P(V, -)P[(-, R)/(V, -)]$$

Dada la composición inicial de la bolsa, se tendrá:

$$P(V, -)=\frac{4}{11}$$

ya que hay once bolas en total, de las que cuatro son verdes. Una vez verificada la primera extracción, en la bolsa quedarán tres bolas verdes y siete rojas, supuesto que en la primera extracción se obtuvo verde, es decir,

$$P[(-, R)/(V, -)]=\frac{7}{10}$$

Por tanto,

$$P(V, R)=\frac{4}{11}\cdot\frac{7}{10}=\frac{14}{55}$$

EJERCICIOS

3.19 **Dada la bolsa del ejemplo anterior, calcular la probabilidad de que, al sacar dos bolas, la primera sea roja y la segunda verde, es decir, de que ocurra el suceso compuesto (R, V), suponiendo que, una vez extraída la primera bola, ésta no se devuelva a la bolsa antes de verificar la segunda extracción.**

3.20 **Repita el ejercicio anterior, suponiendo que una vez observado el resultado de la primera extracción se devuelve a la bolsa la bola sacada, antes de verificar la segunda extracción.**

3.21 **Dada la bolsa del ejemplo 3.5, calcular la probabilidad de que al sacar dos bolas una de ellas sea roja y la otra verde, sin importar si la roja ha salido en primer o en segundo lugar. Téngase en cuenta que el suceso compuesto a considerar es suma de los sucesos compuestos, incompatibles entre sí, (V, R) y (R, V). Se supone que una vez observada la bola extraída en primer lugar se devuelve a la bolsa, antes de verificar la segunda extracción.**

3.22 **Repita el ejercicio anterior, suponiendo ahora que la bola extraída en primer lugar no se devuelve a la bolsa antes de realizar la segunda extracción.**

3.23 **Una urna contiene dos bolas blancas y tres negras. Otra urna contiene cinco bolas blancas y cuatro negras. Se elige al azar una urna y se saca de ella una bola. ¿Cuál es la probabilidad de que sea blanca la bola extraída.**

3.24 **Un opositor ha de realizar un ejercicio consistente en desarrollar un tema que deberá elegir de entre dos, sacados a suerte, de un programa de cien temas. ¿Cuál es la probabilidad de que pueda hablar sobre un tema conocido, si ha estudiado sesenta de los cien temas del programa? Comience calculando la probabilidad de que ninguno de los temas sacados a suerte sea conocido.**

3.25 **Una bolsa contiene siete bolas, una de cada uno de los colores del arco iris. Se saca una bola y se devuelve a la bolsa. Se repite la operación otras dos veces. Calcular la probabilidad de que se obtenga verde en la primera extracción, roja en la segunda y azul en la tercera. Repita el mismo ejercicio suponiendo que no se devuelve a la bolsa cada bola que se va sacando.**

3.26 **Si de la bolsa del ejercicio anterior se sacan tres bolas a la vez, calcular la probabilidad de que sea una roja, otra azul y la otra verde.**

3.27 **Un profesor acostumbra a preguntar a tres alumnos cada día. A su clase asisten treinta alumnos. ¿Cuál es la probabilidad de que hoy pregunte a uno determinado? Téngase en cuenta que el profesor pregunta cada día a un subconjunto de alumnos cuyo cardinal es tres. Además, si pregunta a uno determinado, los otros dos forman un subconjunto de cardinal dos (*).**

---

4. Variable aleatoria; gráficos de frecuencia

• EJEMPLO 4.1: Consideremos el caso del dado. Cada uno de los posibles sucesos elementales da lugar a un número. En este caso, la variable aleatoria es el conjunto

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

de los posibles sucesos elementales.

• EJEMPLO 4.2: Consideremos el caso de la moneda. Los posibles sucesos elementales a que puede dar lugar este fenómeno aleatorio son:

cara, cruz

Para poder realizar los cálculos que más adelante indicaremos, conviene representar cada uno de los sucesos elementales por un número. Asociemos al suceso *cara* el número *cero* y al suceso *cruz* el número *uno*, como se indica en la figura 4.1.

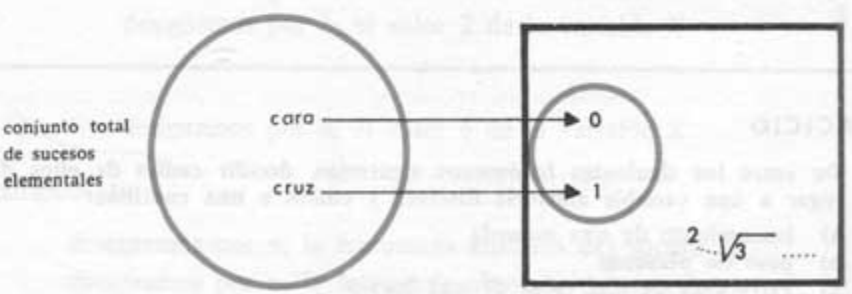


Figura 4.1

(*) Si se desea ampliar este estudio puede verse el libro:
SIXTO RÍOS, *Métodos Estadísticos*, tomo I, «Cálculo de Probabilidades», Madrid, 1961.

En este caso la variable aleatoria es el subconjunto

$$\{0, 1\}$$

cada uno de cuyos elementos representa a un posible suceso elemental.

En general, dado un fenómeno aleatorio, si cada uno de los sucesos elementales da lugar a un número, como ocurre en el caso del dado, entonces la variable aleatoria es el conjunto de esos números. Si, como en el caso de la moneda, cada uno de los sucesos elementales no da lugar directamente a un número, entonces se considera una aplicación inyectiva del conjunto total de los sucesos elementales en el conjunto de los números reales, como se indica en la figura 4.1, y se llama variable aleatoria al conjunto imagen de la aplicación (véase definición 5.1 del § 3). Así queda fijada una biyección entre el conjunto total de sucesos elementales y la variable aleatoria, que permite representar cada suceso elemental por un número, de modo que dos sucesos elementales distintos queden representados por dos números distintos.

• EJEMPLO 4.3: Consideremos el fenómeno aleatorio consistente en medir la estatura de un conjunto de personas. En este caso, cada persona observada da lugar a un número, por lo que tomamos como variable aleatoria al conjunto de las medidas de las estaturas de las distintas personas.

Comparemos las variables aleatorias de los ejemplos 4.1 y 4.3. En el caso de las estaturas, una persona puede medir 162 cm; otra, 165 cm, y si consideramos cualquier número mayor que 162 cm y menor que 165 cm, 164,7 cm, por ejemplo, este número puede ser obtenido como resultado de medir la estatura de una persona. Es decir, la estatura varía de forma continua. Por ello, la variable aleatoria del ejemplo 4.3 diremos que es una *variable aleatoria continua*. En cambio, en el ejemplo 4.1, los números 2 y 3 son posibles resultados de aquel experimento aleatorio, pero el número 2,71, comprendido entre dos y tres, no puede ser resultado de este experimento. Es decir, la variable aleatoria del ejemplo 4.1 no varía de forma continua, por lo que diremos que es una *variable aleatoria discreta*.

EJERCICIO

4.1 De entre los siguientes fenómenos aleatorios, decidir cuáles de ellos darán lugar a una variable aleatoria discreta y cuáles a una continua:

a) lanzamiento de una moneda
b) peso de personas
c) extracción de una carta de una baraja
d) número de calzado que utiliza cada adulto
e) longitud que puede saltar cada persona
f) calificaciones de cero a diez en un examen, pudiendo dar únicamente notas que sean números enteros.

Consideremos el fenómeno aleatorio consistente en lanzar el dado. Si llamamos X a la variable aleatoria, será

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Realicemos veinte lanzamientos y supongamos que los resultados obtenidos sean:

2, 3, 1, 5, 4, 5, 2, 3, 6, 5, 3, 1, 2, 4, 2, 3, 5, 6, 1, 3

Para mayor comodidad en la recogida de datos se puede utilizar la tabla indicada en la figura 4.2, donde aparecen en la primera columna los valores de la variable aleatoria. En la segunda columna aparece una rayita por cada vez que se ha obtenido el correspondiente valor de la variable, y en la tercera columna aparecen las frecuencias absolutas para cada valor de la variable.

X	*Observaciones*	*Frecuencias absolutas*
1	/ / /	3
2	/ / / /	4
3	/ / / / /	5
4	/ /	2
5	/ / / /	4
6	/ /	2

Figura 4.2

Con objeto de generalizar este proceso, designemos cada valor de la variable según se indica a continuación:

designemos por x_1 el valor 1 de la variable X
designemos por x_2 el valor 2 de la variable X
... ...
... ...
designemos por x_6 el valor 6 de la variable X

Análogamente

designemos por n_1 la frecuencia absoluta del suceso x_1
designemos por n_2 la frecuencia absoluta del suceso x_2
... ...
... ...
designemos por n_6 la frecuencia absoluta del suceso x_6

es decir, designemos por n_i a la frecuencia absoluta de x_i, pudiendo ser

$i=1, 2, \ldots, 6$, como se indica en la figura 4.3, obtenida a partir de la figura 4.2, como acaba de indicarse

Variable aleatoria x_i	*Frecuencia absoluta* n_i
$x_1=1$	$3=n_1$
$x_2=2$	$4=n_2$
$x_3=3$	$5=n_3$
$x_4=4$	$2=n_4$
$x_5=5$	$4=n_5$
$x_6=6$	$2=n_6$
	20

Figura 4.3

El número total de experiencias realizadas será:

$$n_1+n_2+n_3+n_4+n_5+n_6=3+4+5+2+4+2=20$$

La suma

$$n_1+n_2+n_3+n_4+n_5+n_6$$

se expresa abreviadamente mediante la notación condensada

$$\sum_{i=1}^{6} n_i$$

lo que se lee *sumatoria de n sub i desde i igual a uno hasta seis.* Por tanto, en este caso, se tiene

$$\sum_{i=1}^{6} n_i=20$$

Análogamente

$$\sum_{i=1}^{8} h_i=h_1+h_2+h_3+h_4+h_5+h_6+h_7+h_8$$

EJERCICIOS

4.2 Escribir, mediante notación condensada, la suma

$$n_1+n_2+n_3+\ldots+n_{14}+n_{15}$$

4.3 Desarrollar la expresión

$$\sum_{j=1}^{5} h_j$$

4.4 Escribir condensadamente

$$n_1+n_2+n_3+n_4+n_5+n_{18}+n_{19}+n_{20}+n_{21}$$

Calculemos las frecuencias relativas, introducidas en la definición 2.1, correspondientes a la experiencia aleatoria descrita en el esquema de la figura 4.3. Para ello designemos por h_1 a la frecuencia relativa del suceso elemental x_1, es decir, del valor x_1 de la variable. Será:

$$h_1=\frac{n_1}{\sum_{i=1}^{6} n_i}=\frac{3}{20}$$

Análogamente, sea

$$h_2=\frac{n_2}{\sum_{i=1}^{6} n_i}=\frac{4}{20}$$

la frecuencia relativa de x_2. En general, sea

$$h_j=\frac{n_j}{\sum_{i=1}^{6} n_i}$$

la frecuencia relativa de x_j, donde j puede ser cualquiera de los posibles valores de la variable, es decir, puede ser

$$j=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$$

Podemos añadir a la figura 4.3 una nueva columna con las frecuencias relativas, como se indica en la figura 4.4.

Variable aleatoria x_i	*Frecuencias absolutas* n_i	*Frecuencias relativas* h_i
1	3	3/20
2	4	4/20
3	5	5/20
4	2	2/20
5	4	4/20
6	2	2/20
	$20=\sum_{i=1}^{6} n_i$	

Figura 4.4

EJERCICIOS

4.5 **Calcule**

$$\sum_{i=1}^{6} h_i$$

a partir del esquema de la figura 4.4.

4.6 **Los alumnos de un cierto curso obtienen las siguientes calificaciones en un examen:**

4, 6, 5, 8, 2, 6, 4, 5, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 6, 5, 7, 9, 7, 8, 4, 5, 7, 8, 6, 5, 4, 3, 2, 4

Calcular las frecuencias absoluta y relativa de cada nota, utilizando un esquema similar al de las figuras 4.2 y 4.4. Compruébese que la suma de las frecuencias relativas es uno.

4.7 **Láncese al aire una moneda 50 veces y con los resultados obtenidos opere como en el ejercicio anterior.**

• PROPOSICIÓN 4.1: *Dada la variable aleatoria discreta*

$$X=\{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$$

y llamando h_i *a la frecuencia relativa de* x_i, *donde* $i=1, 2, \ldots, r$, *se verifica*

$$\sum_{i=1}^{r} h_i=1$$

EJERCICIO

4.8 Demostrar la proposición anterior.

Una representación gráfica de los resultados indicados en el esquema de la figura 4.3 se consigue mediante el *diagrama de barras* de la figura 4.5.

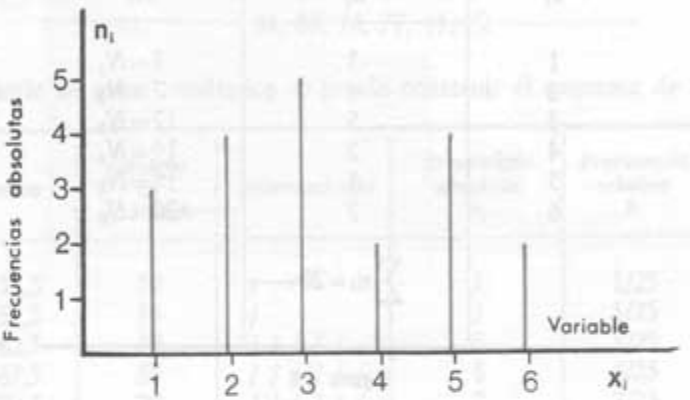


Figura 4.5

EJERCICIO

4.9 Construir los diagramas de barras correspondientes a los ejercicios 4.6 y 4.7.

Volvamos al esquema de la figura 4.3. El número de veces que, al lanzar el dado, se ha obtenido valor igual o inferior a 2 será:

$$N_2 = n_1 + n_2 = 3 + 4 = 7$$

Análogamente, el número de veces que se ha obtenido valor igual o inferior a 3 será:

$$N_3 = n_1 + n_2 + n_3 = 3 + 4 + 5 = 12$$

Así, a la frecuencia absoluta correspondiente a un valor x_i de la variable podemos acumular las frecuencias absolutas correspondientes a valores inferiores de la variable, para obtener las llamadas *frecuencias acumulativas*. La frecuencia acumulativa correspondiente al valor x_5 de la variable aleatoria

será:

$$N_5 = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 = 18$$

En el esquema de la figura 4.6 se añade la columna correspondiente a las frecuencias acumulativas a las columnas que figuraban en el esquema de la figura 4.3.

Variable aleatoria x_i	*Frecuencia absoluta* n_i	*Frecuencia acumulativa* N_i
1	3	$3 = N_1$
2	4	$7 = N_2$
3	5	$12 = N_3$
4	2	$14 = N_4$
5	4	$18 = N_5$
6	2	$\rightarrow 20 = N_6$
	$\sum_i n_i = 20 \leftarrow$	

Figura 4.6

EJERCICIOS

4.10 **Explique la igualdad de los números situados en los extremos de la flecha marcada en rojo en la figura 4.6.**

4.11 **Demuestre que**

$$N_i = N_{i-1} + n_i$$

cualquiera que sea i.

4.12 **La expresión anterior sugiere una forma rápida de calcular las frecuencias acumulativas. Explíquela.**

4.13 **Calcular las frecuencias acumulativas para las variables de los ejercicios 4.6 y 4.7.**

Cuando se trata de una variable aleatoria continua, como puede ser el peso, como el número de posibles resultados crece, conviene, para facilitar los cálculos, agrupar en intervalos los resultados obtenidos. Conviene tomar todos los intervalos de la misma amplitud, lo que facilita los cálculos. Por ejemplo, en el caso del peso, se pueden tomar intervalos de cinco kilogramos. Un intervalo puede ser el comprendido entre 37,5 kg y 42,5 kg. Otro inter-

valo será el que tiene por extremos 42,5 kg y 47,5 kg, etc. Cada intervalo se representa por un número, que para facilidad mayor tomaremos como el centro del intervalo. Así, el centro del intervalo de extremos 37,5 y 42,5 kg será 40 kg. Es decir, a efectos de cálculos posteriores, todas las observaciones realizadas, cuyos pesos oscilen entre 37,5 y 42,5 kg, se consideran como si cada una de ellas hubiera sido de 40 kg, y análogamente para los otros intervalos. Supongamos que los pesos, en kilogramos, de los alumnos de una cierta clase han sido:

70, 63, 72, 68, 67, 59, 74, 66, 63, 71, 64, 81, 58, 75, 56, 67, 49, 61, 58, 68, 69, 74, 77, 61, 72

A partir de estos resultados se puede construir el esquema de la figura 4.7.

Intervalos	*Centros de intervalos*	*Observaciones*	*Frecuencia absoluta* n_i	*Frecuencia relativa* h_i	*Frecuencia acumulativa* N_i
47,5-52,5	50	/	1	1/25	1
52,5-57,5	55	/	1	1/25	2
57,5-62,5	60	/ / / / /	5	5/25	7
62,5-67,5	65	/ / / / / /	6	6/25	13
67,5-72,5	70	/ / / / / / /	7	7/25	20
72,5-77,5	75	/ / / /	4	4/25	24
77,5-82,5	80	/	1	1/25	25
			$\Sigma n_i = 25$		

Figura 4.7

Una representación gráfica de estos resultados se consigue mediante el diagrama de la figura 4.8, llamado *histograma* de frecuencias.

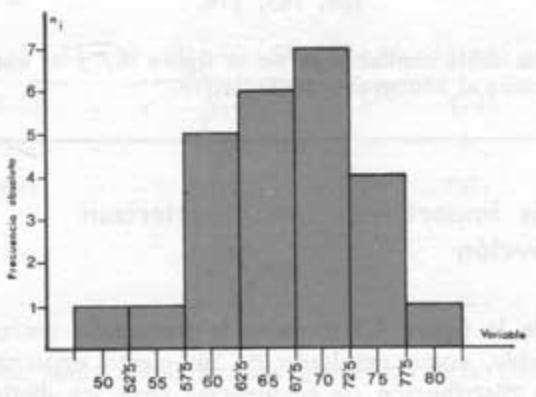


Figura 4.8

En la figura 4.9 se representa el *histograma acumulativo* correspondiente.

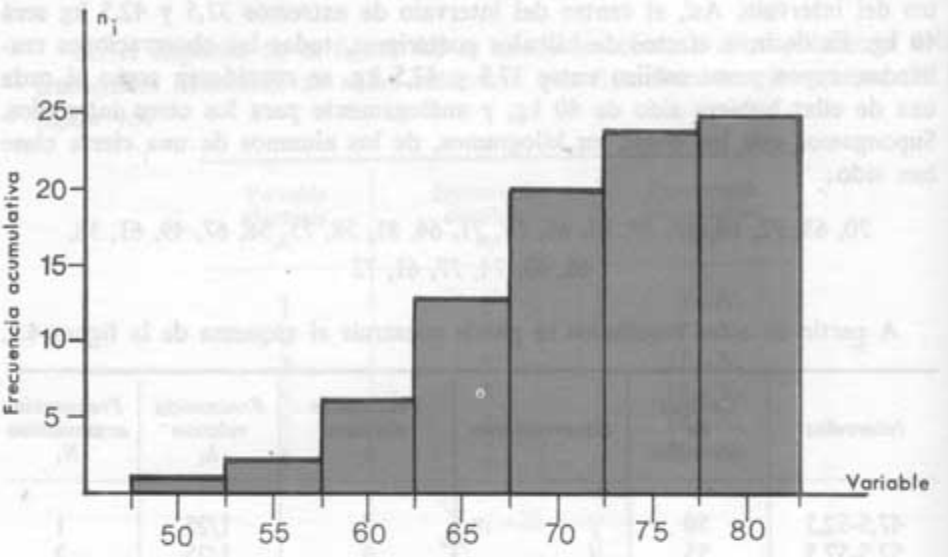


Figura 4.9

EJERCICIO

4.14 Las medidas en centímetros de la estatura de los alumnos de una clase son:

159, 162, 167, 163, 175, 164, 168, 167, 182, 163,
169, 166, 169, 160, 158, 159, 168, 169, 178, 165

Si se toman como centros de intervalos los números

160, 165, 170, ...

construir una tabla similar a la de la figura 4.7 y el correspondiente histograma, así como el histograma acumulativo.

5. Indices más importantes que caracterizan una distribución

El esquema de la figura 4.3 muestra la frecuencia correspondiente a cada valor de la variable, como resultado de un cierto experimento aleatorio, es decir, muestra la distribución de frecuencias para los distintos valores de la variable aleatoria.

Por tanto, dar una distribución es conocer la frecuencia correspondiente a cada valor de la variable aleatoria, es decir, dar una distribución es dar una aplicación que asocia a cada valor de la variable su frecuencia. Como las frecuencias absolutas son números naturales, conocer la distribución es conocer una aplicación cuyo conjunto de partida es la variable aleatoria y cuyo conjunto de llegada es el de los números naturales.

A partir de cada distribución de frecuencias se pueden calcular ciertos números o índices que la caracterizan cuantitativamente. Sea la distribución de frecuencias dada en el esquema de la figura 5.1.

Variable aleatoria x_i	*Observaciones*	*Frecuencia absoluta* n_i
$x_1=30$	/ /	$2=n_1$
$x_2=35$	/ / /	$3=n_2$
$x_3=40$	/ / / / /	$5=n_3$
$x_4=45$	/ / / /	$4=n_4$
$x_5=50$	/	$1=n_5$
		$15=\Sigma n_i$

Figura 5.1

Supongamos que se desea caracterizar por un número a esta distribución. Una forma de hacerlo es obtener la *media aritmética,* o simplemente *media,* consistente en sumar los valores obtenidos en las distintas observaciones y dividir por el número total de observaciones realizadas. Como se ha obtenido dos veces el valor 30, tres veces el valor 35, etc., se tendrá, para la suma de los valores obtenidos:

$$\underbrace{30+30}_{2\cdot 30}+\underbrace{35+35+35}_{3\cdot 35}+\underbrace{40+40+40+40+40}_{5\cdot 40}+\underbrace{45+45+45+45}_{4\cdot 45}+\underbrace{50}_{1\cdot 50}=$$

$$=2\cdot 30+3\cdot 35+5\cdot 40+4\cdot 45+1\cdot 50=$$

$$=2x_1+3x_2+5x_3+4x_4+1x_5=$$

$$=n_1x_1+n_2x_2+n_3x_3+n_4x_4+n_5x_5=$$

$$=\sum_{i=1}^{5} n_ix_i$$

Para obtener esta suma cómodamente puede operarse como se indica en la figura 5.2, añadiendo una columna donde se obtengan los productos de cada valor x_i, de la variable, por la correspondiente frecuencia absoluta n_i. Se

tiene, pues, para este ejemplo:

$$\text{media} = \frac{\text{suma de valores obtenidos}}{\text{número de experiencias realizadas}} = \frac{595}{15} \simeq 39{,}66$$

donde el signo $\simeq$ debe leerse *aproximadamente igual a.*

x_i	n_i	$n_i x_i$
30	2	$60 = 2 \cdot 30 = n_1 x_1$
35	3	$105 = 3 \cdot 35 = n_2 x_2$
40	5	$200 = 5 \cdot 40$
45	4	$180 = 4 \cdot 45$
50	1	50
	$15 = \sum n_i$	$595 = \sum_{i=1}^{5} n_i x_i$

Figura 5.2

A la media de la variable X se suele designar por $\bar{x}$. Se tiene, pues, en general:

$$\bar{x} = \frac{\Sigma n_i x_i}{\Sigma n_i}$$

es decir, la *media* se obtiene dividiendo la suma de los valores obtenidos en las distintas observaciones por el número total de observaciones realizadas.

EJERCICIO

5.1 Obtener la media de la distribución dada en el esquema de la figura 4.3 y en las distribuciones de los ejercicios 4.6 y 4.7.

• PROPOSICIÓN 5.1: *Dada la variable aleatoria*

$$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$$

y llamando h_i a la frecuencia relativa del valor x_i de la variable, donde i puede ser 1, 2, ..., r, *se verifica*

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{r} h_i x_i$$

EJERCICIO

5.2 Demostrar la expresión de la proposición anterior.

Aunque la media es el índice más utilizado para dar el valor central de una distribución, también se utilizan otras medidas de centralización. Una de ellas es el valor de la variable, cuya frecuencia absoluta es mayor. En el caso de la distribución de la figura 5.1, la mayor frecuencia absoluta de 5 corresponde al valor 40 de la variable. Por ello diremos que la *moda* es 40 en esa distribución.

EJERCICIOS

5.3 ¿Cuál es la moda de cada una de las distribuciones citadas en el ejercicio 5.1?

5.4 Compare los resultados respectivos de los ejercicios 5.1 y 5.3 y concluya si la media ha de coincidir con la moda en una distribución. ¿Pueden coincidir en algunos casos?

Ordenemos, de menor a mayor, los resultados de la experiencia aleatoria descrita en el esquema de la figura 5.1:

$$\underbrace{30,\ 30,\ 35,\ 35,\ 35,\ 40,\ 40}_{\text{siete observaciones}},\ \uparrow\ 40,\ \underbrace{40,\ 40,\ 45,\ 45,\ 45,\ 45,\ 50}_{\text{siete observaciones}}$$

Notemos que hay siete observaciones con valor inferior al valor 40, indicado con una flecha, y otras siete observaciones con valor superior. Por ello diremos que la *mediana* de esa distribución es 40.

Si el número de observaciones realizadas es par, se toma como *mediana* la media de los valores centrales. Así, para la distribución:

$$\overbrace{1,\ 2,\ 3,\ 3,\ 4,}^{5\text{ observaciones}}\ \overbrace{5,\ 5,\ 5,\ 6,\ 6}^{5\text{ observaciones}}$$

$$\nwarrow\ \nearrow$$

valores centrales

tomaremos para la mediana la media de los dos valores centrales, 4 y 5, es

decir,

$$mediana = \frac{4+5}{2} = 4{,}5$$

EJERCICIOS

5.5 Calcular la mediana de cada una de las distribuciones citadas en el ejercicio 5.1.

5.6 Búsquese un procedimiento gráfico para determinar la mediana a partir del histograma acumulativo.

La más utilizada de las medidas de centralización es la media. Sin embargo, las *medidas de centralización:* media, mediana, moda, etc., no bastan para caracterizar totalmente una distribución. Por ejemplo, si dos amigos pesan respectivamente 40 y 80 kilos, la media, 60 kilos, es la misma que la de otras dos personas cuyos pesos sean de 58 y 62 kg, respectivamente. Surge, pues, la necesidad de considerar otro número que caracterice si hay mucha dispersión respecto del valor central o si, por el contrario, los valores resultado de las observaciones se agrupan en torno a dicho valor central.

La más simple de las *medidas de dispersión* es el *recorrido* o diferencia entre el mayor y el menor de los valores obtenidos. En la distribución dada mediante la tabla de la figura 5.1 se tiene:

$$recorrido = 50 - 30 = 20$$

EJERCICIO

5.7 Calcular el recorrido de cada una de las distribuciones citadas en el ejercicio 5.1.

El *recorrido* no informa de si la mayoría de las observaciones están próximas al valor central o muy próximas a los valores extremos de la variable. Por ello interesa considerar otras medidas de dispersión.

Si x_j es uno de los valores de la variable, la desviación de este valor respecto de la media será:

$$x_j - \bar{x}$$

Puede pensarse en tomar como medida de dispersión la suma de estas

desviaciones respecto de la media, es decir

$$\sum_i n_i(x_i - \bar{x})$$

pero esta suma es nula.

EJERCICIO

5.8 Demostrar que

$$\sum_i n_i(x_i - \bar{x}) = 0$$

Este resultado es fácil de interpretar, pues la suma de las desviaciones correspondientes a los valores de la variable inferiores a la media es el número opuesto de la suma de las desviaciones de los valores de la variable superiores a la media.

Por ello interesa considerar una medida de dispersión en que figuren, en vez de las desviaciones respecto de la media, de que hemos hablado, sus cuadrados, es decir,

$$\sum_i n_i(x_i - \bar{x})^2 = n_1(x_1 - \bar{x})^2 + n_2(x_2 - \bar{x})^2 + n_3(x_3 - \bar{x})^2 + \dots$$

Para que no influya el número de observaciones efectuadas, interesa dividir por el número Σn_i de observaciones realizadas. A la medida de dispersión, así obtenida, se le llama *varianza*. Se tiene, pues,

$$varianza = \frac{\Sigma n_i(x_i - \bar{x})^2}{\Sigma n_i}$$

• PROPOSICIÓN 5.2:

$$varianza = \Sigma h_i(x_i - \bar{x})^2$$

EJERCICIO

5.9 Probar la proposición anterior.

Para el ejemplo de la distribución dada mediante la tabla de la figura 5.2,

como se tenía $\bar{x} \simeq 39{,}66$, será

$$varianza = \frac{\Sigma n_i (x_i - \bar{x})^2}{\Sigma n_i} = \frac{n_1(x_1 - \bar{x})^2 + n_2(x_2 - \bar{x})^2 + n_3(x_3 - \bar{x})^2 + \dots}{\Sigma n_i} =$$

$$= \frac{2(30 - 39{,}66)^2 + 3(35 - 39{,}66)^2 + 5(40 - 39{,}66)^2 + 4(45 - 39{,}66)^2 + \dots}{15}$$

lo que es muy incómodo de calcular. Para evitar, en parte, este inconveniente, basta tener en cuenta el siguiente resultado:

- PROPOSICIÓN 5.3:

$$varianza = \Sigma h_i (x_i - \bar{x})^2 = \Sigma h_i x_i^2 - (\bar{x})^2$$

Demostración:

$$\Sigma h_i (x_i - \bar{x})^2 =$$
$$= h_1(x_1 - \bar{x})^2 + h_2(x_2 - \bar{x})^2 + h_3(x_3 - \bar{x})^2 + \dots =$$
$$= h_1(x_1^2 - 2x_1\bar{x} + \bar{x}^2) + h_2(x_2^2 - 2x_2\bar{x} + \bar{x}^2) + h_3(x_3^2 - 2x_3\bar{x} + \bar{x}^2) + \dots =$$
$$= h_1x_1^2 - 2h_1x_1\bar{x} + h_1\bar{x}^2 + h_2x_2^2 - 2h_2x_2\bar{x} + h_2\bar{x}^2 + h_3x_3^2 - 2h_3x_3\bar{x} + h_3\bar{x}^2 + \dots =$$
$$= (h_1x_1^2 + h_2x_2^2 + h_3x_3^2 + \dots) - (2h_1x_1\bar{x} + 2h_2x_2\bar{x} + 2h_3x_3\bar{x} + \dots) + (h_1\bar{x}^2 + h_2\bar{x}^2 + \dots) =$$
$$= \Sigma h_i x_i^2 - 2(h_1x_1 + h_2x_2 + h_3x_3 + \dots)\bar{x} + \Sigma h_i \bar{x}^2 =$$
$$= \Sigma h_i x_i^2 - 2(\Sigma h_i x_i)\bar{x} + (\Sigma h_i)\bar{x}^2 =$$
$$= \Sigma h_i x_i^2 - 2\bar{x}\bar{x} + 1\bar{x}^2 =$$
$$= \Sigma h_i x_i^2 - 2\bar{x}^2 + \bar{x}^2 =$$
$$= \Sigma h_i x_i^2 - \bar{x}^2$$

EJERCICIO

5.10 Indicar las propiedades por las cuales se han efectuado cada uno de los pasos de la demostración anterior.

- PROPOSICIÓN 5.4:

$$\Sigma h_i x_i^2 = \frac{\Sigma n_i x_i^2}{\Sigma n_i}$$

EJERCICIOS

5.11 Demostrar la proposición anterior.

5.12 **Demostrar que**

$$\text{varianza} = \frac{\Sigma n_i x_i^2}{\Sigma n_i} - \bar{x}^2$$

Para calcular el número $\Sigma n_i x_i^2$, conviene añadir nuevas columnas al esquema de la figura 5.2, como se indica en la figura 5.3.

x_i	n_i	$n_i x_i$	x_i^2	$n_i x_i^2$
30	2	60	$900 = 30^2$	$1800 = 2 \cdot 900$
35	3	105	$1225 = 35^2$	$3675 = 3 \cdot 1225$
40	5	200	$1600 = 40^2$	$8000 = 5 \cdot 1600$
45	4	180	2025	8100
50	1	50	2500	2500
	15	595		$24075 = \Sigma n_i x_i^2$

Figura 5.3

donde la columna de las x_i^2 se obtuvo elevando al cuadrado los respectivos números de la columna x_i. Análogamente, los de la columna $n_i x_i^2$ se obtienen multiplicando respectivamente los de la columna n_i por los de la columna x_i^2, o bien multiplicando los números de la columna x_i por los respectivos números de la columna $n_i x_i$. Por tanto, para la varianza se tiene, en este caso:

$$varianza = \frac{\Sigma n_i x_i^2}{\Sigma n_i} - \bar{x}^2 = \frac{24075}{15} - \left(\frac{595}{15}\right)^2 \simeq 1605{,}00 - 1573{,}44 = 31{,}56$$

EJERCICIO

5.13 **Calcular la varianza para las distribuciones mencionadas en el ejercicio 5.1.**

Supongamos la variable *estatura*, en centímetros, de un conjunto de personas. Como en la varianza la variable aparece elevada al cuadrado, la varianza aparecería expresada en cm^2. Para evitar este inconveniente dimensional, pasamos de la varianza a su raíz cuadrada. La raíz cuadrada de la varianza se llama *desviación típica* o *desviación «standard»*, y es la más utilizada de las medidas de dispersión. Si designamos por s a la *desviación típica*, como es

habitual, tendremos:

$$\textit{desviación típica} = s = \sqrt{\frac{\Sigma n_i x_i^2}{\Sigma n_i} - \bar{x}^2}$$

• EJEMPLO: Para el caso de la distribución dada por la tabla de la figura 5.3, se tendrá:

$$s = \sqrt{31{,}56} \simeq 5{,}61$$

EJERCICIO

5.14 Calcular la desviación típica de cada una de las distribuciones citadas en el ejercicio 5.1.

Consideremos un test con el que se ha calificado a mil personas de cero a diez puntos, habiéndose obtenido la distribución de frecuencias indicada en la tabla de la figura 5.4.

Variable aleatoria x_i	*Frecuencia absoluta* n_i	*Frecuencia acumulativa* N_i
0	11	11
1	21	32
2	63	95
3	72	167
4	185	352
5	278	630
6	169	799
7	82	881
8	56	937
9	37	974
10	26	1000
	1000	

Figura 5.4

El quince por ciento de las mil observaciones realizadas son ciento cincuenta, pues

$$15\% \text{ de } 1000 = \frac{15}{100} \cdot 1000 = 150$$

Busquemos el menor valor v de la variable, tal que, 150 de las observaciones realizadas correspondan a valores de la variable menores o iguales que v. Como en la columna de las frecuencias acumulativas, puede observarse que hay

a) 95 observaciones correspondientes a valores menores que 3, y
b) 167 observaciones correspondientes a valores menores que 4

el valor buscado será

$$v = 3$$

lo que expresaremos diciendo que *el percentil corespondiente al* 15% *es* 3, o bien diciendo que *el fractil correspondiente al* 15% *es* 3, o todavía diciendo que *el cuantil correspondiente al* 15% es 3.

En general, dado un número p, menor que cien, el *percentil, cuantil* o *fractil* correspondiente al p%, o p-*centil*, es el menor valor v de la variable aleatoria, tal que el p% de las observaciones son menores o iguales que v.

• EJEMPLO: El 60-*centil* correspondiente a la distribución dada en la tabla de la figura 5.4 se calculará así:

$$60\% \text{ de } 1000 = \frac{60}{100} \cdot 1000 = 600$$

El menor valor de la variable cuya frecuencia acumulativa es menor o igual que 600 es 5. Por tanto, el *cuantil* correspondiente al 60% será 5.

La *mediana* es el fractil correspondiente al 50%.

El percentil correspondiente al 25% se llama *cuartila inferior*, y el correspondiente al 75% *cuartila superior*.

• EJEMPLO: En el caso de la distribución dada por la tabla de la figura 5.4, la *cuartila inferior* es 4 y la *superior* 6.

EJERCICIO

5.15 Calcular el percentil correspondiente al 80% en la distribución dada por la tabla de la figura 5.4.

5.16 Calcular las cuartilas inferior y superior en las distribuciones citadas en el ejercicio 5.1.

Otra medida de dispersión es el *recorrido intercuartílico*, que se define como la diferencia entre la cuartila superior y la inferior.

• EJEMPLO: En la distribución de la figura 5.4 se tiene

recorrido intercuartílico = cuartila sup. − cuartila inf. = 6 − 4 = 2

EJERCICIO

5.17 Calcular el recorrido intercuartílico para las distribuciones citadas en el ejercicio 5.1.

Además de las medidas de centralización y dispersión que hemos considerado, existen otras de menos uso. Por otra parte, existente otros índices o números que reflejan otras características de una distribución, como la asimetría respecto del valor central, etc., y en cuyo estudio no entraremos (*).

6. Distribución binomial

Consideremos la experiencia aleatoria consistente en lanzar al aire el dado. Si llamamos *éxito* al suceso B, consistente en obtener múltiplo de tres, se tendrá

$$P(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

y habremos de llamar *fracaso*, por tanto, al suceso $\bar{B}$, contrario del suceso B; y teniendo en cuenta la consecuencia C2) del párrafo 3 de este §, será

$$P(\bar{B})=1-P(B)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

Supongamos que lanzamos el dado cinco veces. La probabilidad de que ocurra el suceso compuesto

$$B\bar{B}\bar{B}\bar{B}\bar{B}$$

es decir, la probabilidad de obtener éxito en el primer lanzamiento y fracaso en los cuatro lanzamientos restantes será, razonando como en el ejemplo 3.4:

$$P(B\bar{B}\bar{B}\bar{B}\bar{B})=P(B)\cdot P(\bar{B})\cdot P(\bar{B})\cdot P(\bar{B})\cdot P(\bar{B})=\frac{1}{3}\frac{2}{3}\frac{2}{3}\frac{2}{3}\frac{2}{3}=\frac{2^4}{3^5}=\frac{16}{243}$$

Busquemos ahora la probabilidad de que en los cinco lanzamientos obtengamos un éxito, es decir, de que en los cinco lanzamientos obtengamos un único múltiplo de tres y en los cuatro restantes no se obtenga múltiplo de tres. El múltiplo de tres puede ser obtenido en cualquiera de los cinco lanzamientos. Este suceso compuesto, que estamos considerando, es suma de los

(*) Si se desea hacerlo, puede verse el libro:
SIXTO RÍOS, *Análisis estadístico matemático*, Madrid, 1965.

sucesos elementales incompatibles

$$B\overline{BBBB},\quad \overline{B}B\overline{BBB},\quad \overline{BB}B\overline{BB},\quad \overline{BBB}B\overline{B},\quad \overline{BBBB}B$$

Por tanto, la probabilidad de obtener un éxito en las cinco pruebas o lanzamientos será:

$$P\left(\begin{matrix}5\text{ pruebas}\\1\text{ éxito}\end{matrix}\right)=P(B\overline{BBBB}+\overline{B}B\overline{BBB}+\overline{BB}B\overline{BB}+\overline{BBB}B\overline{B}+\overline{BBBB}B)=$$
$$=P(B\overline{BBBB})+P(\overline{B}B\overline{BBB})+P(\overline{BB}B\overline{BB})+P(\overline{BBB}B\overline{B})+P(\overline{BBBB}B)$$

Pero los cinco sumandos de esta suma son iguales, pues son las probabilidades de cinco sucesos equiprobables, luego

$$P\left(\begin{matrix}5\text{ pruebas}\\1\text{ éxito}\end{matrix}\right)=5P(\overline{B}B\overline{BBB})=5\,\frac{16}{243}=\frac{80}{243}$$

Consideremos ahora la probabilidad de que en cinco lanzamientos del dado obtengamos múltiplo de tres en el tercero y en el cuarto lanzamientos y en los restantes lanzamientos obtengamos un número que no sea múltiplo de tres, es decir, la probabilidad de que ocurra el suceso elemental

$$\overline{BB}BB\overline{B}$$

Se tendrá

$$P(\overline{BB}BB\overline{B})=P(\overline{B})P(\overline{B})P(B)P(B)P(\overline{B})=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2^3}{3^5}=\frac{8}{243}$$

Consideremos ahora el suceso compuesto consistente en obtener dos éxitos en los cinco lanzamientos. Este suceso compuesto es suma de los siguientes sucesos compuestos elementales, incompatibles entre sí

$$B\overline{BBBB},\quad B\overline{B}B\overline{BB},\quad B\overline{BB}B\overline{B},\quad B\overline{BBB}B,\quad \overline{B}BB\overline{BB},\quad \ldots$$

Cabe ahora preguntarse cuántos de estos sucesos compuestos elementales hay. Notemos que cada uno de ellos queda caracterizado cuando sabemos cuáles son los dos lugares, de entre los cinco posibles, que ocupan los dos éxitos. Es decir, si del conjunto

$$\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$$

consideramos un subconjunto de dos elementos

$$\{2,\ 3\}$$

por ejemplo, podemos considerar el suceso compuesto elemental en que los

dos éxitos ocupan precisamente estos dos lugares, es decir, el suceso

$$\begin{array}{c}\bar{B}B\bar{B}B\bar{B}\\ \uparrow\ \uparrow\\ \{2,\ 3\}\subset\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}\end{array}$$

Existe, por tanto, una biyección entre el conjunto de los referidos sucesos compuestos elementales, que dan lugar a dos éxitos, y los subconjuntos de cardinal dos, tomados a partir del conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Pero tales subconjuntos son las combinaciones de orden dos tomadas a partir del conjunto de cardinal cinco $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Luego, según vimos al estudiar combinaciones, el número de tales subconjuntos será $\binom{5}{2}$. Por tanto, el número de sucesos compuestos elementales que dan lugar al suceso compuesto, consistente en obtener dos éxitos en cinco lanzamientos, será $\binom{5}{2}$, como se visualiza en

$$\begin{array}{rl}\{1,2\},\ \{1,3\},\ \{1,4\},\ \{1,5\} \longrightarrow & B\bar{B}\bar{B}B\bar{B},\ \ B\bar{B}B\bar{B}\bar{B},\ \ B\bar{B}\bar{B}B\bar{B},\ \ B\bar{B}\bar{B}\bar{B}B\\ \{2,3\},\ \{2,4\},\ \{2,5\} & \bar{B}BB\bar{B}\bar{B},\ \ \bar{B}B\bar{B}B\bar{B},\ \ \bar{B}B\bar{B}\bar{B}B\\ \{3,4\},\ \{3,5\} & \bar{B}\bar{B}BB\bar{B},\ \ \bar{B}\bar{B}BB\bar{B}\\ \{4,5\} & \bar{B}\bar{B}\bar{B}BB\end{array}$$

Figura 6.1

la figura 6.1. Los diez sucesos compuestos elementales considerados en la figura 6.1 son equiprobables, luego se tendrá

$$\begin{aligned}P\left(\begin{array}{c}5\text{ pruebas}\\ 2\text{ éxitos}\end{array}\right) &= P(BB\bar{B}\bar{B}\bar{B}+B\bar{B}BB\bar{B}+\ldots+\bar{B}\bar{B}BBB)=\\ &= P(BB\bar{B}\bar{B}\bar{B})+P(B\bar{B}BB\bar{B})+\ldots+P(\bar{B}\bar{B}BBB)=\\ &= \binom{5}{2}P(\bar{B}\bar{B}BB\bar{B})=\binom{5}{2}\frac{8}{243}=10\cdot\frac{8}{243}=\frac{80}{243}\end{aligned}$$

Generalicemos el proceso anteriormente descrito. Sea un experimento aleatorio que puede dar lugar al suceso S, que consideramos como éxito. Para abreviar, designaremos por p a la probabilidad de S, es decir, sea

$$P(S)=p$$

Designemos por q la probabilidad de fracaso, es decir, de que ocurra el suceso $\bar{S}$, contrario de S, o sea

$$P(\bar{S})=q=1-p$$

Repitamos n veces el experimento aleatorio, es decir, verifiquemos n prue-

bas. Consideremos el suceso compuesto, consistente en obtener éxito en las h primeras pruebas y fracaso en las $n-h$ restantes, es decir, el suceso compuesto

$$\underbrace{SS \ldots S}_{h}\underbrace{\overline{S}\overline{S} \ldots \overline{S}}_{n-h}$$

Razonando como en el ejemplo precedente, la probabilidad de que esto ocurra será igual a

$$\underbrace{pp \ldots p}_{h}\underbrace{qq \ldots q}_{n-h} = p^h q^{n-h}$$

Consideremos ahora el suceso compuesto consistente en obtener h éxitos en las n pruebas. Razonando como en el ejemplo precedente, se comprueba que esto puede ocurrir de $\binom{n}{h}$ formas. Por tanto,

$$P\binom{n \text{ pruebas}}{h \text{ éxitos}} = \binom{n}{h} p^h q^{n-h}$$

EJERCICIOS

6.1 **Se lanza al aire una moneda ocho veces. Calcular la probabilidad de obtener** cara **tres veces y** cruz **las cinco restantes.**

6.2 **Una bolsa contiene tres bolas blancas y cuatro negras. Se extrae una bola y, después de anotar el resultado, se devuelve a la bolsa. Se realiza la misma prueba cuatro veces. Calcular la probabilidad de obtener dos veces** bola blanca **y las otras dos** negra.

6.3 **En la experiencia del ejercicio anterior, calcular la probabilidad de que en las cuatro pruebas se obtenga, a lo sumo, dos veces** blanca.

6.4 **Se extrae una carta de la baraja. Se repite la misma operación otras cinco veces más. Calcular la probabilidad de obtener:**

- **a)** copa **en las pruebas segunda y cuarta, no importando lo que se obtenga en las otras cuatro pruebas.**
- **b)** copa **en las pruebas segunda y cuarta y otros** palos, **distintos de** copa, **en las cuatro pruebas restantes.**
- **c)** **dos** copas **en las seis pruebas y otro** palo **distinto en las restantes.**

6.5 **Una persona atraviesa cuatro veces diarias un paso de peatones, en cuyo semáforo se lee** pasen peatones **durante treinta segundos y** esperen **durante sesenta segundos. Calcular la probabilidad de encontrarlo abierto tres de las cuatro veces, un cierto día.**

6.6 **Un test consta de 100 cuestiones, cada una de las cuales puede ser calificada de** bien **o** mal. **Una persona, sin conocimiento alguno sobre las cuestiones en**

él formuladas, realiza dicho test. ¿Cuál es la probabilidad de que acierte cincuenta de las cien preguntas?

6.7 Si se lanza al aire un dado tres veces y consideramos como éxito el suceso múltiplo de tres, calcular la suma

$$P\begin{pmatrix}3\text{ pruebas}\\0\text{ éxitos}\end{pmatrix}+P\begin{pmatrix}3\text{ pruebas}\\1\text{ éxito}\end{pmatrix}+P\begin{pmatrix}3\text{ pruebas}\\2\text{ éxitos}\end{pmatrix}+P\begin{pmatrix}3\text{ pruebas}\\3\text{ éxitos}\end{pmatrix}$$

6.8 Un opositor conoce el 80% de los temas. Saca a suerte seis temas, de los que ha de elegir tres. ¿Cuál es la probabilidad de sacar, al menos, tres temas conocidos?

• PROPOSICIÓN 6.1: En los procesos de pruebas repetidas, como los descritos anteriormente, se verifica

$$P\begin{pmatrix}n\text{ pruebas}\\0\text{ éxitos}\end{pmatrix}+P\begin{pmatrix}n\text{ pruebas}\\1\text{ éxito}\end{pmatrix}+\ldots+P\begin{pmatrix}n\text{ pruebas}\\n-1\text{ éxitos}\end{pmatrix}+P\begin{pmatrix}n\text{ pruebas}\\n\text{ éxitos}\end{pmatrix}=1$$

Demostración: Bastará tener en cuenta que los $n+1$ sucesos incompatibles considerados suman el suceso cierto.

EJERCICIO

6.9 Demostrar la proposición 6.1, teniendo en cuenta el teorema 4.1 del § 7 y que $p+q=1$, según se deduce de la consecuencia CI) del párrafo 3 de este §.

• EJEMPLO 6.1: Sea el experimento aleatorio compuesto consistente en lanzar la moneda al aire n veces. Consideremos como éxito el hecho de obtener *cara*. Supongamos que nos interesa saber el número, x, de veces que se obtiene *cara*, es decir, *éxito*. Esto nos lleva a considerar la variable aleatoria x, igual al número de caras obtenidas en las n pruebas. En la figura 6.2 se representa el diagrama de barras que representa la distribución de probabilidad correspondiente a cuatro pruebas con la moneda.

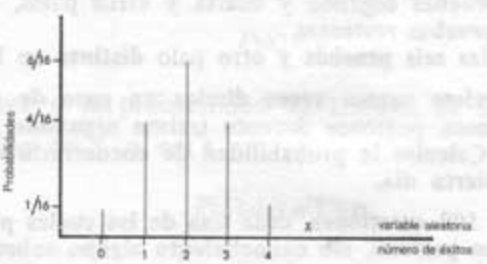


Figura 6.2

EJERCICIOS

6.10 Repita veinte veces el experimento aleatorio compuesto consistente en verificar cuatro pruebas consecutivas con la moneda, o lo que es lo mismo, lanzar cuatro monedas de una vez, veinte veces. Calcule las frecuencias relativas obtenidas. Construya una figura similar a la figura 6.2 sustituyendo en ella las probabilidades por las frecuencias relativas obtenidas en los veinte lanzamientos.

6.11 Compare la figura obtenida en el ejercicio anterior con la figura 6.2. Si en vez de veinte pruebas hubiéramos realizado veinte millones de pruebas, ¿qué ocurriría?

6.12 Construya una figura similar a la 6.2, sustituyendo $n=4$ por $n=16$.

Como en la distribución que estamos estudiando se verifica que la

$$P\begin{pmatrix} n \text{ pruebas} \\ x \text{ éxitos} \end{pmatrix} = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

siendo el segundo miembro de esta igualdad uno de los términos del desarrollo de la potencia del binomio

$$(p+q)^n$$

de aquí que a esta distribución se le llame *binomial*. También se le llama distribución de *pruebas repetidas* y distribución de BERNOUILLI (1654-1705).

7. Tipificación de la variable

• EJEMPLO 7.1: Consideremos el conjunto de las banderas de los países del Mercado Común Europeo. Anotemos la frecuencia con que aparecen en sus banderas cada uno de los colores, como se indica en la figura 7.1. Este ejem-

Colores	*Observaciones*	*Frecuencia absoluta*
amarillo	Bélgica, Alemania	2
azul	Francia, Holanda, Luxemburgo	3
blanco	Francia, Holanda, Luxemburgo, Italia	4
negro	Bélgica, Alemania	2
rojo	Bélgica, Francia, Italia, Alemania, Luxemburgo, Holanda	6
verde	Italia	1

Figura 7.1

plo puede interesar a niños, si se desea iniciarlos en la recogida y tabulación de datos estadísticos. Para realizar cálculos interesa, como se ha indicado al principio del párrafo 4, asociar a cada suceso elemental un número. Si, para ello, consideramos la aplicación de la figura 7.2, la variable aleatoria

$$X=\{3,\ 5,\ 10,\ 0,\ 1,\ 4\}$$

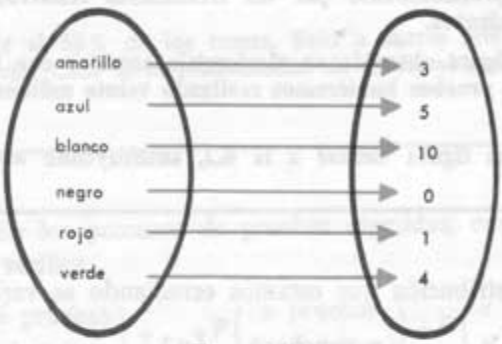


Figura 7.2

Estamos ya en condiciones de calcular la media y la desviación típica de esta distribución, para lo cual operamos ayudándonos del esquema de la figura 7.3

x_i	n_i	$n_i x_i$	$n_i x_i^2$
3	2	6	18
5	3	15	75
10	4	40	400
0	2	0	0
1	6	6	6
4	1	4	16
	18	71	515

Figura 7.3

Se obtiene así:

$$\bar{x}=\frac{71}{18}\simeq 4;\qquad s=\sqrt{\frac{515}{18}-\left(\frac{71}{18}\right)^2}=\sqrt{\frac{4229}{324}}\simeq 3{,}6$$

Si de cada valor de la variable restamos la media y dividimos el resultado por la desviación típica, se obtiene lo que se indica en la figura 7.4.

Se obtiene así una aplicación que asocia, a cada valor de la variable X, otro número. Por otra parte, mediante la aplicación de la figura 7.2 se ha asociado

$$3 \longrightarrow \frac{3-\bar{x}}{s} \simeq \frac{3-4}{3{,}6} = -5/18$$

$$5 \longrightarrow \frac{5-4}{3{,}6} = 5/18$$

$$10 \longrightarrow \frac{10-4}{3{,}6} = 5/3$$

$$0 \longrightarrow \frac{0-4}{3{,}6} = -10/9$$

$$1 \longrightarrow \frac{1-4}{3{,}6} = -5/6$$

$$4 \longrightarrow \frac{4-4}{3{,}6} = 0$$

Figura 7.4

a cada color, o suceso elemental posible, un número. Si consideramos la aplicación producto de la aplicación de la figura 7.2 por la aplicación de la figura 7.4, obtenemos la aplicación de la figura 7.5

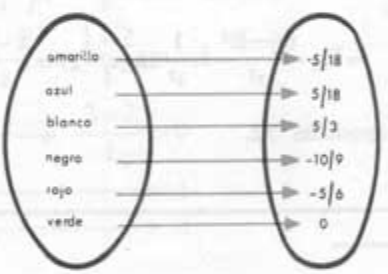


Figura 7.5

es decir, obtenemos otra variable aleatoria

$$X' = \{-5/18,\ 5/18,\ 5/3,\ -10/9,\ -5/6,\ 0\}$$

que también permite describir numéricamente el conjunto de los sucesos elementales del mismo experimento aleatorio.

Este proceso, mediante el cual se pasa de una variable aleatoria a la que resulta restando, a cada valor x_i de la variable, la media $\bar{x}$ obtenida y dividiendo a continuación por la desviación típica, se llama de *tipificación de la variable*. Es decir, si llamamos X' a la variable tipificada, será

$$x_i' = \frac{x_i - \bar{x}}{s}$$

para cada valor x_i de la variable aleatoria de partida.

EJERCICIOS

7.1 Tipificar la variable de las distribuciones dadas en el ejercicio 4.7 y en la tabla de la figura 4.6.

7.2 Calcular la media y la desviación típica correspondiente a las distribuciones citadas en el ejercicio anterior, operando con las variables tipificadas.

• PROPOSICIÓN 7.1: *La media,* $\bar{x}'$, *de una variable tipificada,* X', *es cero, y su desviación típica,* s', *es igual a uno.*

Demostración:

$$\bar{x}'=\Sigma h_i x_i'=\Sigma h_i \frac{x_i-\bar{x}}{s}=\frac{1}{s}\Sigma h_i(x_i-\bar{x})=\frac{1}{s}\frac{\Sigma n_i(x_i-\bar{x})}{\Sigma n_i}=0$$

sin más que tener en cuenta el ejercicio 5.8. Por otra parte,

$$s'^2=\Sigma h_i(x_i'-\bar{x}')^2=\Sigma h_i(x_i'-0)^2=\Sigma h_i(x_i')^2=\Sigma h_i\left(\frac{x_i-\bar{x}}{s}\right)^2=$$

$$=\Sigma h_i\frac{(x_i-\bar{x})^2}{s^2}=\frac{1}{s^2}\Sigma h_i(x_i-\bar{x})^2=1$$

teniendo en cuenta la proposición 5.2.

EJERCICIO

7.3 Repetir la demostración de la proposición 7.1 sin utilizar notación condensada.

• EJEMPLO 7.2: Tipifiquemos la variable del ejemplo 6.1. Designemos por p_i a la probabilidad del valor x_i de la variable. Como estamos ante una distribución teórica, hemos de sustituir las frecuencias relativas por las probabilidades, según se dijo en el párrafo 3. De la proposición 5.1 se deduce que la media será ahora

$$\bar{x}=\Sigma p_i x_i$$

y de la proposición 5.2 se deduce que la desviación típica será

$$s=\sqrt{\Sigma p_i x_i^2-\bar{x}^2}$$

En la figura 7.6 se muestra la tabla a partir de la cual calculamos la me-

dia y la desviación típica:

$$\bar{x} = \Sigma p_i x_i = 2; \qquad s = \sqrt{\Sigma p_i x_i^2 - \bar{x}^2} = \sqrt{5 - 2^2} = 1$$

Variable x_i	*Probabilidad* p_i	$p_i x_i$	$p_i x_i^2$
0	1/16	0	0
1	4/16	4/16	4/16
2	6/16	12/16	24/16
3	4/16	12/16	36/16
4	1/16	4/16	16/16
		2	5

Figura 7.6

Tipificando la variable, como se indica en la figura 7.7, se obtiene

$$0 \longrightarrow \frac{0-\bar{x}}{s} = \frac{0-2}{1} = -2$$

$$1 \longrightarrow \frac{1-\bar{x}}{s} = \frac{1-2}{1} = -1$$

$$2 \longrightarrow \frac{2-2}{1} = 0$$

$$3 \longrightarrow 1$$

$$4 \longrightarrow 2$$

Figura 7.7

Variable tipificada x_i'	*Probabilidad* p_i
−2	1/16
−1	4/16
0	6/16
1	4/16
2	1/16

Figura 7.8

la distribución de la variable tipificada, X', como se indica en la figura 7.8. En la figura 7.9 se representa el diagrama de barras correspondiente a esta distribución, una vez tipificada la variable.

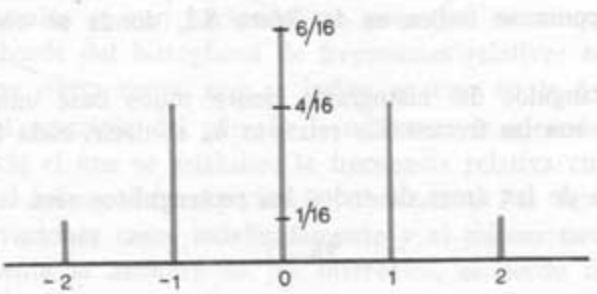


Figura 7.9

EJERCICIOS

7.4 Compare el diagrama de barras de la figura 7.9 con el de la figura 6.2. Intente obtener conclusiones.

7.5 Repita el ejemplo 7.2 para el caso $n=16$, como en el ejercicio 6.12, hasta llegar a construir el diagrama de barras correspondiente a la variable tipificada, como se ha hecho en la figura 7.9 para el caso $n=4$. Compare con el diagrama de barras obtenido en el ejercicio 6.12.

8. Curva de probabilidad

Consideremos la distribución de pesos de niños de cuatro años dada en la tabla de la figura 8.1.

Intervalos	*Centros de intervalos*	*Frecuencia absoluta*	*Frecuencia relativa*
18,5-19,5	19	2	$0,02=h_1$
19,5-20,5	20	11	$0,11=h_2$
20,5-21,5	21	9	$0,09=h_3$
21,5-22,5	22	23	$0,23=h_4$
22,5-23,5	23	27	$0,27=h_5$
23,5-24,5	24	16	0,16
24,5-25,5	25	8	0,08
25,5-26,5	26	3	0,03
26,5-27,5	27	1	0,01
		100	

Figura 8.1

Construyamos el correspondiente histograma para representar las frecuencias relativas, como se indica en la figura 8.2, donde se observa fácilmente que:

a) Los rectángulos del histograma tienen todos base unidad y sus respectivas alturas son las frecuencias relativas h_i, es decir, cada rectangulito tiene por área h_i.

b) La suma de las áreas de todos los rectangulitos será

$$\Sigma h_i = 1$$

c) La frecuencia relativa del suceso consistente en obtener valor menor

igual que 22, para la variable, será

$$h_1 + h_2 + h_3 + h_4 = 0{,}02 + 0{,}11 + 0{,}09 + 0{,}23 = 0{,}45$$

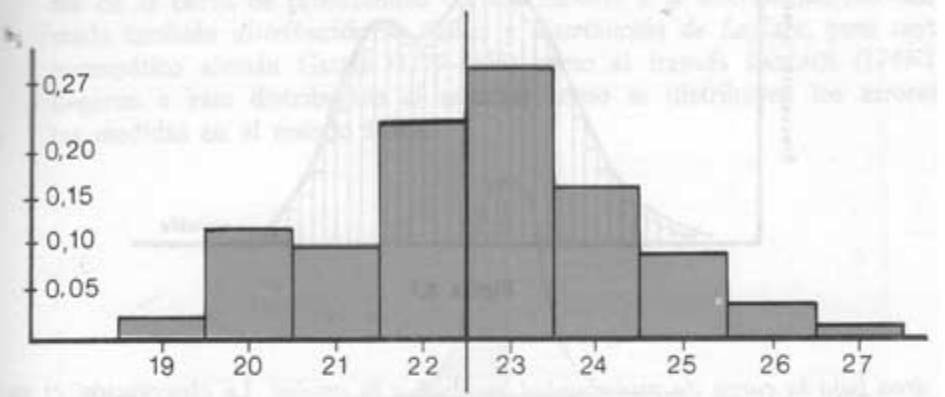


Figura 8.2

número que coincide con la suma de las áreas de los rectángulos situados a la izquierda de la línea roja vertical en la figura 8.2.

Supongamos ahora que aumentamos el número de niños observados, al mismo tiempo que hacemos más pequeños los intervalos. Por ejemplo, se consideran intervalos de 10 gramos, en vez de intervalos de un kilogramo. Se obtiene entonces un histograma en que los rectángulos tienen menor base. A medida que aumentamos el número de observaciones y hacemos más pequeños los intervalos, el contorno del histograma se va suavizando. Esta misma observación experimental se comprueba en cualquier fenómeno aleatorio. Si imaginamos que el número de observaciones aumenta indefinidamente y los intervalos se van haciendo tan pequeños como queramos suponer, entonces el borde del histograma de frecuencias relativas tenderá a estabilizarse hacia una cierta curva, que se indica en rojo en la figura 8.3.

Ahora bien, al principio del párrafo 3 indicamos la idea de probabilidad como número hacia el que se estabiliza la frecuencia relativa cuando aumenta indefinidamente el número de experiencias realizadas. Por tanto, cuando el número de observaciones crece indefinidamente y al mismo tiempo se disminuye indefinidamente la anchura de los intervalos, el borde del histograma de frecuencias relativas se estabilizará hacia una curva que indica la probabilidad para cada valor de la variable, por lo que se llama *curva de probabilidad*.

La observación *b)* hecha anteriormente, en este párrafo, sugiere que *el*

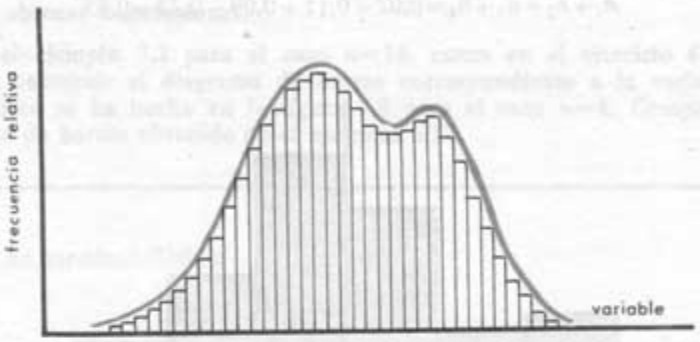


Figura 8.3

área bajo la curva de probabilidad es igual a la unidad. La observación *c)* sugiere que la probabilidad del suceso consiste en obtener un valor de la variable inferior o igual a un valor fijo *a*, de la variable, será el área coloreada en la figura 8.4.

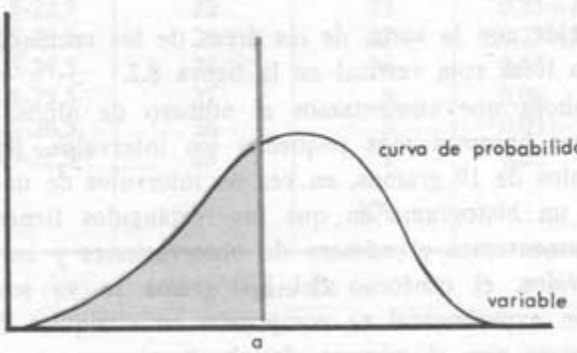


Figura 8.4

9. Distribución normal

Supongamos ahora que el proceso que acaba de describirse se repite para la distribución binomial, una vez tipificada. Supongamos que lanzamos *n* veces una moneda y consideremos la variable aleatoria *X*, igual al número de veces que se puede obtener cara. Si se construye el correspondiente diagrama de barras, para el caso de variable tipificada, *se observa experimentalmente* que, cuando *n* crece, el diagrama de barras tiende hacia una posición estable

Esto no sólo es un hecho experimental, pues *se demuestra* matemáticamente que, cuando n crece indefinidamente, la variable binomial tipificada tiende hacia una variable continua. Esta distribución hacia la cual tiende la distribución binomial, según se comprueba experimentalmente y se demuestra matemáticamente, se llama *distribución normal*. En la figura 9.1 se muestra la forma de la curva de probabilidad correspondiente a la *distribución normal*, llamada también *distribución de Gauss* y *distribución de Laplace*, pues tanto el matemático alemán GAUSS (1777-1855) como el francés LAPLACE (1749-1827) llegaron a esta distribución al estudiar cómo se distribuyen los errores de las medidas en el mundo físico.

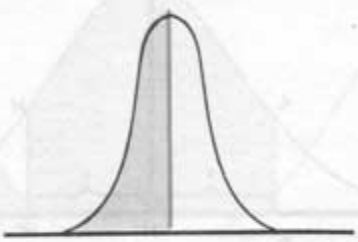


Figura 9.1

En la figura 9.2 se repite el diagrama de barras correspondiente a la distribución binomial de probabilidad para el caso $n=4$, supuesta tipificada la variable. En ella se representa en rojo la poligonal cuyos vértices son los extremos superiores de las barras. Obsérvese la relativa similitud entre esta poligonal y la curva de la figura 9.1. Naturalmente este parecido aumentará a medida que se haga mayor el número n de pruebas.

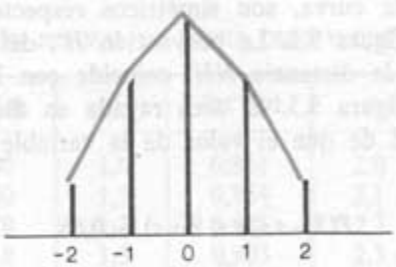


Figura 9.2

EJERCICIO

9.1 Construya una poligonal similar a la de la figura 9.2, a partir del diagrama de barras obtenido en el ejercicio 7.5. Compare la poligonal resultante con la curva de probabilidad correspondiente a la distribución normal.

La curva de probabilidad normal, representada en la figura 9.1, tiene forma acampanada, por lo que se llama frecuentemente *campana de Gauss*. El área bajo la curva es igual a uno, según se indicó en el párrafo precedente. La curva es simétrica respecto de la recta trazada en rojo en la figura 9.1, por lo que el área rayada, es decir, el área bajo la curva y situada a la izquierda de dicha recta trazada en rojo será igual a 0,5.

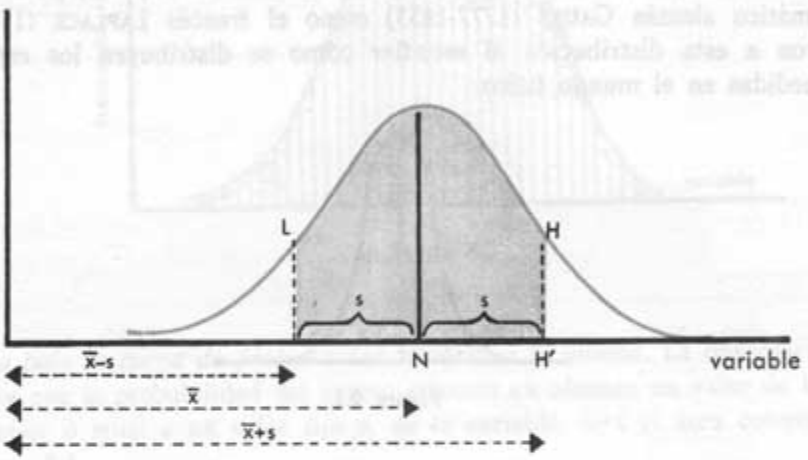


Figura 9.3

En la figura 9.3 se representa la campana de Gauss correspondiente a una distribución normal, cuya media es $\bar{x}$ y cuya desviación típica es s. Como se observa en la figura, la media, la moda y la mediana coinciden en el mismo valor de la variable en la distribución normal. Los puntos H y L, donde cambia la concavidad de la curva, son simétricos respecto del eje de simetría, trazado en rojo en la figura 9.1. La proyección H', del punto H sobre el eje horizontal, es tal, que la distancia NH' coincide con la desviación típica, s, como se indica en la figura 9.3. El área rayada en dicha figura, que corresponde a la probabilidad de que el valor de la variable esté comprendido entre $\bar{x}-s$ y $\bar{x}+s$, es

$$P(\bar{x}-s \leqslant x \leqslant \bar{x}+s) \simeq 0{,}68$$

es decir, en la distribución normal, el 68% de las observaciones estarán comprendidas entre $\bar{x}-s$ y $\bar{x}+s$. Análogamente, la

$$P(\bar{x}-2s \leqslant x \leqslant \bar{x}+2s) \simeq 0{,}25 = 95\%$$

lo que corresponde al área rayada en la figura 9.4.

EJERCICIO

9.2 Análogamente a los casos anteriores, también puede probarse que

$$P(\bar{x}-3s \leqslant x \leqslant \bar{x}+3s) \simeq 0{,}98 = 98\%$$

Ráyese el área correspondiente a este caso, como se ha hecho en las figuras 9.3 y 9.4.

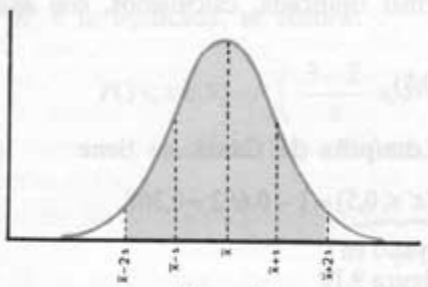


Figura 9.4

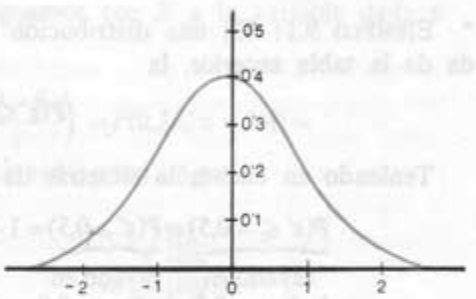


Figura 9.5

En la figura 9.5 se representa la curva de probabilidad correspondiente a la distribución normal tipificada, es decir, la campana de Gauss correspondiente al caso

$$\bar{x}' = 0; \qquad s' = 1$$

que está tabulada, como se indica en la figura 9.6.

TABLA DE DISTRIBUCIÓN NORMAL DE MEDIA CERO Y DESVIACIÓN TÍPICA UNO

a	$P(x' \leqslant a)$	a	$P(x' \leqslant a)$	a	$P(x' \leqslant a)$
0,0	0,500	1,0	0,841	2,0	0,977
0,1	0,540	1,1	0,864	2,1	0,982
0,2	0,579	1,2	0,885	2,2	0,986
0,3	0,618	1,3	0,903	2,3	0,989
0,4	0,656	1,4	0,919	2,4	0,992
0,5	0,692	1,5	0,933	2,5	0,994
0,6	0,726	1,6	0,945	2,6	0,995
0,7	0,758	1,7	0,955	2,7	0,996
0,8	0,788	1,8	0,964	2,8	0,997
0,9	0,816	1,9	0,971	2,9	0,998
				...	.....

Figura 9.6

Para manejar la tabla anterior basta observar que, por ejemplo, la probabilidad de que el valor x' de la variable sea menor o igual a 0,8, en una distribución normal tipificada, será, según nos indica la tabla,

$$P(x' \leqslant 0{,}8) = 0{,}788$$

lo que corresponde al área rayada en la figura 9.7.

Como la curva es simétrica, basta construir la tabla a partir del valor central cero, como se ha hecho.

Veamos a continuación varios ejemplos que aclararán el manejo de la tabla dada.

• EJEMPLO 9.1: En una distribución normal tipificada, calculemos, con ayuda de la tabla anterior, la

$$P(x' \leqslant -0{,}5)$$

Teniendo en cuenta la simetría de la campana de Gauss, se tiene

$$\underbrace{P(x' \leqslant -0{,}5)}_{\text{rayado en la figura 9.8}} = \underbrace{P(x' \geqslant 0{,}5)}_{\text{rayado en la figura 9.9}} = 1 - \underbrace{P(x' \leqslant 0{,}5)}_{\text{rayado en la figura 9.10}} = 1 - 0{,}692 = 0{,}308$$

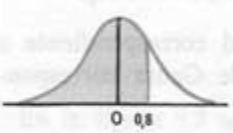


Figura 9.7

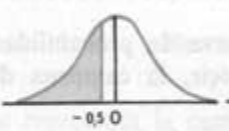


Figura 9.8

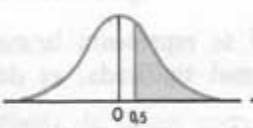


Figura 9.9

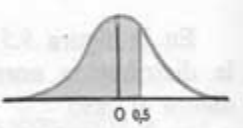


Figura 9.10

• EJEMPLO 9.2: Para calcular la

$$P(-0{,}5 \leqslant x' \leqslant 0{,}8)$$

en una distribución normal tipificada, operaremos como se indica a continuación

$$\underbrace{P(-0{,}5 \leqslant x' \leqslant 0{,}8)}_{\text{rayado en la figura 9.11}} = P(x' \leqslant 0{,}8) - P(x' \leqslant -0{,}5) = 0{,}788 - 0{,}308 = 0{,}480$$

EJERCICIO

9.3 Calcular la

$$P(-0{,}3 \leqslant x' \leqslant -0{,}1)$$

para una distribución normal de media cero y desviación típica uno.

• EJEMPLO 9.3: Si se trata de una variable aleatoria normal de media 2 y desviación típica 5 y queremos calcular la probabilidad de que la variable tome un valor comprendido entre 3 y 9, bastará tipificar para, de este modo, obtener una distribución normal de media cero y desviación típica uno. Al tipificar, se tendrá:

a) al valor 3, de la variable dada, le corresponderá $\frac{3-\bar{x}}{s}=\frac{3-2}{5}=0{,}2$ de la variable tipificada;

b) al valor 9, de la variable dada, le corresponderá $\frac{9-\bar{x}}{s}=\frac{9-2}{5}=1{,}4$ de la variable tipificada;

como se indica en la figura 9.12. Si designamos por X a la variable dada y por X' a la tipificada, se tendrá:

$$P(3\leqslant x\leqslant 9)=P\left(\frac{3-\bar{x}}{s}\leqslant x'\leqslant\frac{9-\bar{x}}{s}\right)=P(0{,}2\leqslant x'\leqslant 1{,}4)=$$

$$=P(x'\leqslant 1{,}4)-P(x'\leqslant 0{,}2)=0{,}919-0{,}579=0{,}340$$

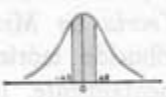


Figura 9.11

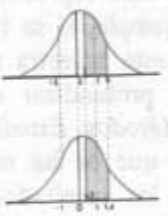


Figura 9.12

EJERCICIO

9.4 Calcular la

$$P(42\leqslant x\leqslant 59)$$

para una distribución normal de media 50 y desviación típica 10.

La distribución normal es la más importante, por ser la que con mayor frecuencia aparece en los fenómenos aleatorios de la vida real. No obstante, existen otras distribuciones distintas de la normal.

Cuando se desea hacer cálculos más aproximados no basta con las tres cifras decimales que da la tabla de distribución normal de la figura 9.6. Una de las más utilizadas es la siguiente:

R. A. FISHER y F. YATES, *Tablas Estadísticas para Investigadores Científicos*. Ed. Aguilar. Madrid.

La distribución normal que acaba de estudiarse es una distribución teórica y cabe preguntarse: dada una distribución de frecuencias, obtenida como resultado de efectuar unas observaciones, ¿se adaptará la distribución normal a describir adecuadamente la distribución de frecuencias obtenida experimentalmente? Por ejemplo, supongamos que se realiza un test a un conjunto de personas. ¿Se puede encontrar una distribución teórica de probabilidad normal, que se ajuste a los resultados obtenidos? En principio, parece natural exigir que el histograma de frecuencias relativas, obtenido experimentalmente, ha de adaptarse a la campana de Gauss, pero se comprende que esta condición no es suficiente. No podemos entrar aquí en este estudio y nos contentamos con sugerir el problema.

Supongamos que se desea medir el cociente intelectual de los españoles. Se comprende que no es necesario hacer una prueba a cada uno de ellos. Bastará elegir unos cuantos, es decir, bastará tomar una *muestra* y de los resultados obtenidos con ella inducir los resultados que se obtendrían si la prueba hubiera sido hecha a toda la *población* o *colectivo*. Es evidente que la muestra sólo será representativa de la población si ha sido elegida adecuadamente. Por ejemplo, si se toma como muestra a los estudiantes de un curso de Magisterio, esta muestra no representará a la población.

Si se desea profundizar en estas cuestiones, puede consultarse el libro: Sixto Ríos, *Métodos Estadísticos, Tomo II. Teoría de Muestras*. Madrid. 1963. Una vez que se ha encontrado una distribución teórica que describe adecuadamente los resultados obtenidos experimentalmente, la consideración de este modelo teórico permite prever resultados con una cierta probabilidad.

10. Coordenadas cartesianas rectangulares

Nota: Puede continuarse la lectura del capítulo, saltando este párrafo 10, que puede ser útil a los alumnos procedentes de la Sección de Letras del Bachillerato Superior.

Consideremos en el plano dos rectas perpendiculares, como se indica en la figura 10.1. A la horizontal le llamaremos *eje de abscisas* y a la vertical *eje de ordenadas*. Supongamos que se ha elegido un segmento unidad mediante el cual a cada punto del eje de abscisas se puede asignar un número, como se indica en la referida figura, de modo que el valor cero corresponda al punto en que se cortan los ejes u *origen de coordenadas*. De modo análogo, a cada punto del eje de ordenadas se asocia también un número, como se indica en la figura.

El punto P, representado en la figura 10.1, tiene por abscisa 3 y por ordenada 2, por lo que diremos que el punto P tiene por coordenadas (3, 2). Análogamente, el punto S de la figura tiene por coordenadas (6, 4), pues su abscisa es 6 y su ordenada 4. Así, a cada punto del plano corresponde una pareja ordenada (x, y) de números, el primero de los cuales representa a su

abscisa y el segundo a su ordenada. Por ejemplo, en la figura 10.1 se tienen los siguientes puntos, cuyas coordenadas se indican a continuación:

$$R \longrightarrow (-3, 1); \qquad T \longrightarrow (-2, -3); \qquad V \longrightarrow (9/2, -2)$$

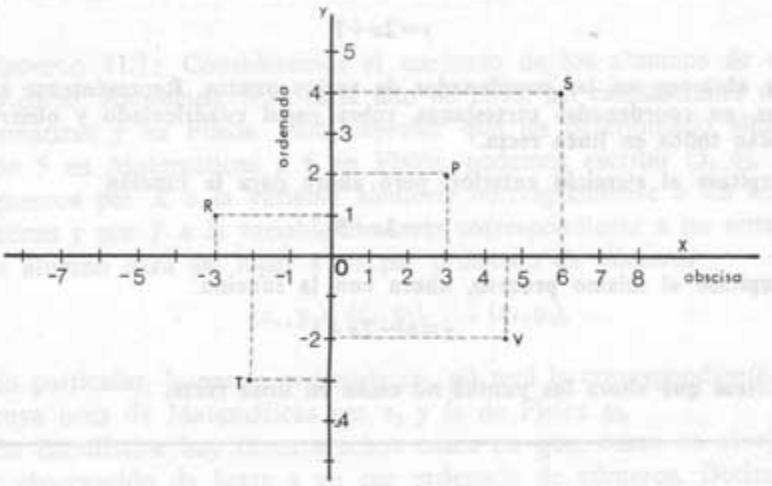


Figura 10.1

EJERCICIOS

10.1 **Representar gráficamente, utilizando papel cuadriculado, los puntos de coordenadas:**

(3, 3), (5, 2), (4, −3), (−2, 1), (−5, −4), (2, −15)

10.2 **Sobre un papel cuadriculado dibuje unos ejes de coordenadas. Señale ahora varios puntos sobre el papel y diga cuáles son sus respectivas coordenadas.**

Consideremos la expresión

$$y = 2x + 1$$

Si en ella sustituimos x por 3.

$$y = 2 \cdot 3 + 1 = 6 + 1 = 7$$

obtenemos para y el valor 7. Así, para cada valor que demos a x, obtendremos un valor para y, en la expresión anterior. La expresión anterior define, por tanto, una *función*, en el sentido del párrafo 9 del § 3.

EJERCICIOS

10.3 Tómense varios valores para la abscisa x. Para cada uno de ellos, calcúlese la correspondiente ordenada, y, mediante la función

$$y=2x+1$$

Se obtienen así las coordenadas de varios puntos. Represéntense esos puntos, en coordenadas cartesianas, sobre papel cuadriculado y obsérvese que están todos en línea recta.

10.4 Repítase el ejercicio anterior, pero ahora para la función

$$y=3x-5$$

10.5 Repítase el mismo proceso, ahora con la función

$$y=x^2-2x+3$$

Nótese que ahora los puntos no están en línea recta.

En general, se demuestra que al representar gráficamente las funciones de la forma

$$\boxed{y=bx+a}$$

donde a y b son números, se obtienen *rectas,* y al representar gráficamente funciones que no sean de este tipo se obtienen otras líneas, no rectas.

EJERCICIOS

10.6 Represente gráficamente la recta de ecuación

$$y=-x+1$$

¿Pasa esta recta por el punto de coordenadas (3, 1)? ¿Pasa por el (4, −3)?

10.7 Represente gráficamente la recta de ecuación

$$y=2$$

Nótese que se trata del caso: $b=0$; $a=2$ de la ecuación $y=bx+a$.

En memoria del gran filósofo-matemático francés DESCARTES (1596-1650) se da el nombre de *cartesianas* a estas coordenadas. Cuando, como hemos he-

cho aquí, se toman perpendiculares los dos ejes de coordenadas, se dice que se trata de coordenadas cartesianas *rectangulares.*

11. Variable bidimensional

• EJEMPLO 11.1: Consideremos el conjunto de los alumnos de un determinado curso. Anotemos, para cada uno de ellos, las calificaciones obtenidas en Matemáticas y en Física. Para expresar que un determinado alumno ha obtenido 5 en Matemáticas y 6 en Física, podemos escribir (5, 6). En general, designemos por X a la variable aleatoria correspondiente a las notas de Matemáticas y por Y a la variable aleatoria correspondiente a las notas de Física. Cada alumno dará así lugar a un par ordenado de números:

$$(x_1, y_1),\ (x_2, y_2),\ \ldots,\ (x_i, y_i),\ \ldots$$

En particular, la pareja ordenada (x_2, y_2) será la correspondiente a un alumno cuya nota de Matemáticas sea x_2 y la de Física y_2.

En Estadística hay otros muchos casos en que, como en el ejemplo 11.1, cada observación da lugar a un par ordenado de números. Decimos entonces que estamos ante una *variable aleatoria bidimensional.* Otros ejemplos de variables bidimensionales son:

a) Peso y estatura de cada persona de un cierto conjunto.
b) Velocidad de un coche y recorrido al frenar.
c) Cociente intelectual y nota que obtuvo en Reválida cada alumno.
d) Estatura y número de calzado para cada persona de un cierto conjunto.
e) Estatura de cada persona y estatura de su padre.

EJERCICIO

11.1 Buscar otros ejemplos de variables bidimensionales.

Volviendo al ejemplo 11.1, las observaciones realizadas pueden anotarse en una tabla, como se indica en la figura 11.1.

Las observaciones de la tabla de la figura 11.1 pueden representarse gráficamente en coordenadas cartesianas, construyendo el *diagrama de dispersión,* indicado en la figura 11.2. El diagrama de dispersión también se llama *nube de puntos.*

Nota de Matemáticas x_i	*Nota de Física* y_i
5	6
4	5
6	6
4	3
9	7
2	3
5	5
8	7
9	8
2	1
8	10
4	4
3	5
3	4
6	8

Figura 11.1

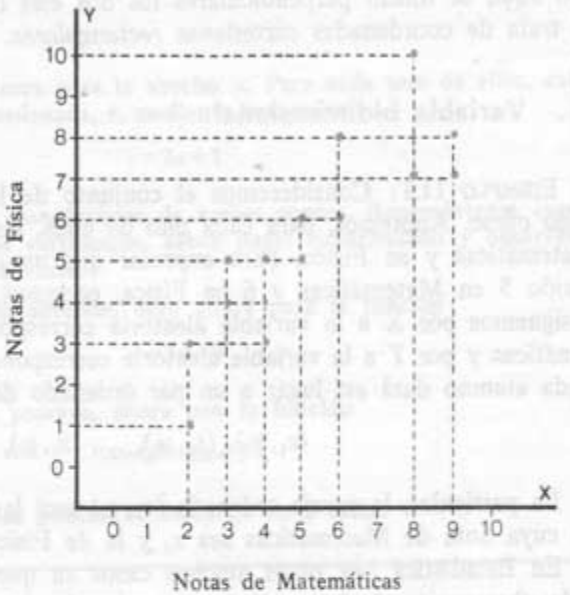


Figura 11.2

EJERCICIO

11.2 Con un vehículo se han verificado las siguientes pruebas, cuyos resultados se indican en la tabla de la figura 11.3.

Velocidad del vehículo al comenzar a frenar	*Espacio recorrido desde que comienza a frenar hasta parar totalmente*
15 km/hora	**2 metros**
30 »	**7 »**
45 »	**18 »**
60 »	**29 »**
75 »	**46 »**
90 »	**77 »**
105 »	**95 »**

Figura 11.3

Construir la nube de puntos **correspondiente a esta variable aleatoria bidimensional.**

La recogida de datos puede simplificarse agrupando las observaciones como se indica en la tabla de la figura 11.4, donde, por ejemplo, aparecen siete

puntos en la casilla (5, 14), lo que indica que hubo siete alumnos de catorce años que obtuvieron nota 5.

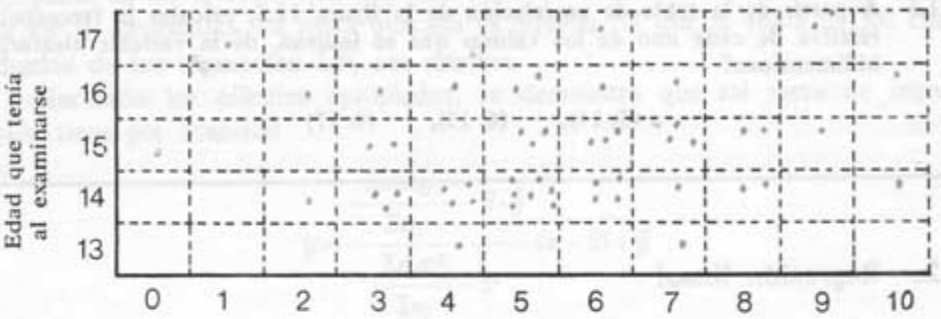


Figura 11.4

A partir de la tabla de la figura 11.4 se pasa a la tabla de la figura 11.5, llamada *tabla de correlación*, donde se escribe en cada casilla el número de puntos que había en esa casilla en la tabla de la figura 11.4, es decir, la frecuencia absoluta correspondiente a ese valor de la variable bidimensional. Así, en la casilla (5, 14) figura el número 7, es decir, 7 es la frecuencia absoluta del valor (5, 14) de la variable bidimensional considerada.

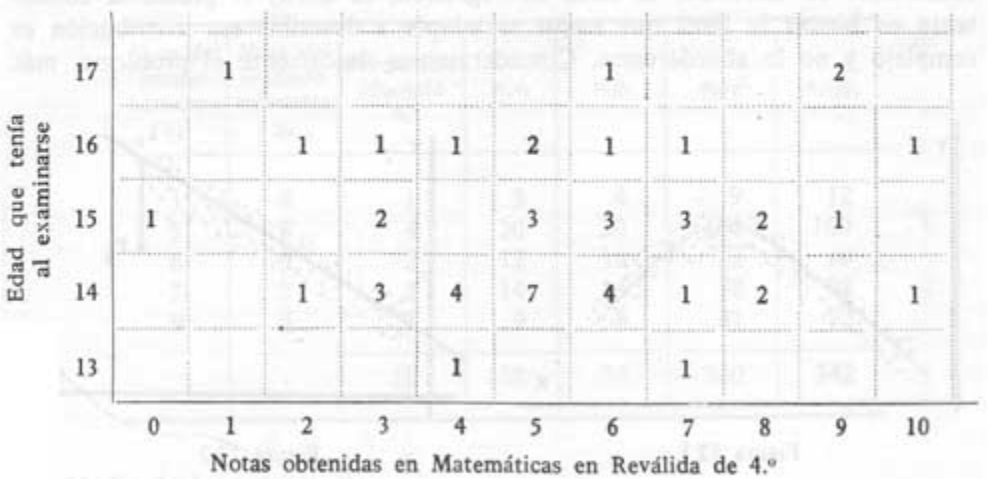


Figura 11.5

EJERCICIO

11.3 A partir de la tabla de correlación de la figura 11.5, calcular la frecuencia relativa de cada uno de los valores que se indican, de la variable aleatoria bidimensional

$$(5, 14), \quad (6, 15), \quad (4, 17)$$

12. Regresión lineal

Al observar el diagrama de dispersión de la figura 11.2 se nota una cierta dependencia entre los valores de las variables X e Y.

En general, el problema más interesante que sugiere la consideración de una variable aleatoria bidimensional es el estudio de la posible dependencia entre los valores de las dos variables unidimensionales, que constituyen la variable bidimensional.

En la figura 12.1 se representa la nube de puntos correspondiente a una cierta distribución bidimensional. En ella se observa una concentración de los puntos de la nube en torno a una cierta línea, representada en rojo, que se llama *línea de regresión*. Dada una distribución bidimensional, el problema consistente en encontrar la línea de regresión, es decir, el problema consistente en buscar la línea que mejor se adapte a describir esa distribución es complejo y no lo abordaremos. Consideraremos únicamente el problema, más

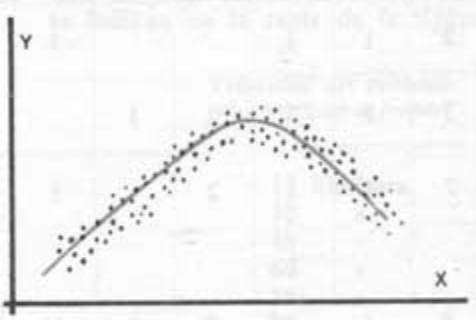


Figura 12.1

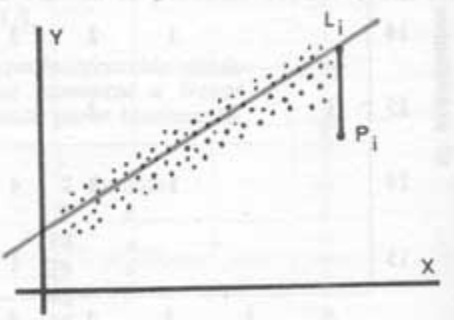


Figura 12.2

simple, consistente en buscar la recta que mejor se adapta a describir la distribución dada, como se indica en la figura 12.2. El problema consistente en buscar tal recta se llama problema de la *regresión lineal*. Para buscar tal recta es necesario precisar lo que se entiende por *adaptarse bien a describir la distribución*. Para cada punto P_i de la nube podemos considerar el punto L_i de la recta de regresión buscada, cuya abscisa sea igual a la abscisa de P_i, como

se indica en la figura 12.2. Es decir, para cada punto P_i podemos considerar el punto L_i de la recta que buscamos, tal que el segmento $\overline{L_iP_i}$ sea paralelo al eje de ordenadas. La recta buscada es aquella tal que la suma de los cuadrados de los segmentos $\overline{L_iP_i}$ sea mínima.

Haciendo los cálculos apropiados, se demuestra que tal recta de regresión tiene por ecuación

$$y=\frac{\frac{\Sigma n_i x_i y_i}{\Sigma n_i}-\bar{x}\cdot\bar{y}}{\frac{\Sigma n_i x_i^2}{\Sigma n_i}-\bar{x}^2}(x-\bar{x})+\bar{y}$$

donde $\bar{x}$ e $\bar{y}$ son las medias de las variables unidimensionales X e Y, respectivamente, y

$$\frac{\Sigma n_i x_i^2}{\Sigma n_i}-\bar{x}^2$$

es la varianza de la variable unidimensional X, según se vio en el párrafo 5.

En el siguiente ejemplo se muestra la disposición de los cálculos para llegar a la recta de regresión.

• EJEMPLO 12.1:

Nota del primer trimestre x_i	*Nota del segundo trimestre* y_i	*Frecuencia absoluta* n_i	$n_i x_i$	$n_i y_i$	$n_i x_i^2$	$n_i x_i y_i$
3	4	1	3	4	9	12
5	5	4	20	20	100	100
6	5	2	12	10	72	60
7	7	2	14	14	98	98
9	8	1	9	8	81	72
		10	58	56	360	342

Media de la variable X:

$$\bar{x}=\frac{\Sigma n_i x_i}{\Sigma n_i}=\frac{58}{10}=5{,}8$$

Media de la variable Y:

$$\bar{y}=\frac{\Sigma n_i y_i}{\Sigma n_i}=\frac{56}{10}=5{,}6$$

Varianza para la variable X:

$$\frac{\Sigma n_i x_i^2}{\Sigma n_i} - \bar{x}^2 = \frac{360}{10} - 5{,}8^2 = 36 - 5{,}8^2 = 36 - 33{,}64 = 2{,}36$$

La columna $n_i x_i y_i$ se ha obtenido multiplicando cada número de columna $n_i x_i$ por el correspondiente número de la columna y_i, o bien cada número de la columna $n_i y_i$ por el respectivo número de la columna x_i. Al sumar, se obtiene

$$\Sigma n_i x_i y_i = 342$$

luego

$$\frac{\Sigma n_i x_i y_i}{\Sigma n_i} - \bar{x} \cdot \bar{y} = \frac{342}{10} - 5{,}8 \times 5{,}6 = 34{,}2 - 32{,}48 = 1{,}72$$

Sustituyendo en la ecuación de la recta de regresión, quedará

$$y = \frac{1{,}72}{2{,}36}(x - 5{,}8) + 5{,}6$$

y operando queda, aproximadamente,

$$\boxed{y = 0{,}73x + 1{,}36}$$

para la ecuación de la recta de regresión.

EJERCICIOS

12.1 Obtener la ecuación de la recta de regresión correspondiente a la distribución dada mediante la tabla de la figura 12.3, que representa los resultados de un examen de conducción, siendo:

$x_i \rightarrow$ **prueba teórica**

$y_i \rightarrow$ **prueba práctica**

0 → suspenso

1 → aprobado

x_i	y_i	n_i
0	0	6
0	1	14
1	0	11
1	1	19

Figura 12.3

12.2 Obtener la recta de regresión correspondiente a la distribución bidimensional dada en el ejercicio 11.2. Represéntese gráficamente dicha recta sobre la nube de puntos obtenida en aquel ejercicio. Obsérvese cómo la recta representada se ajusta a la nube de puntos.

12.3 Represéntese el punto de coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$ sobre la nube de puntos citada

en el ejercicio precedente. Obsérvese que el punto $(\bar{x}, \bar{y})$ está situado sobre la recta de regresión, obtenida en el ejercicio anterior.

12.4 Repita los dos ejercicios anteriores, pero ahora operando con la distribución dada mediante las figuras 11.2 y 11.1.

12.5 Si en la ecuación de la recta de regresión damos a x el valor $\bar{x}$, ¿cuál es el correspondiente valor de la y? Compárese el resultado obtenido con la observación hecha al final del ejercicio 12.3.

12.6 Calcular la ecuación de la recta de regresión correspondiente a la distribución dada mediante la tabla de correlación de la figura 11.5.

La regresión estudia la dependencia entre dos variables aleatorias, pero *esta dependencia es aleatoria, no funcional,* es decir, para cada valor de la variable X no podemos predecir el resultado obtenido para la variable Y, en cada caso particular, sino la posibilidad de que la Y tome un determinado valor. Por ejemplo, estudiada la regresión correspondiente a peso y altura de los españoles, su conocimiento permite, sabida cuál es la estatura de un cierto señor, determinar no su peso, sino la probabilidad de que su peso tenga un cierto valor.

El inglés GALTON, uno de los pioneros de la Estadística, hizo un estudio de la dependencia aleatoria existente entre la estatura de los hijos y la de sus respectivos padres, encontrando que la estatura media de los hijos tiende a *regresar* hacia la estatura media de la población. De aquí el nombre de *regresión,* que se da en general al estudio de la dependencia aleatoria.

Si se desea conocer el cálculo que conduce a establecer la ecuación de la recta de regresión, puede encontrarse en el libro:

S. Ríos, *Introducción a los Métodos de la Estadística,* lección 7.ª Madrid, 1952.

13. Coeficiente de correlación

Una vez determinada la recta de regresión, interesa saber si los puntos del diagrama de dispersión o nube de puntos están muy concentrados en torno a dicha recta, como ocurre en el caso de la figura 13.1, o si están dispersos respecto a dicha recta, como ocurre en el caso de la figura 13.2.

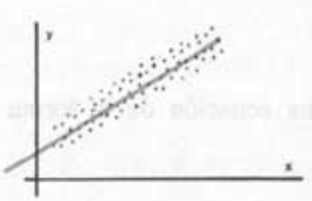


Figura 13.1

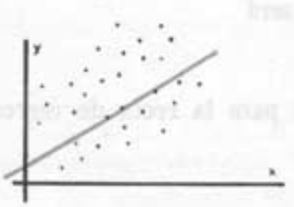


Figura 13.2

Para medir tal dispersión se introduce el *coeficiente de correlación lineal*, r, que es, por definición

$$r=\frac{\frac{\Sigma n_i x_i y_i}{\Sigma n_i}-\bar{x}\cdot\bar{y}}{\sqrt{\left(\frac{\Sigma n_i x_i^2}{\Sigma n_i}-\bar{x}^2\right)\left(\frac{\Sigma n_i y_i^2}{\Sigma n_i}-\bar{y}^2\right)}}$$

cuyo denominador es el producto de las desviaciones típicas de las variables unidimensionales X e Y.

Se demuestra que

$$r^2\leqslant 1$$

El hecho de que r^2 sea pequeño, próximo a cero, indica que los puntos están muy dispersos respecto de la recta de regresión, según se demuestra. Por el contrario, cuando r^2 es grande, próximo a uno, los puntos están muy concentrados hacia la recta de regresión, como en el caso de la figura 13.1.

EJERCICIOS

13.1 **Para calcular r conviene añadir una nueva columna a la tabla del ejemplo 12.1. ¿Cuál? Calcular el coeficiente de correlación correspondiente a aquella distribución bidimensional.**

13.2 **Calcular el coeficiente de correlación correspondiente a la distribución bidimensional citada en el ejercicio 12.2. Obsérvese el valor de r obtenido, en relación con la representación gráfica de la recta de regresión correspondiente a esa distribución, respecto de la posición de los puntos de la nube.**

13.3 **Repita el ejercicio anterior, pero ahora a partir de la distribución citada en el ejercicio 12.4.**

13.4 **Lo mismo para la distribución considerada en el ejercicio 12.6.**

Obsérvese que si

$$\frac{\Sigma n_i x_i y_i}{\Sigma n_i}-\bar{x}\cdot\bar{y}=0$$

entonces será

$$r=0$$

y además para la recta de regresión queda una ecuación de la forma

$$y=\bar{y}$$

que corresponde a una recta paralela al eje de abscisas, según se vio en el ejer-

cicio 10.7. En este caso, en que $r=0$, se dice que las variables X e Y están *incorreladas*.

En la práctica hay muchos casos en que conviene hacer un cambio de variable para facilitar el cálculo del coeficiente de correlación y de la ecuación de la recta de regresión. A tal efecto, así como para demostrar la interpretación antedicha del coeficiente de correlación, puede consultarse el libro:
SIXTO RÍOS, *Iniciación estadística*, página 97 y siguientes. Madrid, 1965.

9 NUMERO NATURAL

1. Equipotencia; conjunto de los números naturales

Consideremos los conjuntos finitos

$$A=\{a, b, c, d\}$$
$$B=\{i, j, k, l\}$$
$$X=\{r, s\}$$
$$Y=\{m, n, p, q, z\}$$

En la figura 1.1 se da una biyección de A en B mediante su diagrama de flechas

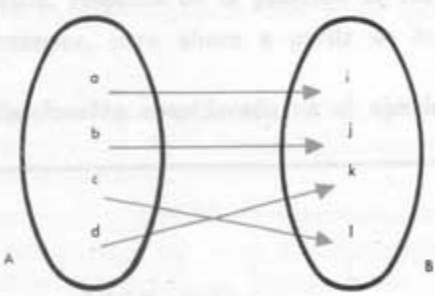


Figura 1.1

Para expresar que se puede construir una biyección cuyo conjunto de partida es A y cuyo conjunto de llegada es B, diremos que A *es equipotente con* B.

En la figura 1.2 se muestra una aplicación de A en X que no es biyectiva. Es imposible construir una biyección de A en X. Por ello diremos que A *no es equipotente con* X.

A tampoco es equipotente con Y.

• DEFINICIÓN 1.1: *Dados dos conjuntos, E y F, se dice que E es equipotente a F si existe una biyección de E en F.*

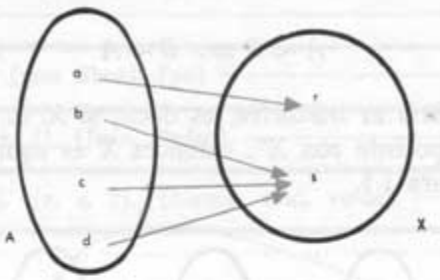


Figura 1.2

Notación: Para expresar que E es equipotente con F, escribiremos

$$E \sim F$$

EJERCICIOS

1.1 Formar un conjunto que sea equipotente con el conjunto

$$V=\{a,\ e,\ i,\ o,\ u\}$$

1.2 Formar un conjunto que no sea equipotente con V.

También se dice que *E es coordinable con F* para expresar que *E es equipotente con F*. En otras palabras, *coordinable* es sinónimo de *equipotente*.

Vamos a estudiar las PROPIEDADES DE LA EQUIPOTENCIA:

I) *La equipotencia es reflexiva*, es decir, todo conjunto es equipotente consigo mismo, como se muestra en el ejemplo de la figura 1.3.

Abreviadamente:

$$V \sim V$$

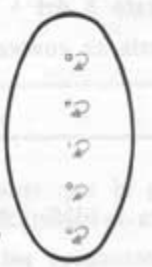


Figura 1.3

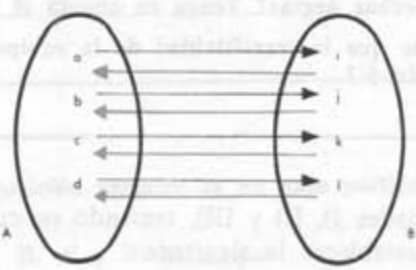


Figura 1.4

II) *La equipotencia es simétrica,* es decir, si A es equipotente con B, entonces también B es equipotente con A, como se muestra en la figura 1.4.

Abreviadamente:

$$A \sim B \Longrightarrow B \sim A$$

III) *La equipotencia es transitiva,* es decir, si X es equipotente con X' y, a su vez, X' es equipotente con X'', entonces X es equipotente con X'', como se muestra en la figura 1.5.

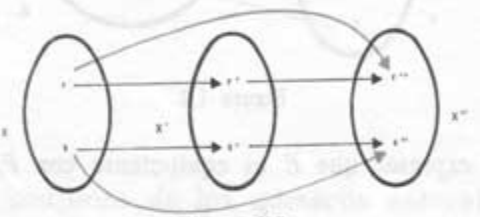


Figura 1.5

Abreviadamente:

$$\left.\begin{array}{l} X \sim X' \\ X' \sim X'' \end{array}\right\} \Longrightarrow X \sim X''$$

EJERCICIOS

1.3 ¿Cómo se llama la aplicación de la figura 1.3? Tenga en cuenta el ejemplo 7.2 del § 3.

1.4 En la figura 1.4 se consideran dos aplicaciones, la definida por las flechas negras y la definida por las rojas. ¿Cómo son entre sí esas correspondencias? Tenga en cuenta el párrafo 3 del § 3.

1.5 Compruebe que la simetría de la equipotencia es consecuencia del ejercicio 7.1 del § 3.

1.6 En la figura 1.5 se consideran tres aplicaciones. ¿Cómo se llama la aplicación dada por las flechas rojas respecto de las otras dos aplicaciones dadas por las flechas negras? Tenga en cuenta el párrafo 8 del § 3.

1.7 Compruebe que la transitividad de la equipotencia es consecuencia del ejercicio 8.1 del § 3.

Las propiedades I), II) y III), teniendo en cuenta la definición 3.1 del § 4. nos llevan a establecer la siguiente

- PROPOSICIÓN 1.1: *La equipotencia es una relación de equivalencia.*

Las relaciones de equivalencia producen clasificaciones, según se indicó en el párrafo 4 del § 4. En nuestro caso, las clases se muestran en la figura 1.6.

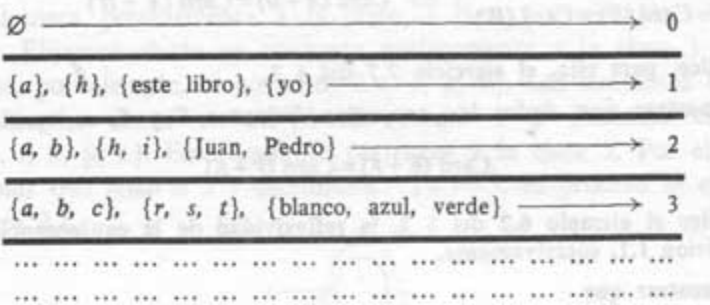


Figura 1.6

La clase formada por el conjunto vacío se llama *número cero.* La clase formada por el conjunto $\{a\}$ y sus equipotentes se llama *número uno.* La clase uno de cuyos representantes es el conjunto $\{h, i\}$ se llama *número dos.* La clase definida por el conjunto $\{1, x, 2\}$ se llama *número tres,* etc.

De este modo, *los números naturales son las clases* producidas por esta relación de equivalencia, que hemos llamado equipotencia.

El conjunto de los números naturales será el conjunto de las clases, es decir, el conjunto cociente, según lo dicho en el párrafo 5 del § 4.

El conjunto de los números naturales se designa por N, luego

$$N=\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Para expresar que el conjunto $\{a, b\}$ pertenece a la clase 2, diremos que *el cardinal del conjunto* $\{a, b\}$ es dos, o bien que el conjunto $\{a, b\}$ posee dos elementos, y escribiremos

$$\text{Card}(\{a, b\})=2$$

como ya se adelantó al final del párrafo 1 del § 3.

• PROPOSICIÓN 1.1: *Dados dos conjuntos, A y B, se verifica:*

$$A \sim B \iff \text{Card}(A)=\text{Card}(B)$$

EJERCICIOS

1.8 Comprobar que la proposición anterior es un caso particular de la proposición 4.1 del § 4.

1.9 Dados los conjuntos A, B, A' y B', tales que

$$A \cap B=\varnothing \quad \text{y} \quad A' \cap B'=\varnothing$$

demostrar que

$$\left.\begin{array}{l}\text{Card}\,(A)=\text{Card}\,(A')\\ \text{Card}\,(B)=\text{Card}\,(B')\end{array}\right\} \Rightarrow \text{Card}\,(A+B)=\text{Card}\,(A'+B')$$

Utilice, para ello, el ejercicio 7.7 del § 3.

1.10 Demostrar que, dados los conjuntos disjuntos E y F, se verifica

$$\text{Card}\,(E+F)=\text{Card}\,(F+E)$$

Utilice el ejemplo 6.2 del § 2, la reflexividad de la equipotencia y la proposición 1.1, sucesivamente.

1.11 Demostrar que

$$\text{Card}\,[E+(F+G)]=\text{Card}\,[(E+F)+G]$$

1.12 Demostrar que

$$\text{Card}\,(A+\varnothing)=\text{Card}\,(A)$$

1.13 Demostrar que

$$\left.\begin{array}{l}\text{Card}\,(A)=\text{Card}\,(A')\\ \text{Card}\,(B)=\text{Card}\,(B')\end{array}\right\} \Rightarrow \text{Card}\,(A\times B)=\text{Card}\,(A'\times B')$$

1.14 Demostrar que

$$\text{Card}\,(E\times F)=\text{Card}\,(F\times E)$$

Tenga en cuenta el ejercicio 7.4 del § 3.

1.15 Demostrar que

$$\text{Card}\,[(E\times F)\times G]=\text{Card}\,[E\times(F\times G)]$$

Tenga en cuenta el ejercicio 7.5 del § 3.

1.16 Demostrar que

$$\text{Card}\,(B)=1 \Rightarrow \text{Card}\,(A\times B)=\text{Card}\,(A)$$

Haga uso del ejercicio 7.6 del § 3.

1.17 Demostrar que

$$\text{Card}\,[R\times(S+T)]=\text{Card}\,[(R\times S)+(R\times T)]$$

Haga uso de la propiedad III) del producto de conjuntos, estudiada en el párrafo 1 del § 3.

El gran matemático italiano PEANO (1858-1932) construyó la primera axiomatización de los números naturales.

Pasemos a estudiar las operaciones con números naturales.

2. Adición de naturales

Consideremos dos números. Sean, por ejemplo, 2 y 3. Elijamos un conjunto cualquiera perteneciente a la clase 2. Sea, por ejemplo, el conjunto $C=\{h, i\}$. Elijamos ahora un conjunto perteneciente a la clase 3 y disjunto con C. Sea, por ejemplo, el conjunto $E=\{x, y, z\}$. Los conjuntos C y E son sumables, según vimos en el párrafo 6 del § 2. Pasemos al conjunto $C+E=\{h, i, x, y, z\}$. Este conjunto pertenece a la clase 5. Por ello diremos que *dos más tres igual a* 5 y escribimos: $2+3=5$. El proceso se esquematiza en la figura 2.1.

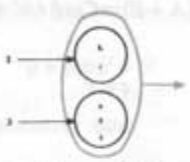


Figura 2.1

• DEFINICIÓN 2.1: *Dados dos números naturales, a y b, si A y B son dos conjuntos, tales que*

$$\text{Card}\,(A)=a; \qquad \text{Card}\,(B)=b; \qquad A\cap B=\varnothing$$

se llama suma de a y b al número natural

$$s=\text{Card}\,(A+B)$$

lo que se esquematiza en la figura 2.2.

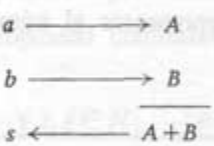


Figura 2.2

En la definición anterior, el conjunto A es un representante cualquiera de la clase a. Análogamente, B es un representante de b. Si en lugar de A hubiéramos elegido otro representante, A', de a y en vez de B hubiéramos elegido otro conjunto, B', disjunto con A', perteneciente a la clase b, se hubiera obtenido la suma s', como se indica en la figura 2.3.

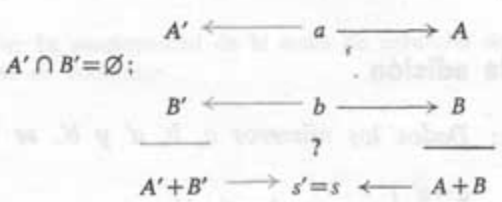


Figura 2.3

Parece natural preguntarse ahora: ¿es s igual a s'?

La contestación es afirmativa.

En efecto, como A y A' pertenecen a la misma clase, a, será

$$\text{Card}\,(A)=\text{Card}\,(A')$$

Del mismo modo

$$\text{Card}\,(B)=\text{Card}\,(B')$$

Por tanto, teniendo en cuenta el ejercicio 1.9, será:

$$\text{Card}\,(A+B)=\text{Card}\,(A'+B')$$

es decir,

$$s=s'$$

Por tanto:

• PROPOSICIÓN 2.1: *A cada pareja* (a, b) *de números naturales, la adición asocia otro número natural único,* s*, llamado suma de* a *y* b*, independiente de los representantes,* A *y* B*, elegidos.*

Es decir, la adición es una aplicación de $N \times N$ en N, que asocia a cada pareja, (a, b), de naturales, otro natural s

$$(a, b) \xrightarrow{+} s$$

o sea, la suma es una operación interna o ley le composición interna, en el sentido del párrafo 1 del § 5.

Como el signo convencional utilizado para designar esta operación interna es $+$, se escribe $a+b$ para representar al número natural resultado de la adición de los números a y b.

EJERCICIO

2.1 Demostrar que

$$\boxed{\text{Card}\,(A+B)=\text{Card}\,(A)+\text{Card}\,(B)}$$

---

3. Propiedades de la adición

• PROPIEDAD UNIFORME: *Dados los números* a, b, a' *y* b', *se verifica*

$$\left.\begin{matrix} a=a' \\ b=b' \end{matrix}\right\} \Longrightarrow a+b=a'+b'$$

Demostración: Sea A un conjunto cuyo cardinal es a y, análogamente, sea A' un representante de a'. Se verifica

$$a=a' \iff \text{Card}(A)=\text{Card}(A') \iff A \sim A'$$

Sea B un representante de b y B' un representante de b', tales que

$$A \cap B=\varnothing=A' \cap B'$$

Se tiene

$$b=b' \iff \text{Card}(B)=\text{Card}(B') \iff B \sim B'$$

Se ha de demostrar que

$$a+b=a'+b'$$

o, lo que es lo mismo, se ha de demostrar que

$$\text{Card}(A+B)=\text{Card}(A'+B')$$

Es decir, la propiedad uniforme es otra forma de expresar la proposición 2.1.

• PROPIEDAD CONMUTATIVA: *Cualesquiera que sean los números naturales e y f, se verifica*

$$\boxed{e+f=f+e}$$

Demostración: Es consecuencia del ejercicio 1.10, o sea, la conmutatividad de la suma de números naturales sigue de la conmutatividad de la suma de conjuntos.

Abreviadamente, la propiedad conmutativa de la suma de naturales, puede expresarse así:

$$\forall\, e, f \in N; \qquad e+f=f+e$$

según se dijo en el párrafo 9 del § 6.

• PROPIEDAD ASOCIATIVA: *Cualesquiera que sean los números naturales e, f y g, se verifica*

$$\boxed{(e+f)+g=e+(f+g)}$$

Demostración: La asociatividad de la suma de naturales sigue de la propiedad homónima de la suma de conjuntos.

EJERCICIOS

3.1 ¿De qué ejercicio, del párrafo 1 de este §, es consecuencia la propiedad asociativa de la suma de naturales?

3.2 Escribir abreviadamente la propiedad asociativa utilizando cuantificadores.

• EXISTENCIA DE ELEMENTO NEUTRO: *Existe un número natural, el cero, cuya suma con un número natural cualquiera, a, es a, es decir, tal que*

$$0+a=a$$

Demostración: Sigue del ejercicio 1.12.

Abreviadamente, se escribe:

$$\exists\, 0 \in N; \qquad \forall\, a \in N; \qquad 0+a=a$$

Hemos visto que la suma de números naturales es una operación interna, asociativa, conmutativa y con elemento neutro. Por tanto, de acuerdo con el párrafo 3 del § 5, enunciaremos:

• PROPOSICIÓN 3.1: $(N, +)$ *es un semigrupo conmutativo y con elemento neutro,* que se llama habitualmente *el semigrupo aditivo de los naturales.*

4. Multiplicación

Consideremos los números naturales 2 y 3. Elijamos un representante de la clase 2 y otro de la clase 3. Sean, por ejemplo:

$$D=\{i, j\}; \qquad T=\{r, l, j\}$$

Formemos el conjunto producto

$$D \times T=\{(i, r),\ (i, l),\ (i, j),\ (j, r),\ (j, l),\ (j, j)\}$$

Como

$$\text{Card}\,(D \times T)=6$$

diremos que *el producto de* 2 *por* 3 *es* 6, y escribiremos

$$2 \times 3=6$$

o bien

$$2 \cdot 3=6$$

• DEFINICIÓN 4.1: *Dados dos números naturales, a y b, si A y B son dos conjuntos, tales que*

$$\text{Card}\,(A)=a \quad \text{y} \quad \text{Card}\,(B)=b$$

se llama producto de a y b al número natural

$$p=\text{Card}\,(A\times B)$$

lo que se esquematiza en la figura 4.1.

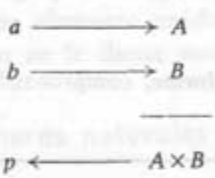


Figura 4.1

• PROPOSICIÓN 4.1: *A cada pareja, (a, b), de números naturales, la multiplicación asocia otro número natural único, p, llamado producto de a y b, independiente de los representantes A y B elegidos.*

EJERCICIOS

4.1 Demostrar la proposición 4.1, a partir del ejercicio 1.13, de modo análogo a como se demostró la proposición 2.1, a partir del ejercicio 1.9. Construya una figura apropiada a este caso, similar a la 2.3.

4.2 Por tanto, la multiplicación es una aplicación. ¿Cuáles son los conjuntos de partida y de llegada de esta aplicación?

4.3 ¿Es una operación interna la multiplicación de naturales?

4.4 Demostrar que

$$\text{Card}\,(A\times B)=\text{Card}\,(A)\cdot\text{Card}\,(B)$$

Notación: El producto de los números *a* y *b* se puede designar de una cualquiera de las tres formas siguientes:

$$a\times b, \qquad a\cdot b, \qquad ab$$

5. Propiedades de la multiplicación

• PROPIEDAD UNIFORME:

$$si \left\{ \begin{matrix} a=a' \\ b=b' \end{matrix} \right\}, \text{ entonces } ab=a'b'$$

donde a, a', b y b' son números naturales.

EJERCICIO

5.1 Demostrar la propiedad uniforme, comprobando que es equivalente a la proposición 4.1.

• PROPIEDAD ASOCIATIVA:

$$(e \cdot f) \cdot g = e \cdot (f \cdot g)$$

cualesquiera que sean los números naturales e, f y g

• PROPIEDAD CONMUTATIVA:

$$e \cdot f = f \cdot e$$

cualesquiera que sean e y f.

EJERCICIOS

5.2 Demostrar que la propiedad asociativa del producto sigue del ejercicio 1.15. ¿De qué ejercicio, del párrafo 1, es consecuencia la conmutativa?

5.3 Escribir las propiedades conmutativa y asociativa del producto, utilizando cuantificadores.

• EXISTENCIA DE ELEMENTO NEUTRO: *Existe un número natural, el uno, cuyo producto por un número natural cualquiera, a, es a, es decir, tal que*

$$1 \cdot a = a$$

EJERCICIOS

5.4 Demostrar la propiedad anterior, haciendo uso del ejercicio 1.16.

5.5 Escribir la propiedad anterior utilizando cuantificadores.

De las propiedades anteriores se deduce el siguiente resultado:

• PROPOSICIÓN 5.1: *El semigrupo multiplicativo de los números naturales, $(N, \cdot)$, es conmutativo y posee elemento unidad* (ya que al *neutro* se le llama *unidad* cuando a la operación se le llama *multiplicación).*

6. Semianillo de los números naturales

• PROPIEDAD DISTRIBUTIVA DEL PRODUCTO RESPECTO DE LA SUMA DE NATURALES: *cualesquiera que sean los números naturales a, b y c, se verifica*

$$\boxed{a(b+c)=ab+ac}$$

EJERCICIOS

6.1 Demostrar la propiedad anterior, a partir del ejercicio 1.17.

6.2 Escribir la propiedad anterior utilizando cuantificadores.

Para los números naturales se tiene, según hemos visto:

$$\left\{\begin{array}{l}(N, +) \text{ es un semigrupo conmutativo y con elemento neutro}\\(N, \cdot) \text{ es un semigrupo conmutativo y con elemento neutro}\\\text{El producto es distributivo respecto de la suma}\end{array}\right.$$

EJERCICIO

6.3 ¿Es $(N, +, \cdot)$ un anillo? ¿Qué haría falta para ello? Vuelva sobre el párrafo 8 del § 5 para contestar a estas preguntas.

• DEFINICIÓN 6.1: *Sea un conjunto S, en el que están definidas dos opera-*

ciones, que designaremos por $\oplus$ *y* $*$. *Si se verifican las tres condiciones:*

a) $(S, \oplus)$ *es un semigrupo conmutativo,*

b) $(S, *)$ *es un semigrupo,*

c) *la operación* $*$ *es distributiva respecto de la operación* $\oplus$,

diremos que $(S, \oplus, *)$ *es un semianillo.*

De esta definición se deduce la siguiente

• PROPOSICIÓN 6.1: $(N, +, \cdot)$ es un semianillo.

EJERCICIOS

6.4 Demostrar que $[\mathcal{P}(E), \cup, \cap]$ es un semianillo. Véase el ejercicio 8.1 c) del § 5. ¿Lo es $[\mathcal{P}(E), \cap, \cup]$?

6.5 Comprobar si $(N^*, \vee, \wedge)$ es un semianillo. Véase el ejercicio 3.1 c) y d) del § 5. ¿Lo es $(N^*, \wedge, \vee)$?

Como el semigrupo $(N, \cdot)$ es conmutativo y posee elemento unidad y el semigrupo $(N, +)$ posee elemento cero, diremos que $(N, +, \cdot)$ es un semianillo conmutativo, con elemento cero y con elemento unidad.

EJERCICIOS

6.6 A partir de la definición 6.1, diga cuándo el semianillo $(S, \oplus, *)$ será conmutativo. ¿Cuándo tendrá elemento unidad? ¿Cuándo tendrá elemento cero? Tenga en cuenta las definiciones 8.2 y 8.3 del § 5.

6.7 ¿Qué puede añadir, teniendo en cuenta el ejercicio anterior, respecto de los ejercicios 6.4 y 6.5?

---

7. Ordenación total en N

Consideremos dos números naturales. Sean, por ejemplo, 3 y 5. Sean A y B dos conjuntos, representantes de 3 y 5, respectivamente (figura 7.1).

El diagrama de flechas de dicha figura define una aplicación inyectiva de A en B. Notemos que si Card (A) fuera un número mayor que Card (B) no se hubiera podido construir una inyección de A en B, lo que nos lleva a establecer la siguiente

• DEFINICIÓN 7.1: *Dados dos números naturales, a y b, sean A y B dos conjuntos, tales que*

$$\text{Card}\,(A)=a \qquad \text{y} \qquad \text{Card}\,(B)=b$$

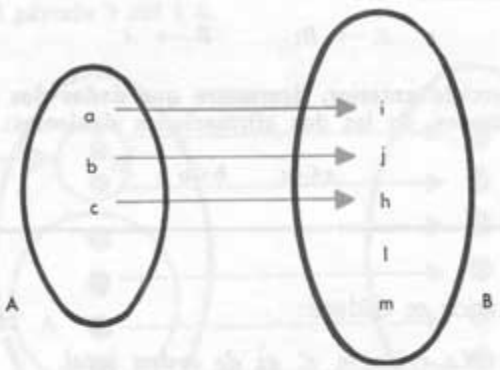


Figura 7.1

Diremos que a es menor o igual que b, y escribiremos

$$a \leqslant b$$

si se puede construir una aplicación inyectiva de A en B.

EJERCICIOS

7.1 A partir del ejercicio 5.3 del § 3, defina, de forma análoga a como se ha hecho en la definición anterior, la relación mayor o igual, **entre números naturales.**

7.2 Demuestre que la relación $\leqslant$ es reflexiva. Tenga en cuenta la figura 1.3 y que toda biyección es inyección.

7.3 Demuestre que la aplicación compuesta de dos inyecciones es otra inyección.

7.4 Demuestre que la relación $\leqslant$ es transitiva, a partir del ejercicio anterior.

7.5 Demuestre que si la correspondencia inversa de una aplicación es también aplicación, entonces se trata de una biyección.

7.6 Utilice el ejercicio anterior para demostrar que la relación $\leqslant$ es antisimétrica.

De los ejercicios 7.2, 7.4 y 7.6 sigue el siguiente

• TEOREMA 7.1: *La relación $\leqslant$, entre números naturales, es una relación de orden.*

EJERCICIOS

7.7 **Dados dos conjuntos, A y B, demuestre que existe, al menos, una de las dos inyecciones siguientes:**

$$A \to B; \qquad B \to A$$

7.8 **A partir del ejercicio anterior, demuestre que dados dos números, a y b, es cierta una, al menos, de las dos afirmaciones siguientes:**

$$a \leqslant b; \qquad b \leqslant a$$

Del ejercicio anterior se deduce:

- PROPOSICIÓN 7.2: *La relación $\leqslant$ es de orden total.*

EJERCICIO

7.9 **Demostrar que la relación** mayor o igual, **definida en el ejercicio 7.1,** es de orden total.

Notas: Si los números a y b no son iguales se escribe $a \neq b$.
Si $a \leqslant b$, siendo $a \neq b$, se dice que *a es menor que b*, y se escribe $a < b$.
Para expresar que a es mayor o igual que b, se escribe $a \geqslant b$.
Análogamente

$$\left.\begin{array}{l} a \geqslant b \\ a \neq b \end{array}\right\} \Longrightarrow a > b$$

donde $a > b$ se lee *a mayor que b*.

- EJEMPLOS:

$$\left.\begin{array}{l} 3 \leqslant 5 \\ 3 \neq 5 \end{array}\right\} \Longrightarrow 3 < 5$$

$$\left.\begin{array}{l} 8 \geqslant 5 \\ 8 \neq 5 \end{array}\right\} \Longrightarrow 8 > 5$$

- TEOREMA 7.3:

$$\boxed{a \leqslant b} \iff \text{existe un número natural } h, \text{ tal que } \boxed{h + a = b}$$

EJERCICIOS

7.10 Demostrar el teorema anterior, ayudándose de la figura 7.2.

7.11 Enunciar el teorema 7.3, haciendo uso del cuantificador existencial, introducido en el párrafo 9 del § 6.

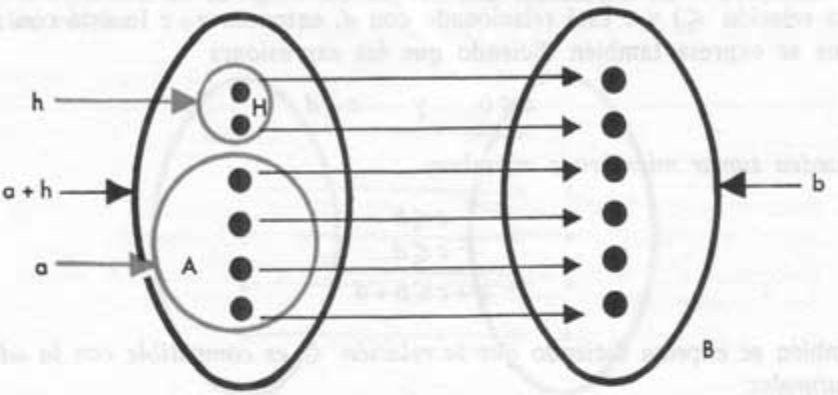


Figura 7.2

• PROPOSICIÓN 7.4: Se verifica

$$\boxed{a \leqslant b} \Longrightarrow \boxed{a+c \leqslant b+c}$$

donde a, b y c son números naturales.

Demostración:

$$a \leqslant b \underset{\text{teorema 7.3}}{\iff} \exists\, h \in N; \qquad h+a=b$$

$$\Downarrow$$

$$(h+a)+c=b+c$$

$$\Downarrow$$

$$h+(a+c)=b+c$$

es decir:

$$\exists\, h \in N; \qquad h+(a+c)=(b+c) \underset{\text{teorema 7.3}}{\iff} a+c \leqslant b+c$$

• PROPOSICIÓN 7.5:

$$\left.\begin{matrix} a \leqslant b \\ c \leqslant d \end{matrix}\right\} \Longrightarrow a+c \leqslant b+d$$

Demostración:

$$\left.\begin{array}{l} a \leqslant b \underset{\text{prop. 7.4}}{\Longrightarrow} a+c \leqslant b+c \\ c \leqslant d \underset{\text{prop. 7.4}}{\Longrightarrow} b+c \leqslant b+d \end{array}\right\} \underset{\text{transitividad de la relación } \leqslant}{\Longrightarrow} a+c \leqslant b+d$$

Notemos que la proposición 7.5 expresa que si a está relacionado con b (en la relación $\leqslant$) y c está relacionado con d, entonces $a+c$ lo está con $b+d$, lo que se expresa también diciendo que *las expresiones*

$$a \leqslant b \quad \text{y} \quad c \leqslant d$$

se pueden sumar miembro a miembro:

$$\frac{\begin{array}{c} a \leqslant b \\ c \leqslant d \end{array}}{a+c \leqslant b+d}$$

o también se expresa diciendo que *la relación* $\leqslant$ *es compatible con la adición de naturales.*

Veamos ahora que la *relación* $\leqslant$ *también es compatible con la multiplicación de naturales:*

- PROPOSICIÓN 7.6:

$$\boxed{a \leqslant b} \Longrightarrow \boxed{a \cdot c \leqslant b \cdot c}$$

EJERCICIO

7.12 Demostrar la proposición 7.6, de modo similar a como se hizo para la proposición 7.4.

- PROPOSICIÓN 7.7:

$$\left.\begin{array}{l} a \leqslant b \\ c \leqslant d \end{array}\right\} \Longrightarrow a \cdot c \leqslant b \cdot d$$

EJERCICIOS

7.13 Demostrar la proposición 7.7.

7.14 Enunciar y demostrar las proposiciones similares a las proposiciones 7.3, 7.4, 7.5, 7.6 y 7.7 para la relación $\geqslant$.

7.15 Demostrar la proposición 7.6, tomando conjuntos A, B y C, cuyos cardinales sean a, b y c y utilizando la definición 7.1.

Las relaciones $\geqslant$ y $\leqslant$ se dicen opuestas. Compare con el ejercicio 6.4 del § 4.

EJERCICIO

7.16 La biyección de la figura 7.3 sugiere una ordenación en el conjunto V de las vocales:

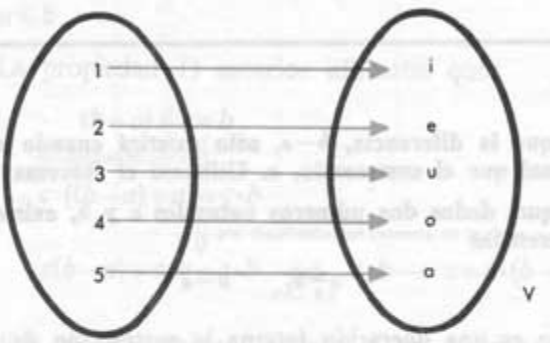


Figura 7.3

En esa ordenación, por ejemplo, *e* es el segundo elemento. Este ejemplo sugiere la diferencia entre ordinal **y** cardinal. **Explíquela.**

---

8. Sustracción de números naturales

• EJEMPLO 8.1: Decimos que 7 *menos* 4 *es igual* a 3, y escribimos

$$7-4=3$$

porque 3 es el número natural tal que

$$3+4=7$$

• DEFINICIÓN 8.1: *Diremos que*

$$b-a=h$$

si

$$h+a=b$$

De otro modo

$$\boxed{b-a=h} \underset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \boxed{h+a=b}$$

donde el signo

$$\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$$

lo leeremos diciendo

equivale por definición

Obsérvese que esta *equivalencia por definición* es distinta de la *equivalencia lógica,* introducida en el párrafo 9 del § 6.

EJERCICIOS

8.1 Demostrar que la diferencia, $b-a$, sólo existirá cuando el minuendo, b, sea mayor o igual que el sustraendo, a. Utilícese el teorema 7.3.

8.2 Demostrar que, dados dos números naturales a y b, existe, al menos, una de las dos diferencias

$$a-b, \qquad b-a$$

8.3 ¿Por qué no es una operación interna la sustracción de naturales?

8.4 Demostrar que si $B \subset A$, entonces

$$\text{Card}\,(A-B)=\text{Card}\,(A)-\text{Card}\,(B)$$

Téngase en cuenta el ejercicio 9.4 del § 2 y la definición 8.1.

PROPIEDADES DE LA SUSTRACCIÓN DE NATURALES:

1) $(b-a)+a=b$
2) $(b+a)-a=b$
3) $c+(b-a)=(c+b)-a$
4) $c-(b+a)=(c-b)-a$
5) $c-(a-b)=(c+b)-a$

Se supone que a, b y c son tales que se pueden efectuar las diferencias anteriores.

EJERCICIOS

8.5 Demostrar la propiedad 1). Para ello llame h al paréntesis y aplique la definición 8.1.

8.6 Demostrar la propiedad 2). Para ello llame h al paréntesis y aplique la definición 8.1.

8.7 Demostrar la propiedad 3). Para ello sume c a los dos miembros de 1) y aplique la definición 8.1.

8.8 Demostrar las propiedades 4) y 5) haciendo uso de las anteriores.

DISTRIBUTIVIDAD DEL PRODUCTO RESPECTO DE LA DIFERENCIA:

$$c\cdot(b-a)=(c\cdot b)-(c\cdot a); \qquad a,\ b,\ c\in N$$

Se supone que $a\leqslant b$

Demostración: La propiedad 1) anterior afirmaba que:

$$(b-a)+a=b$$

$$\Big\Downarrow \text{ multiplicando por } c$$

$$c\cdot[(b-a)+a]=c\cdot b$$

$$\Big\Downarrow \text{ por distributividad respecto de la suma}$$

$$c(b-a)+c\cdot a=c\cdot b \underset{\text{def. 8.1}}{\Longleftrightarrow} c\cdot b-c\cdot a=c\cdot(b-a)$$

Como ya se indicó en el ejercicio 7.3 del § 6, se conviene en que el producto tenga prioridad frente a la diferencia, por lo que la distributividad del producto respecto de la diferencia se escribe:

$$\boxed{c\cdot(b-a)=c\cdot b-c\cdot a}$$

El paso del segundo al primer miembro de la expresión anterior se llama habitualmente *sacar factor común* c. Es decir, se puede sacar factor común en virtud de la propiedad distributiva. Lo mismo puede decirse respecto de la suma, en vez de respecto de la diferencia.

EJERCICIO

8.9 Demostrar que

$$(a+b)\,(c-d)=(ac+bc)-(ad+bd)$$

---

9. Otras propiedades de la suma y el producto de naturales

LEY CANCELATIVA DE LA SUMA

$$\boxed{a+h=b+h} \Longrightarrow \boxed{a=b}$$

EJERCICIO

9.1 La figura 9.1 sugiere la demostración de la ley cancelativa de la suma. Explíquela.

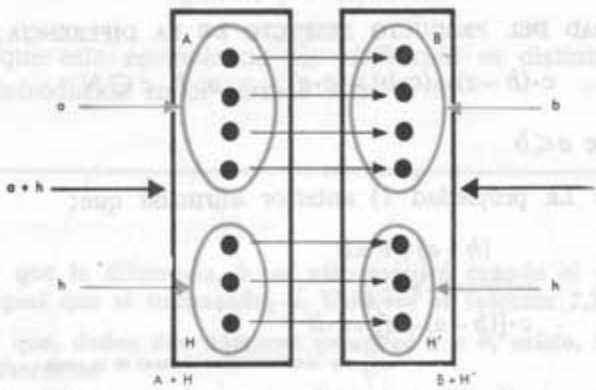


Figura 9.1

La *ley cancelativa* de la suma se llama también *ley simplificativa* de la suma. Para expresar que cualquier término, h, que figure en ambos miembros se puede simplificar, se dice también que todos los números naturales son *regulares* respecto de la suma.

• EJEMPLO:

$$x+3=5+3 \Longrightarrow x=5$$

PRODUCTO POR CERO: Cualquiera que sea el número natural a, se verifica

$$\boxed{a\cdot 0=0}$$

Demostración:

$$0+1=1$$
$$\Downarrow$$
$$a\cdot(0+1)=a\cdot 1$$
$$\Downarrow$$
$$a\cdot 0+a\cdot 1=a\cdot 1$$
$$\Downarrow$$
$$a\cdot 0+a=a$$

es decir, $a\cdot 0$ es un número cuya suma con a es a, cualquiera que sea a. Por tanto, $a\cdot 0$ es elemento neutro para la suma. Pero en la proposición 2.1 del § 5 vimos que el neutro, respecto de una operación, es único.

Por tanto, como 0 es neutro para la suma, será

$$a \cdot 0 = 0$$

EJERCICIOS

9.2 Demostrar que

$$A \times \varnothing = \varnothing$$

cualquiera que sea el conjunto A.

9.3 Demostrar que la propiedad anteriormente enunciada es consecuencia del ejercicio 9.2.

• PROPOSICIÓN 9.1: Se verifica

$$\boxed{a \cdot b = 0} \Longrightarrow \boxed{a = 0, \quad \text{o bien,} \quad b = 0}$$

es decir, *si el producto de dos números naturales es cero, uno de ellos, al menos, ha de ser cero.*

EJERCICIOS

9.4 Demostrar que la proposición 9.1 sigue del ejercicio 7.8 del § 6.

9.5 Escribir la proposición 9.1 haciendo uso del signo $\vee$, de disyunción lógica, introducido en el párrafo 9 del § 6.

9.6 Demostrar que

$$\left.\begin{array}{l}(b-a)\cdot h = 0 \\ h \neq 0\end{array}\right\} \Longrightarrow b - a = 0$$

Notemos que

$$3 \cdot 0 = 2 \cdot 0$$

pero no por ello se deduce de aquí que el cero se pueda simplificar:

$$3 \cdot \boxed{0} = 2 \cdot \boxed{0}$$

como se indicó en el párrafo 11 del § 6.

LEY CANCELATIVA DEL PRODUCTO

$$\left.\begin{array}{l} a\cdot h=b\cdot h \\ h\neq 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow a=b$$

Demostración:

$$a\cdot h=b\cdot h$$
$$\Updownarrow$$
$$0+a\cdot h=b\cdot h$$
$$\Updownarrow \text{ definición 8.1}$$
$$b\cdot h-a\cdot h=0$$
$$\Updownarrow \text{ sacando factor común } h$$
$$\left.\begin{array}{l} (b-a)\cdot h=0 \\ \text{por hipótesis: } h\neq 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow b-a=0 \quad \text{ejer. 9.6}$$
$$\Updownarrow \text{ definición 8.1}$$
$$0+a=b$$
$$\Updownarrow$$
$$a=b$$

Es decir, dados los números naturales a, b y h, tales que

$$a\cdot h=b\cdot h$$

si h es distinto de cero, puede simplificarse

$$a\cdot h=b\cdot h$$

y queda

$$a=b$$

- EJEMPLO:

$$5x=15 \Longrightarrow 5x=5\cdot 3 \Longrightarrow x=3$$

- TEOREMA 9.2:

$$\boxed{a\cdot b=\overbrace{a+a+\ldots+a}^{b}}$$

donde el segundo miembro indica la suma de b términos iguales.

Demostración: Consideremos el conjunto

$$A=\{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ a-1,\ a\}$$

de los a primeros números naturales, excluido el cero. Será

$$\text{Card}\,(A)=a$$

Análogamente, sea

$$B=\{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ b-1,\ b\};\qquad \text{Card}\,(B)=b$$

Para calcular el producto $a\cdot b$, aplicando la definición 4.1, comencemos construyendo el conjunto producto $A\times B$, como se indica en la figura 9.2.

A \ B	1	2	3	...	b
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	...	(1, b)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	...	(2, b)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	...	(3, b)
⋮	...	...	...	...	...
	...	...	...	...	...
a	(a, 1)	(a, 2)	(a, 3)	...	(a, b)

Figura 9.2

En la figura 9.3 se efectúa una partición del conjunto producto $A\times B$, en b partes

$$P_1,\ P_2,\ P_3,\ \ldots,\ P_b$$

Cada una de las cuales consta de a elementos.

(1,1)	(1,2)	(1,3)	.....	(1,b)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	.....	(2,b)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	.....	(3,b)
....	....	....	.....	....
....	....	....	.....	....
(a,1)	(a,2)	(a,3)	.....	(a,b)
P_1	P_2	P_3		P_b

Figura 9.3

Como estas partes son disjuntas

$$A\times B=P_1+P_2+\ldots+P_b$$

luego

$$a\cdot b=\text{Card}\,(A\times B)=\text{Card}\,(P_1+P_2+\ldots+P_b)=$$
$$=\text{Card}\,(P_1)+\text{Card}\,(P_2)+\ldots+\text{Card}\,(P_b)=a+a+a+\overset{(b}{\ldots}+a$$

9.7 Defínase la relación de equivalencia que produce la partición indicada en la figura 9.3. Téngase en cuenta la nota 1.1 del § 3.

9.8 Demostrar que

$$a \cdot b = b + b + \overset{(a}{\ldots} + b$$

9.9 Demostrar las propiedades conmutativa y asociativa del producto, tomando la expresión del teorema 9.2 como definición de producto de naturales.

9.10 Demostrar la propiedad distributiva del producto respecto de la suma de naturales, haciendo uso de la definición de producto citada en el ejercicio anterior.

9.11 ¿Cuántas aplicaciones de

$$\{i\} \rightarrow \{a, b, c\}$$

pueden construirse?

9.12 ¿Cuántas aplicaciones de

$$\{e_1, e_2\} \rightarrow \{h_1, h_2, h_3\}$$

pueden construirse?

9.13 Teniendo en cuenta la definición de potencia de naturales, dada en el ejercicio 2.6 del § 5, si

$$\text{Card}\,(A) = a \qquad \text{y} \qquad \text{Card}\,(B) = b$$

demostrar que existen b^a aplicaciones de

$$A \rightarrow B$$

9.14 Al conjunto de las aplicaciones de

$$A \rightarrow B$$

se designa por B^A. Demostrar que

$$\text{Card}\,(B^A) = \text{Card}\,(B)^{\text{Card}\,(A)}$$

9.15 Teniendo en cuenta la proposición 6.2 del § 7, probar que el conjunto $A \times B$ posee

$$2^{\text{Card}\,(A)\,\cdot\,\text{Card}\,(B)}$$

subconjuntos.

9.16 Teniendo en cuenta el ejercicio anterior, probar que el número de correspondencias de A en B es

$$2^{\text{Card}\,(A)\,\cdot\,\text{Card}\,(B)}$$

9.17 Dados los conjuntos

$$V = \{a, e, i, o, u\}; \qquad C = \{x, y, z\}$$

¿cuántas correspondencias de

$$V \to C$$

existen? ¿Cuántas de ellas son aplicaciones?

9.18 Dado un conjunto E, tal que

$$\text{Card}\,(E)=e$$

demostrar que pueden definirse $2^{e\cdot e}$ relaciones entre los elementos de E.

9.19 ¿Cuántas relaciones pueden construirse entre los elementos del conjunto V de las vocales?

10. Divisibilidad y división exacta y entera

• EJEMPLO 10.1: Consideremos los números naturales 3 y 6. Se verifica

$$2\cdot 3=6$$

es decir, existe un número, dos, cuyo producto por tres es igual a seis. Por ello diremos que *tres divide a seis,* lo que escribiremos así:

$$3 \mid 6$$

En cambio, como *tres no divide a siete,* escribiremos $3 \nmid 7$.

• DEFINICIÓN 10.1: *Dados dos números naturales, a y b, diremos que a divide a b y escribiremos*

$$\boxed{a \mid b}$$

si existe un número natural h cuyo producto por a sea igual a b.

Abreviadamente

$$\boxed{a \mid b} \underset{\text{def}}{\iff} \boxed{\exists\, h \in N;\quad h\cdot a=b}$$

CONSECUENCIAS de la definición 10.1:

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & 1 \mid n \\ 2) & n \mid n \\ 3) & n \mid 0 \\ 4) & 0 \mid n \implies n=0 \\ 5) & n \mid n^h, \text{ siendo } h \in N;\ h \geqslant 2 \end{array}\right\} \; n \in N$$

EJERCICIOS

10.1 **La consecuencia 1) sigue de la existencia de elemento neutro respecto del producto de naturales, es decir, de**

$$1 \cdot n = n; \qquad n \in \mathbf{N}$$

¿De qué propiedades, de entre las estudiadas anteriormente, siguen inmediatamente las consecuencias 2), 3) y 4)?

10.2 **Una de las cinco consecuencias anteriores expresa la reflexividad de la relación $\mid$ ¿Cuál?**

10.3 **Compare el teorema 7.3 con la definición 10.1 e intente sacar alguna conclusión.**

• PROPOSICIÓN 10.1: *Si a y b son números naturales, distintos de cero,*

$$\boxed{a \mid b} \Longrightarrow \boxed{a \leqslant b}$$

Demostración:

$$a \mid b \underset{\text{def. 10.1}}{\Longleftrightarrow} \exists\, h \in N;\quad h \cdot a = b$$

$$\Downarrow \text{ (}h\text{ teorema 9.2}$$

$$a + a + \ldots + a = b$$

$$\Downarrow \text{ (}h-1\text{)}$$

$$(a + a + \ldots + a) + a = b$$

$$\Downarrow \text{ si designamos por } c \text{ a la suma } \overset{(h-1}{a+a+\ldots+a}$$

$$c + a = b \underset{\text{teorema 7.3}}{\Longleftrightarrow} a \leqslant b$$

• PROPOSICIÓN 10.2: *La relación $\mid$, entre números naturales, es antisimétrica,* es decir,

$$\left.\begin{matrix} a \mid b \\ b \mid a \end{matrix}\right\} \Longrightarrow a = b$$

Demostración:

Caso 1.°: Si a y b son distintos de cero

$$\left.\begin{matrix} a \mid b \underset{\text{prop. 10.1}}{\Longrightarrow} a \leqslant b \\ b \mid a \underset{\text{prop. 10.1}}{\Longrightarrow} b \leqslant a \end{matrix}\right\} \underset{\text{ejer. 7.6}}{\Longrightarrow} a = b$$

Caso 2.°: Si $a = 0$, sigue de la consecuencia 4) de la definición 10.1.

• PROPOSICIÓN 10.3: *La relación* $|$, *entre números naturales, es transitiva,* es decir,

$$\left.\begin{array}{l} a \mid b \\ b \mid c \end{array}\right\} \Longrightarrow a \mid c$$

Demostración:

$$a \mid b \underset{\text{def. 10.1}}{\Longleftrightarrow} \exists h \in N; \quad h \cdot a = b$$

$$\downarrow \text{ sustituyendo}$$

$$b \mid c \underset{\text{def. 10.1}}{\Longleftrightarrow} \exists n \in N; \quad n \cdot b = c$$

$$n(ha) = c$$

$$\Downarrow$$

$$(nh)a = c$$

$$\Downarrow \text{ si } nh = m$$

$$ma = c$$

es decir,

$$\exists m \in N; \quad ma = c \underset{\text{def. 10.1}}{\Longleftrightarrow} a \mid c$$

• PROPOSICIÓN 10.4: *La relación* $|$ *es de orden.*

• PROPOSICIÓN 10.5: *La relación* $|$ *es de orden parcial.*

EJERCICIOS

10.4 ¿De qué proposiciones y ejercicios es consecuencia la proposición 10.4?

10.5 Ponga una ejemplo que pruebe la proposición 10.5 (véase para ello el ejemplo 6.2 del § 4).

• PROPOSICIÓN 10.6:

$$\left.\begin{array}{l} a \mid b \\ a \mid c \end{array}\right\} \Longrightarrow a \mid (b + c)$$

Demostración:

$$\left.\begin{array}{l} a \mid b \underset{\text{def. 10.1}}{\Longleftrightarrow} \exists h \in N, \quad h \cdot a = b \\ a \mid c \underset{\text{def. 10.1}}{\Longleftrightarrow} \exists n \in N; \quad n \cdot a = c \end{array}\right\} \underset{\text{uniformidad de la suma}}{\Longrightarrow} h \cdot a + n \cdot a = b + c$$

$$\Downarrow$$

$$(h + n) \cdot a = b + c$$

$$\Downarrow \text{ si } h + n = m$$

$$m \cdot a = (b + c)$$

es decir,

$$\exists m \in N; \quad ma = (b + c) \underset{\text{def. 10.1}}{\Longleftrightarrow} a \mid (b + c)$$

EJERCICIOS

10.6 Demostrar que

$$\left.\begin{array}{l} a \mid b \\ a \mid c \end{array}\right\} \Longrightarrow a \mid (b-c)$$

Se supone

$$c \leqslant b$$

10.7 Demostrar que

$$a \mid b \Longrightarrow a \mid (b \cdot c)$$

• PROPOSICIÓN 10.7:

$$\left.\begin{array}{l} a \mid b \\ c \mid d \end{array}\right\} \Longrightarrow (a \cdot c) \mid (b \cdot d)$$

es decir, *la relación | es compatible con el producto.*

EJERCICIOS

10.8 Demostrar la proposición 10.7.

10.9 Comprobar que la relación | no es compatible con la suma de naturales, mediante un contraejemplo.

Para expresar que

a divide a b

se dice también que

b es múltiplo de a, o bien que *b es divisible por a*

y se escribe

$$\boxed{b = \overset{\bullet}{a}}$$

es decir

$$\boxed{a \mid b} \underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \boxed{\exists\, h \in N;\quad ha = b} \underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \boxed{b = \overset{\bullet}{a}}$$

Es múltiplo de es, por tanto, la relación opuesta de la relación *divide a*, lo mismo que $\geqslant$ era la relación opuesta de la relación $\leqslant$.

EJERCICIOS

10.10 ¿Será de orden la relación es múltiplo de **entre números naturales?**

10.11 ¿Tendrá opuesta cada relación de orden?

• EJEMPLO 10.2: Decimos que *seis dividido por tres es igual a dos* y escribimos

$$\frac{6}{3}=2 \qquad \text{o bien} \qquad 6:3=2$$

porque 2 es el número natural cuyo producto por 3 es igual a 6, es decir, porque

$$2\cdot 3=6$$

• DEFINICIÓN 10.2: *División exacta:* Si a y b son números naturales y es $a\neq 0$

$$\boxed{\frac{b}{a}=h} \underset{\text{def}}{\iff} \boxed{h\cdot a=b} \underset{\text{def}}{\iff} \boxed{b:a=h}$$

EJERCICIOS

10.12 ¿Por qué no es una operación interna la división de naturales?

10.13 Compárese la definición 10.2, de división exacta, con la definición 8.1, de sustracción, ayudándose del siguiente esquema:

$$b-a=h \iff h+a=b \iff b-h=a$$

$$b:a=h \iff h\cdot a=b \iff \frac{b}{h}=a$$

Exprese las conclusiones a que llegue.

Del ejercicio anterior se desprende que la división exacta es la operación inversa de la multiplicación, del mismo modo que la sustracción es la operación inversa de la adición.

EJERCICIOS

10.14 **Si en las propiedades 1), 2), 3), 4) y 5) de la sustracción, citados en el párrafo 8, cambiamos**

suma **por** multiplicación y
diferencia **por** cociente exacto

obtenemos otras cinco propiedades para los cocientes exactos.

10.15 **Demostrar las propiedades de los cocientes exactos, escritas en el ejercicio anterior.**

10.16 **Demostrar que la división exacta es distributiva por la derecha respecto de la suma (ver nota siguiente a la definición 7.1 del § 5), es decir, que**

$$(a+b):c=(a:c)+(b:c)$$

Se supone que las operaciones indicadas son posibles.

10.17 **Comprobar que la distributividad por la izquierda es falsa, buscando un contraejemplo.**

10.18 **Estudiar la distributividad de la división exacta respecto de la diferencia, por la derecha y por la izquierda ¿Son ciertas ambas? Ponga ejemplos e intente demostrar la que suponga cierta.**

• EJEMPLO 10.3: Al dividir 48 entre 5 se obtiene de cociente 9 y resto 3

$$\begin{array}{r|l} 48 & 5 \\ \hline 3 & 9 \end{array}$$

ya que si a partir de un conjunto de 48 elementos tratamos de efectuar una partición en que las partes consten de 5 elementos, encontramos que se pueden formar 9 de estas partes y sobran 3 elementos que no llegan a formar

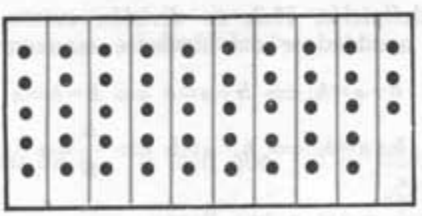


Figura 10.1

una parte, como se indica en la figura 10.1. Es decir, para dividir 48 entre 5 se han buscado dos números, 9 y 3, tales que

$$48=5\cdot 9+3 \quad \text{siendo} \quad 3<5$$

• DEFINICIÓN 10.3: *La división entera de un número natural b, por otro a, consiste en encontrar otros dos números naturales, h y r, tales que*

$$b = ah + r \qquad r < a; \qquad a \neq 0$$

EJERCICIOS

10.19 **Comparar la definición 10.2 con la 10.3.**

10.20 **Demostrar que al multiplicar el dividendo y divisor de una división entera por un mismo número el cociente no varía y el resto queda multiplicado por dicho número, utilizando la definición 10.3.**

10.21 **Demostrar que en una división entera, cuyo divisor es mayor que uno, el cociente es menor que el dividendo.**

10.22 **Demostrar que el cociente y el resto, en una división entera, son únicos.**

11. Didáctica del número natural

El método recomendado actualmente por la mayoría de los grandes pedagogos de la Matemática para la introducción del concepto de número natural es el indicado en el párrafo 1, a partir de la idea de equipotencia.

El niño de la Escuela Maternal puede manejar muchas situaciones concretas en que tenga que comparar conjuntos estableciendo inyecciones, o biyecciones, entre ellos.

El material utilizado puede variar desde trocitos de papel o piedrecitas, hasta las regletas coloreadas, que pueden ser de papel, recortadas y coloreadas por el niño, o se pueden adquirir ya preparadas.

Cuando un niño, que aún no sabe contar, quiere decidir qué conjunto, el de papeles rojos o el de papeles blancos, de los representados en la figura 11.1 posee mayor número de elementos, ha de operar, como se indica en la figura, construyendo una aplicación inyectiva, lo que puede materializar poniendo cada papelito rojo encima de un papelito blanco y observando qué clase de papelitos, rojos o blancos, se agota antes.

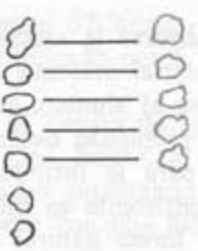


Figura 11.1

El método de las *regletas,* o de los *números en color,* se debe al belga CUISENAIRE y ha sido introducido en España por el profesor GATTEGNO, de la Universidad de Londres. El material consiste en varias reglillas cuya longitud oscila entre 1 y 10 unidades, como se indica en la figura 11.2, siendo del mismo color las regletas de la misma longitud. El niño asocia la idea de

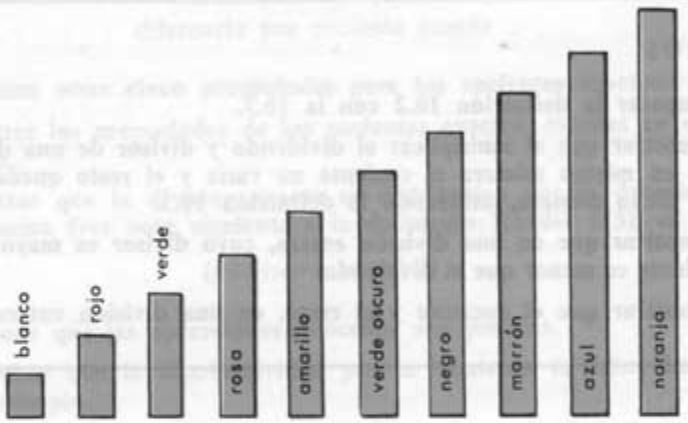


Figura 11.2

longitud a la idea de número, cuya relación veremos en el penúltimo §, al estudiar medida de magnitudes.

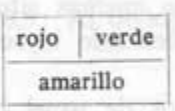


Figura 11.3

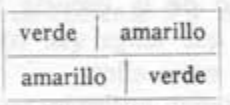


Figura 11.4

Ante la figura 11.3, el niño puede decir:

$$rojo + verde = amarillo$$

sin necesidad de manejar números. Del mismo modo, puede manejar la propiedad conmutativa (figura 11.4):

$$verde + amarillo = amarillo + verde$$

Análogamente puede materializarse la asociatividad, sustracción, etc.

La utilización de este material presenta una muestra de *enseñanza heurística,* es decir, el maestro guía al alumno, sugiriéndole situaciones que provocan que el niño descubra la propiedad deseada.

Otro material muy útil para la introducción de propiedades aritméticas es el del profesor DIENES, consistente en bloques ortoédricos.

En cuanto a la *suma,* la forma natural de introducirse es la indicada en el párrafo 2. Cuando el niño suma ayudándose de los dedos, está eligiendo

conjuntos de cardinal prefijado, suma los conjuntos y luego pasa al cardinal del conjunto suma. Naturalmente, el niño elige los conjuntos que tiene más *a mano*. Creemos que no interesa evitar que los niños sumen ayudándose de los dedos, sino al contrario, utilizando también otros conjuntos. Opinamos que el niño debe construir la tabla de sumar, que irá memorizando, sin darse cuenta, a medida que vaya utilizándola.

En cuanto a la *sustracción*, puede introducirse, de acuerdo con la definición 8.1, como proceso consistente en buscar un número, o regleta, según el caso, que sumado con uno dado dé lugar a otro dado también. Cuando se materialice con papelitos, por ejemplo, habrá de tenerse en cuenta lo indicado en el ejercicio 8.4.

En cuanto a la *multiplicación*, puede ser definida de dos modos. El utilizado más frecuentemente en la Escuela consiste en tomar el teorema 4.1 como definición de producto, definiendo el producto como suma de sumandos iguales, como se hace en los ejercicios 9.9 y 9.10. Esta definición tiene hoy muchos detractores, pues origina dificultades al definir operaciones externas, que veremos más adelante. Por tanto, se recomienda hoy definir el producto como se hace en el párrafo 4, y ver el teorema 9.2 como una propiedad y no como definición. La dificultad estriba así en la introducción del concepto de conjunto producto, pero esto se consigue buscando múltiples situaciones, como, por ejemplo, la indicada en la figura 11.5.

	Blanco	Negro	Amarillo
Niño	Niño blanco	Niño negro	Niño amarillo
Niña	Niña blanca	Niña negra	Niña amarilla

Figura 11.5

La *división* entera puede ser introducida provocando situaciones similares a la indicada en la figura 11.1, pero que puedan interesar al niño. El niño debe manejar diversas situaciones que le conduzcan a la división entera y a descubrir sus propiedades. Es más importante que cuando el niño se enfrente con problemas como los siguientes:

a) ¿Cuántos días enteros hay en 57 horas, y cuántas horas sobran?
b) Busca un número que multiplicado por 5 dé 45

sepa matematizarlos, es decir, se dé cuenta de que en *a)* se trata de una división entera y en *b)* de una división exacta, a que emplee demasiado tiempo en verificar divisiones complicadas, intentando adquirir rapidez en la automatización del cálculo, para competir con una máquina calculadora, según parece a veces.

Algunos didactas de la Matemática preconizan la utilización de figuras

geométricas dentro de las cuales ha de colocarse un número adecuado, de modo que se verifique una igualdad dada.

Así, por ejemplo, se puede pedir al niño:

Escribe un número dentro del cuadrado para que sea cierta la igualdad

$$3+\square=8$$

Nótese que, en realidad, resolver esta cuestión equivale a resolver la ecuación

$$3+x=8$$

Otro ejemplo podría ser:

Escribe números dentro del círculo y del triángulo de modo que se verifique la igualdad:

$$48=\bigcirc\cdot 5+\triangle$$

El problema así planteado tiene varias soluciones, pero si exigimos que el número escrito dentro del triángulo sea menor que 5, entonces estamos ante una división entera.

Terminemos este párrafo haciendo notar un error habitual actualmente en muchas Escuelas Primarias, donde se confunden los nombres de los números con los propios números, enseñando los nombres de los números uno tras otro sin que el niño los construya.

Siendo el problema de la introducción del concepto de número en la Escuela Primaria uno de los más importantes que ha de abordar el futuro Maestro, creemos interesante consultar algunos libros, entre los que cabe citar:

GATTEGNO, *Números en color*, Ed. Cuisenaire de España.

Z. P. DIENES y E. W. GOLDING, *Ensembles, nombres et puisances* (Col. Les premieres pas en Mathemátiques), O.C.D.L., París.

MADELEINE GOUTARD, *Las Matemáticas y los niños*, Ed. Cuisenaire de España. Madrid, 1966.

12. Sistemas de numeración

Sea un número natural h. Consideremos un conjunto H tal que

$$\text{Card}\,(H)=h$$

Admitamos que, cualquiera que sea el conjunto H, podemos encontrar un elemento no perteneciente a dicho conjunto. Sea, por ejemplo,

$$m\notin H$$

Consideremos el conjunto unitario

$$M=\{m\}$$

y formemos el conjunto

$$S = H + M$$

Es evidente que

$$\text{Card}\,(S) = h + 1$$

El proceso anterior permite observar que cada número natural, h, tiene un siguiente, $h+1$. El conjunto de los números naturales es, por tanto, infinito. Luego, para nombrar a los números naturales, necesitamos infinitos nombres, e infinitos signos para designarlos. Para evitar este inconveniente se utilizan métodos en que mediante un pequeño número de *signos y reglas* se pueden nombrar y escribir todos los números naturales. Cada sistema de reglas y signos se llama un *sistema de numeración*.

13. Sistema de numeración de base cuatro

Consideremos, para concretar, conjuntos de pelotas. Los cardinales de los conjuntos $\emptyset$, A, B y C de la figura 13.1 se llaman, como es sabido, *cero, uno, dos* y *tres* y se designan, respectivamente, con los signos 0, 1, 2 y 3, como es habitual.

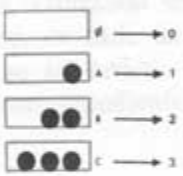


Figura 13.1

Figura 13.2

Veamos cómo con estas cuatro cifras, 0, 1, 2 y 3, basta para designar y nombrar cualquier otro número, con sólo introducir unas reglas, como haremos a continuación.

Supongamos que se dispone de cajas, en cada una de las cuales caben cuatro pelotas, como se indica en la figura 13.2. Con el conjunto de las pelotas de la figura 13.3 pueden llenarse dos cajas y sobran tres pelotas, que no

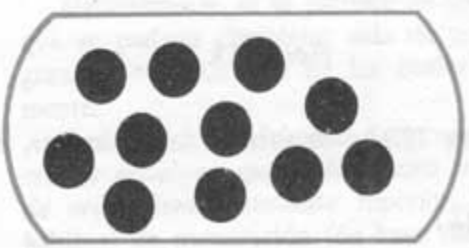


Figura 13.3

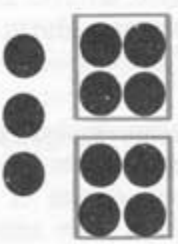


Figura 13.4

llegan a completar otra caja, como se indica en la figura 13.4. Este resultado puede anotarse como se indica en la figura 13.5.

Supongamos ahora que se tiene el conjunto de pelotas que se indica en la figura 13.6. Con ellas se llenan las cajas y sobran las pelotas indicadas en

Cajas	Pelotas
2	3

Figura 13.5

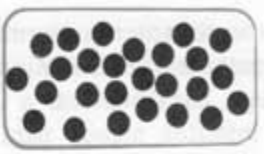


Figura 13.6

la figura 13.7. Recordemos que deseamos utilizar únicamente las cuatro cifras 0, 1, 2 y 3 para designar cualquier número. Para ello, utilicemos cajas grandes en cada una de las cuales caben cuatro cajas de las anteriores. Así, con las cajas y pelotas de la figura 13.7 pueden llenarse una caja grande, sobran dos cajas que no llegan a completar otra caja grande y sobran, por otra parte, dos pelotas, que no llegan a completar una caja, resultado que

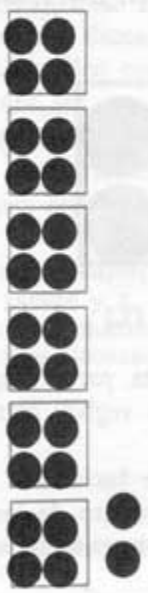


Figura 13.7

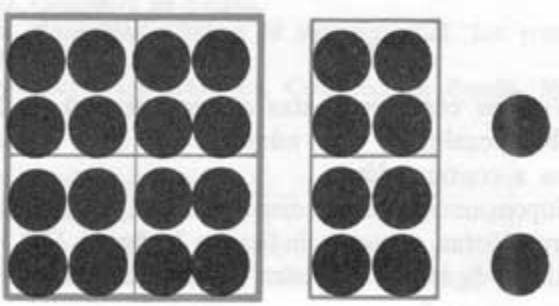


Figura 13.8

anotaremos como se indica en la figura 13.9, y se escribe habitualmente, en forma abreviada, así

$$122_{(4}$$

Análogamente, si hubiéramos partido de un conjunto de pelotas con el

que se hubiera llegado al resultado indicado en la figura 13.10, el número correspondiente se escribiría en la forma

$$230_{(4}$$

Cajas grandes	Cajas	Pelotas
1	2	2

Figura 13.9

Cajas grandes	Cajas	Pelotas
2	3	0

Figura 13.10

y se leería *doscientos treinta en base cuatro.* Nótese que no puede prescindirse del cero de la derecha y escribir

$$23_{(4}$$

pues esto se interpretaría como correspondiente a la figura 13.5 y no a la 13.10.

Supongamos ahora que se considera un conjunto de pelotas cuyo cardinal es mayor que el del conjunto de la figura 13.6, de modo que se puedan completar más de tres cajas grandes. Entonces, para escribir el número correspondiente, utilizando únicamente las cifras 0, 1, 2 y 3, habría que hacer uso de *cajones,* en cada uno de los cuales cupieran cuatro cajas grandes. Supongamos que se tuviera el resultado indicado en la figura 13.11. Entonces el número correspondiente se escribiría en la forma

$$2301_{(4}$$

Cajones	Cajas grandes	Cajas	Pelotas
2	3	0	1

Figura 13.11

y se leería *dos mil trescientos uno en base cuatro.*

Naturalmente, si se partiera de un conjunto de cardinal mayor, de tal modo que se pudiera completar más de tres cajones, habría que considerar cajones grandes, en cada uno de los cuales cupieran cuatro cajones, y así sucesivamente.

Resumiendo, podríamos decir que *el sistema de numeración de base cuatro es aquel en que cada cuatro unidades de un orden forman una unidad de orden inmediatamente superior.* Por tanto, lo mismo que en el sistema habitual de numeración (de base diez), una misma cifra puede tener distinto significado dependiendo del lugar que ocupe.

EJERCICIOS

13.1 Escriba, en base cuatro, el cardinal del conjunto de asignaturas de este curso.

13.2 Escriba, en base cuatro, el número que en base diez se escribe 38.

13.3 Escriba en base diez el número $2301_{(4}$.

14. Sistemas de numeración en otras bases

Si repetimos el razonamiento del párrafo anterior, pero ahora disponiendo de cajas en que quepan siete pelotas, estaremos trabajando en base siete, donde cada siete unidades de un orden engendran una unidad de orden inmediatamente superior. Así, a partir del conjunto de la figura 13.3, se puede

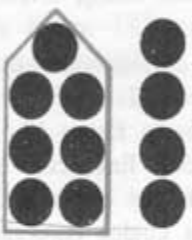


Figura 14.1

llenar una caja y sobran cuatro, como se indica en la figura 14.1, por lo que el cardinal del conjunto de pelotas de la figura 13.3 es

$$14_{(7}$$

es decir, *catorce en base siete.*

EJERCICIOS

14.1 ¿Cuáles son las cifras significativas en base siete, con las cuales se puede escribir cualquier número en esta base?

14.2 Observando las figuras 13.3, 13.4 y 14.1 diga si es cierta la igualdad

$$23_{(4}=14_{(7}$$

14.3 Escriba en base siete el cardinal del conjunto de la figura 13.6.

14.4 Escriba en base siete el número que en base diez se escribe 22.

14.5 Escriba en base diez el número $34_{(7}$.

14.6 ¿Cuáles serán las cifras significativas en el sistema de numeración de base nueve?

14.7 Escriba en base nueve el número decimal 15.

Consideremos ahora el sistema de numeración de base doce. Ahora en una caja caben doce pelotas, luego necesitaremos las cifras significativas indicadas en la figura 14.2, teniendo que emplear dos signos nuevos seguidos,

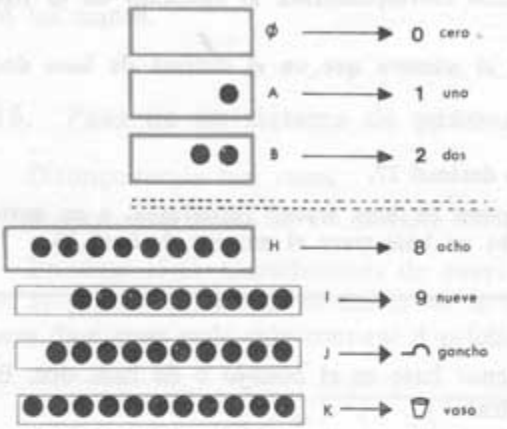


Figura 14.2

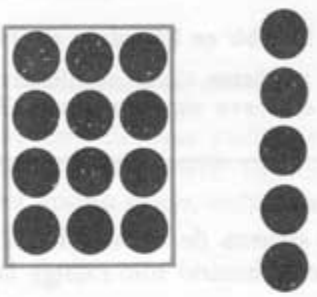


Figura 14.3

para indicar los cardinales de los conjuntos que en base diez llamamos diez y once. Naturalmente, los nombres dados a estas dos cifras y los signos con que se representan son arbitrarios. Por ejemplo, se pueden utilizar dos letras en vez de los dos signos indicados.

El cardinal del conjunto indicado en la figura 14.3 se escribirá en base doce

$$15_{(12}$$

El correspondiente a la figura 14.4 será

$$1\,\sqcup_{(12}$$

que se leería *diecivaso.*

Cajas	Pelotas
1	⊔

Figura 14.4

Cajas grandes	Cajas	Pelotas
1	∩	3

Figura 14.5

El correspondiente a la figura 14.5 se escribiría

$$1\,\cap\,3_{(12}$$

y se leería *ciento ganchenta y tres.*

EJERCICIOS

14.8 **Escribir en base doce el número correspondiente al conjunto de la figura 13.6.**

14.9 **Escribir en el sistema decimal el número que en el sistema de base doce se escribe**

$$\frown\sqcup_{(12}$$

14.10 **Escribir en base doce el número decimal 27.**

14.11 **¿Cuántas cifras significativas habrá en base trece? Introduzca, a su gusto, el nuevo signo necesario. Escriba en base trece el número decimal 35.**

El sistema de numeración de menor base es el *binario* o de base dos. En el sistema binario sólo existen las cifras

$$0,\ 1$$

es decir, razonando como en el párrafo 13, en cada caja caben dos pelotas, en cada caja grande caben dos cajas... y, en general, cada dos unidades de un orden forman una unidad de orden inmediatamente superior. El sistema binario es el utilizado en las calculadoras electrónicas ultrarrápidas, donde la cifra *uno* viene representada por *paso de corriente eléctrica* y la cifra *cero* por *interrupción de corriente.*

EJERCICIOS

14.12 **Escribir en base dos el número que en sistema decimal se escribe 3.**

14.13 **Escribir en base diez el número:**

$$101_{(2}$$

14.14 **¿Por qué no existen sistemas de numeración de base menor que dos?**

14.15 **Escribir los trece primeros números naturales en base dos.**

Cuando en cada caja caben diez pelotas, estamos ante el *sistema decimal* de numeración, que es el habitual. Convendremos en escribir los números en el sistema decimal sin el paréntesis ni el diez en la parte inferior derecha, es decir, escribiremos

$$684 \quad \text{en vez de} \quad 684_{(10}$$

Hay pueblos primitivos que utilizan el sistema de numeración de base veinte. Son pueblos que viven descalzos, lo que apoya la hipótesis de que el sistema habitual sea el de base diez provenga de que tengamos diez dedos en las manos.

15. Paso de un sistema de numeración a otro

Distinguiremos tres casos:

Primer caso: PASO DE UN SISTEMA DE BASE CUALQUIERA AL DECIMAL:

• EJEMPLO 15.1: Consideremos de nuevo el sistema de base cuatro, tratado en el párrafo 13. Como se indica en la figura 15.1, el número $10_{(4}$ es 4 en base diez, pues cada caja contiene 4 pelotas. Del mismo modo, cada caja gran-

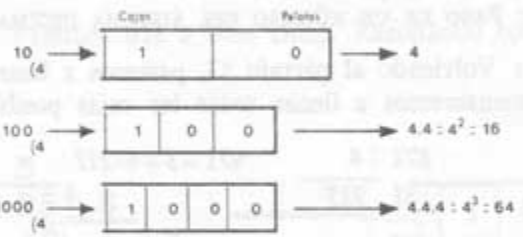


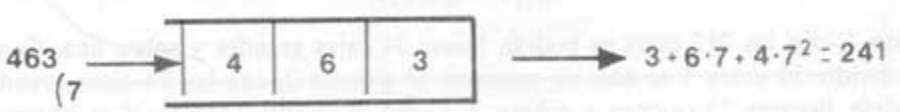
Figura 15.1

de contiene cuatro cajas, cada una de las cuales contiene cuatro pelotas, por lo que $100_{(4}$ es 4·4 en base decimal. Del mismo modo, $1.000_{(4}$ es 4^3, etc. Por tanto:

$$2312_{(4}=2\cdot 1000_{(4}+3\cdot 100_{(4}+1\cdot 10_{(4}+2=2\cdot 4^3+3\cdot 4^2+1\cdot 4+2=$$
$$=2\cdot 64+3\cdot 16+4+2=128+48+4+2=182$$

es decir, dos mil trescientos doce en base cuatro es ciento ochenta y dos en base decimal.

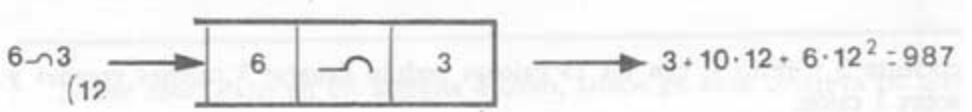
• EJEMPLO 15.2: Pasemos $463_{(7}$ al sistema decimal



es decir,

$$463_{(7}=241$$

• EJEMPLO 15.3:



EJERCICIOS

15.1 Pasar a base decimal los siguientes números:

$$704_{(9};\qquad 110101_{(2};\qquad 3\sqcup 9-\cap_{(12}$$

15.2 Escribir en base decimal el mayor número que en base cinco tiene tres cifras.

15.3 Para escribir en base diez el número $3412_{(5}$ basta hallar el valor numérico del polinomio $3x^3+4x^2+x+2$ sustituyendo x por 5, lo que se hace cómodamente aplicando la regla de Ruffini. Hágalo y generalice el proceso.

Segundo caso: PASO DE UN NÚMERO DEL SISTEMA DECIMAL A OTRO SISTEMA.

• EJEMPLO 15.4: Volviendo al párrafo 13, pasemos a base cuatro el número decimal 871. Comenzaremos a llenar todas las cajas posibles. Como al dividir 871 entre 4 se obtiene de cociente 217 y resto 3, se podrán llenar 217 cajas y sobran tres pelotas. Como al dividir 217 entre 4 se obtiene cociente 54 y resto 1, con las 217 cajas se podrán llenar 54 cajas grandes y sobra una. Como al dividir 54 entre 4 se obtiene cociente 13 y resto 2, con las 54 cajas grandes podrán llenarse 13 cajones y sobran 2. Como al dividir 13 entre 4 se obtienen cociente 3 y resto 1, con los 13 cajones podrán llenarse 3 cajones grandes y sobra 1 cajón.

$$\begin{array}{r|l} 871 & 4 \\ \hline 31 & 217 \\ \boxed{3} & \end{array} \qquad 871=3+4\cdot 217$$

$$\begin{array}{r|l} 217 & 4 \\ \hline 17 & 54 \\ \boxed{1} & \end{array} \qquad 217=1+4\cdot 54$$

$$\begin{array}{r|l} 54 & 4 \\ \hline 14 & 13 \\ \boxed{2} & \end{array} \qquad 54=2+4\cdot 13$$

$$\begin{array}{r|l} 13 & 4 \\ \hline \boxed{1} & 3 \end{array} \qquad 13=1+4\cdot 3$$

Sustituyendo, como se indica a continuación

$$871 = 3 + 4 \cdot 217$$
$$\uparrow$$
$$217 = 1 + 4 \cdot 54$$
$$\uparrow$$
$$54 = 2 + 4 \cdot 13$$
$$\uparrow$$
$$13 = 1 + 4 \cdot 3$$

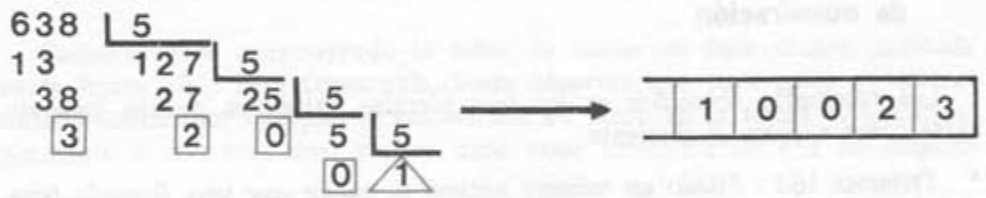
se obtiene

$$871 = 3 + 4 \cdot \{1 + 4 \cdot [2 + 4 \cdot (1 + 4 \cdot 3)]\} =$$
$$= 3 + 4 \cdot 1 + 4^2 \cdot 2 + 4^3 \cdot 1 + 4^4 \cdot 3$$

Por tanto,

$$871 = 31213_{(4}$$

• EJEMPLO 15.5: Pasemos 638 a base cinco. Razonando como en el ejemplo anterior



luego

$$638 = 10023_{(5}$$

• EJEMPLO 15.6: Paso de 415 a base 12

pues 10, en base diez, equivale a *gancho* en base doce. Por tanto,

$$415 = 2 \curvearrowright 7_{(12}$$

EJERCICIOS

15.4 Escribir el número 1208 en las bases ocho y trece.

15.5 Escribir 57 en las bases seis, tres y dos.

Tercer caso: PASO DE UN SISTEMA A OTRO, AMBOS DE BASE DISTINTA DE DIEZ.

Basta pasar a base diez y luego pasar de base diez a la otra.

• EJEMPLO 15.7: Escribir en base ocho el número $243_{(5}$.
Solución:

$$243_{(5} \longrightarrow 73 \longrightarrow 111_{(8}$$

EJERCICIOS

15.6 Pasar a base siete el número $3201_{(4}$

15.7 Pasar a base doce el número $1021_{(3}$

15.8 Encontrar la base n, de modo que sea cierta la igualdad

$$213_{(n}=130_{(9}$$

16. Teorema fundamental de los sistemas de numeración

Los resultados obtenidos en los tres párrafos anteriores pueden generalizarse como expresa el siguiente

• TEOREMA 16.1: *Fijado un número natural n, mayor que uno, llamado base, cualquier número natural, A, puede expresarse en la forma*

$$A=a+b\cdot n+c\cdot n^2+d\cdot n^3+\ldots+s\cdot n^{h-1}+t\cdot n^h$$

donde a, b, c, d, ..., s, t son números naturales menores que n.

Demostración: Dividiendo A entre n, se tiene:

$$A=a+n\cdot q_1; \qquad a<n$$

sin más que tener en cuenta la definición 10.3. Si el cociente obtenido, q_1, es mayor o igual que n, lo dividimos por n, resultando:

$$q_1=b+n\cdot q_2 \qquad b<n$$

Continuando del mismo modo se tiene:

$$q_2=c+n\cdot q_3; \qquad c<n$$
$$q_3=d+n\cdot q_4; \qquad d<n$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Teniendo en cuenta el ejercicio 10.21, se tiene

$$A>q_1>q_2>q_3>\ldots$$

luego llegaremos a un cociente $q_h < n$. Por tanto,

$$q_{h-1} = s + n \cdot q_h; \qquad s < n$$
$$q_h = t + n \cdot 0; \qquad t = q_h < n$$

Sustituyendo el valor obtenido para cada q_i ($i = 1, 2, \ldots, h$) en la ecuación anterior, como se hizo en el ejemplo 15.4, se tiene la expresión del teorema 16.1.

Notemos que los números $a, b, c, \ldots, t$ son únicos fijados A y n, por ser únicos el cociente y el resto de cualquier división.

17. Práctica y didáctica de las operaciones en cualquier base

Volvamos al sistema de base cuatro, considerado en el párrafo 13, donde se tenían los números consecutivos:

$$0, 1, 2, 3, 10_{(4}, 11_{(4}, 12_{(4}, 13_{(4}, 20_{(4}, 21_{(4}, 22_{(4}, 23_{(4}, 30_{(4}, 31_{(4}, \ldots$$

Comenzaremos construyendo la tabla de sumar en base cuatro, indicada en la figura 17.1. Para construirla, basta observar que para pasar de un resultado (como, por ejemplo, el encuadrado en negro en la figura 17.1, correspondiente a uno más dos) al que debe estar inmediatamente a su derecha

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3 →	$10_{(4}$
2	2	3	$10_{(4}$	$11_{(4}$
3	3	$10_{(4}$	$11_{(4}$	$12_{(4}$

Figura 17.1

(encuadrado en rojo en la citada figura, correspondiente a uno más tres) se ha mantenido fijo un sumando (el uno) y se ha sumado uno al otro (o sea, ha pasado de dos a tres el segundo sumando). Por tanto, por la propiedad asociativa, se ha sumado uno al resultado, como se indica a continuación:

$$1 + 3 = 1 + (2 + 1) = (1 + 2) + 1 = \boxed{3} + 1 = \boxed{10_{(4}}$$

También se puede construir como se indica en la figura 17,2, en la 17.3 o en la 17.4.

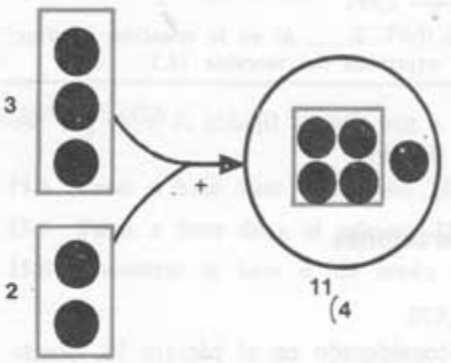


Figura 17.2

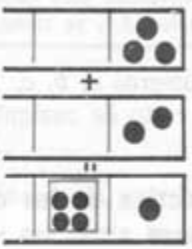


Figura 17.3

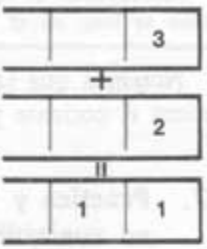


Figura 17.4

En opinión de muchos didactas de la Matemática, el niño debe construir la tabla de sumar, memorizándola al manejarla. Tampoco se deben dar al niño las reglas prácticas para sumar, sino que es el niño quien debe descubrirlas guiado adecuadamente.

En la figura 17.5 se indica un proceso que sugiere al niño el mecanismo

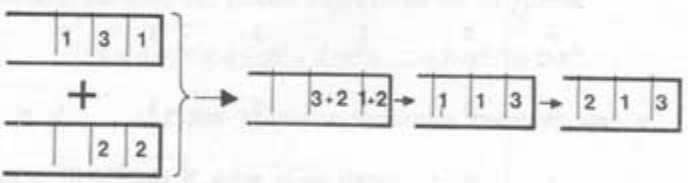


Figura 17.5

de la suma. Se trata de la suma de los números

$$131_{(4} \quad \text{y} \quad 22_{(4}$$

El número indicado en rojo en la figura es el que *llevamos*, por ser

$$3+2 > 10_{(4}$$

$$\begin{array}{r} 1\,3\,1 \\ +\,2\,2 \\ \hline 2\,1\,3 \end{array}$$

Figura 17.6

En la figura 17.6 se presenta un resumen de lo hecho en la figura 17.5, lo que constituye la disposición habitual de este cálculo. Una colección graduada de ejercicios de este tipo puede llevar a que el niño llegue a la mecanización de la suma sin haberle sido impuestas sus reglas.

Como la práctica de la suma (y de cualquier otra operación) se basa en sus propiedades y éstas son independientes del sistema de numeración en que se opera, se comprende que las reglas habituales en base diez serán válidas en cualquier base.

• EJEMPLO 17.1: Con ayuda de la tabla de sumar en base cuatro, efectuemos la suma

$$131_{(4}+213_{(4}+32_{(4}$$

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 2\ \ 1\ \ \ \ } \\ 1\ 3\ 1_{(4} \\ 2\ 1\ 3_{(4} \\ +\ 3\ 2_{(4} \\ \hline 1\ 1\ 0\ 2_{(4} \end{array}$$

EJERCICIOS

17.1 Efectuar la sustracción

$$\begin{array}{r} 2\ 2\ 1_{(4} \\ -\ 3\ 2_{(4} \\ \hline \end{array}$$

17.2 Comprobar que el resultado es correcto, aplicando la definición de sustracción.

17.3 Comprobar que el resultado de la operación del ejercicio 17.1 es correcto, pasando minuendo y sustraendo a base decimal, efectuando la sustracción en base decimal y pasando el resultado a base cuatro.

17.4 Construir un esquema similar al de la figura 17.5 para explicar la sustracción del ejercicio 17.1.

17.5 Construir la tabla de sumar en base dos y con su ayuda efectuar la suma

$$1011_{(2}+101_{(2}+11_{(2}$$

17.6 Construir la tabla de sumar en base cinco y con su ayuda efectuar la sustracción

$$4302_{(5}-314_{(5}$$

17.7 Construir la tabla de sumar en base doce y, con su ayuda, efectuar la suma

$$1 - \cap\ 86_{(12}+47\ \sqcup_{(12}$$

En cuanto a la multiplicación, lo mismo que en la suma, comenzaremos

construyendo la tabla. Volviendo al sistema de base cuatro y con ayuda de la tabla de sumar, representada en la figura 17.1, construyamos la tabla de multiplicar en esta base, sin más que aplicar el teorema 9.2.

×	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	$10_{(4}$	$12_{(4}$
3	0	3	$12_{(4}$	$21_{(4}$

Figura 17.7

Con la ayuda de esta tabla de multiplicar pueden efectuarse multiplicaciones de números de varias cifras.

A continuación se efectúa el producto de

$$3 \cdot 321_{(4}$$

aprovechando las propiedades del producto y su distributividad respecto de la suma:

$$3 \cdot 321_{(4} = 3 \cdot (3 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 1) = 3 \cdot (3 \cdot 100) + 3 \cdot (2 \cdot 10) + 3 \cdot 1 =$$
$$= (3 \cdot 3) \cdot 100 + (3 \cdot 2) \cdot 10 + 3 \cdot 1$$

lo que se esquematiza en la figura 17.8.

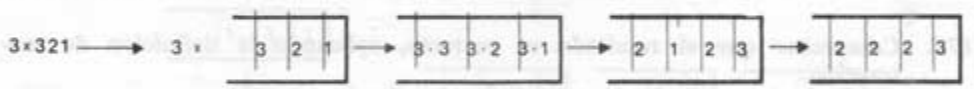


Figura 17.8

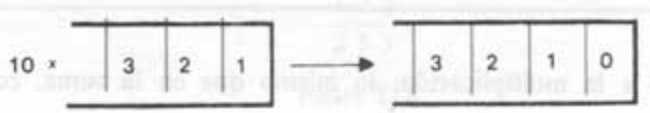
$$\begin{array}{r} 3\ 2\ 1 \\ \times \quad\quad 3 \\ \hline 2\ 2\ 2\ 3 \\ {\scriptstyle 1} \end{array}$$

Figura 17.9

En la figura 17.9 se resume el proceso de la figura 17.8, en la forma en que se dispone habitualmente este cálculo.

EJERCICIOS

17.8 Demostrar que al multiplicar



17.9 Con la ayuda del ejercicio anterior hágase un esquema, similar al de las figuras 17.5 y 17.9, que sugiera el mecanismo de la operación

$$33_{(4} \times 321_{(4}$$

cuya disposición habitual es la indicada a continuación

$$\begin{array}{r} 3\ 2\ 1_{(4} \\ \times\quad 3\ 3_{(4} \\ \hline 2\ 2\ 2\ 3 \\ 2\ 2\ 2\ 3 \\ \hline 3\ 1\ 1\ 1\ 3_{(4} \end{array}$$

17.10 Efectuar en base cuatro el producto

$$32_{(4} \times 233_{(4}$$

17.11 Construir la tabla de multiplicar en base 5 y aplicarla a efectuar el producto

$$42_{(5} \times 31_{(5}$$

17.12 Construir la tabla de multiplicar en base siete y con su ayuda efectúe el producto

$$516_{(7} \times 3$$

17.13 Construir la tabla de multiplicar en base doce y efectuar el producto

$$6 - \cap\ 8_{(12} \times 1\ \sqcup_{(12}$$

17.14 La propiedad conmutativa del producto de naturales se manifiesta en la simetría de la tabla de la figura 17.7, respecto de una cierta recta. ¿Cuál?

17.15 Construir la tabla de multiplicar en base dos y efectuar el producto:

$$1011_{(2} \times 101_{(2}$$

17.16 Efectuar la división entera de $2223_{(4}$ entre 3 con la ayuda de la tabla de multiplicar en base 4.

17.17 Efectuar la división entera de $31113_{(4}$ entre $33_{(4}$.

17.18 Efectuar la división entera de $101_{(2}$ entre $11_{(2}$. Obsérvese que en base dos la división es muy cómoda, pues no es necesario hacer tanteos para obtener las cifras del cociente, ya que si el dividendo es mayor o igual que el divisor, el cociente parcial será uno y en caso contrario cero.

Algunos didactas de la Matemática Elemental son partidarios de que en la Escuela Primaria se manejen sistemas de numeración de base cuatro o cinco antes que el sistema decimal. Diez es quizás un número elevado para mentes infantiles. El sistema de base cinco tiene la ventaja de poder utilizar los

dedos de una sola mano. El de base cuatro tiene la ventaja de su facilidad de materialización con cajas, como se ha indicado en varias figuras anteriores.

Creemos de interés que el futuro maestro conozca el libro: G. CUTHBERT WEBBER, *Mathematic for Elementary Teachers*, Ed. Adison-Wesley. Newark, Delaware, 1966, dedicado casi íntegramente a la introducción de sistemas de numeración en la Escuela Primaria. También puede verse el capítulo segundo del libro: J. CASULLERAS REGÁS, *Matemáticas, Primer Curso de Bachillerato*, Ed. Anaya.

NUMERO ENTERO. DIVISIBILIDAD 10

1. Conjunto de los números enteros

• EJEMPLO 1.1: En el párrafo 8 del § 9 se ha indicado que la sustracción de naturales no siempre es posible. Por ejemplo, a la pareja (5, 3) la sustracción le asocia el número 2

$$(5,3) \xrightarrow{-} 2$$

pero, en cambio, a la pareja (3, 5) no le asocia ningún número natural, ya que $3<5$.

Observemos que al número natural dos se puede llegar también, por sustracción, a partir de otras parejas:

$$(4,2) \xrightarrow{-} 2$$

$$(9,7) \xrightarrow{-} 2$$

$$(146,144) \xrightarrow{-} 2$$

Por ejemplo, las parejas (9, 7) y (5, 3) dan lugar, por sustracción, al mismo número natural dos, es decir,

$$9-7=5-3$$

Observemos que se verifica

$$9+3=5+7$$

EJERCICIOS

1.1 **Comprobar que** las parejas (a, b) y (c, d), de números naturales, dan lugar, por sustracción, al mismo número natural si

$$a+d=c+b$$

Para ello sustituya a, b, c y d por números naturales, de modo que las sustracciones indicadas sean posibles, esto es, de modo que

$$b \leqslant a; \qquad d \leqslant c$$

1.2 Demostrar el enunciado del ejercicio anterior, es decir, demostrar que

$$a-b=c-d \iff a+d=c+b$$

utilizando las propiedades de la sustracción estudiadas en el párrafo 8 del § 9. Se supone que las sustracciones indicadas son posibles.

El ejemplo y los ejercicios anteriores sugieren la consideración de una relación entre las parejas de la forma (a, b), donde a y b son números naturales, tales que $b \leqslant a$.

Dos de estas parejas

$$(a, b) \quad \text{y} \quad (c, d)$$

estarán relacionadas si, por sustracción, dan lugar al mismo número natural, es decir, si

$$a+d=c+b$$

Las parejas

$$(a, b) \quad \text{donde} \quad b \leqslant a$$

de las que estamos hablando, son elementos del conjunto producto $N \times N$. Pero no todos los elementos de $N \times N$ son parejas de este tipo. Por ejemplo, la pareja (3, 5), indicada en el ejemplo 1.1, no lo es.

El problema que ahora vamos a abordar consiste en ampliar el concepto de número, tratando de construir otros números, en los cuales la sustracción siempre sea posible y tales que a los naturales se le pueda considerar como un subconjunto de ellos.

Para ello vamos a generalizar la relación considerada anteriormente entre las parejas (a, b), de $N \times N$, tales que $b \leqslant a$, extendiéndola a todo el conjunto $N \times N$.

• DEFINICIÓN 1.1: *Diremos que dos parejas*

$$(a, b) \quad \text{y} \quad (c, d)$$

pertenecientes al conjunto producto $N \times N$ están relacionadas, lo que expresaremos en la forma

$$(a, b) \sim (c, d)$$

si se verifica

$$a+d=c+b$$

Abreviadamente:

$$(a, b) \sim (c, d) \underset{\text{def}}{\iff} a+d=c+b$$

es decir, las parejas

$$(a, b) \quad (c, d)$$

están relacionadas si al sumar los números situados en los extremos de la doble flecha roja se obtiene el mismo número que al sumar los de la negra.

• EJEMPLO 1.2:

$$(2, 5) \sim (9, 12)$$

ya que

$$2+12=14=9+5$$

EJERCICIOS

1.3 Escribir otras cuatro parejas relacionadas con la (2, 5).

1.4 Escribir varias parejas relacionadas con la (4, 13). ¿Cuántas parejas relacionadas con ella existirán?

1.5 Escribir varias parejas relacionadas con la (6, 6).

1.6 Sustituir la letra x por un número natural, de modo que

$$(8, 2) \sim (x, 11)$$

1.7 En la figura 1.1 se representa el diagrama cartesiano (véase párrafo 1 del § 3) correspondiente al conjunto $N \times N$. ¿Qué observa al comparar los puntos representativos de parejas equivalentes?

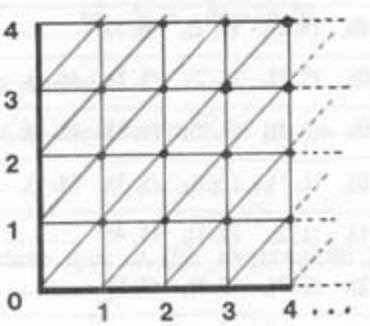


Figura 1.1

• PROPOSICIÓN 1.1: *La relación* $\sim$, *de la definición* 1.1, *es una relación de equivalencia.*

Demostración:

a) Es *reflexiva:*

$$(a, b) \sim (a, b) \underset{\text{def. 1.1}}{\iff} a+b=a+b$$

b) Es *simétrica:*

$$(a, b) \sim (c, d) \underset{\text{def}}{\iff} a+d=c+b$$

$$\Updownarrow$$

$$c+b=a+d \underset{\text{def}}{\iff} (c, d) \sim (a, b)$$

c) Es *transitiva:*

$$\begin{array}{l} (a, b) \sim (c, d) \iff \boxed{\begin{array}{c} a+d=c+b \\ c+f=e+d \end{array}} \\ (c, d) \sim (e, f) \iff \end{array}$$

$\Downarrow$ sumando miembro a miembro, o sea, por uniformidad de la suma de naturales

$$(a+d)+(c+f)=(c+b)+(e+d)$$

Por conmutatividad y asociatividad de la suma de naturales $\Downarrow$

$$(a+f)+(c+d)=(e+b)+(c+d)$$

Aplicando la ley cancelativa de la suma de naturales $\Downarrow$

$$a+f=e+b \underset{\text{def}}{\iff} (a, b) \sim (e, f)$$

Por ser de equivalencia, la relación $\sim$ produce una clasificación en el conjunto $N \times N$. En la figura 1.2 se muestran las clases:

... ...
... ...

(3, 0), (4, 1), (5, 2), (6, 3), ...

(2, 0), (3, 1), (4, 2), (5, 3), (6, 4), ...

(1, 0), (2, 1), (3, 2), (4, 3), (5, 4), ...

(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), ...

(0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 4), ...

(0, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 5), ...

... ...
... ...

Figura 1.2

Cada una de las clases se llama un *número entero*. El conjunto de los números enteros es, por tanto, el conjunto cociente de $N \times N$ respecto de la relación de equivalencia $\sim$.

Como en toda clasificación, cualquiera de los elementos de una clase determina dicha clase. Así, la pareja (3, 1) define la clase formada por todas las parejas relacionadas con la (3, 1). Designaremos a esta clase por

$$\{\{(3,1)\}\}$$

haciendo uso de la notación indicada en el párrafo 4 del § 4. Es decir,

$$\{\{(3,1)\}\}=\{(2,0),\ (3,1),\ (4,2),\ (5,3),\ (6,4),\ \ldots\}$$

teniéndose, por ejemplo,

$$(2,0)\in\{\{(3,1)\}\}$$

Observemos que en cada clase existe una pareja uno de cuyos componentes, al menos, es cero. Así, en la clase $\{\{(3, 1)\}\}$ tenemos la pareja (2, 0), cuyo segundo componente es cero; en la clase $\{\{(2, 3)\}\}$ tenemos el representante (0, 1) cuya primera componente es cero, etc. A tal pareja se le llama *representante canónico* de la clase. Así, por ejemplo, el representante canónico de la clase $\{\{(5,12)\}\}$ será $(0,7)$.

- PROPOSICIÓN 1.2: *Todas las clases poseen un representante canónico.*

  Demostración: Sea (a, b) un representante cualquiera de la clase.

  Primer caso: Si $a \geqslant b$, consideremos la pareja

$$(a-b,\ b-b)$$

que es de la misma clase que (a, b), como se comprueba aplicando la definición 1.1. Si designamos por p al número natural $a-b$, se tiene

$$(a-b,\ b-b)=(p,0)$$

que es su representante canónico.

Segundo caso: Si $a \leqslant b$, consideremos la pareja

$$(a-a,\ b-a)$$

que es de la misma clase que (a, b). Designando por q al número natural $b-a$, se tiene

$$(a-a, b-a)=(0,q)$$

que es un representante canónico.

EJERCICIOS

1.8 Escribir los representantes canónicos de las clases que se indican a continuación

$$\{\{(16, 9)\}\}, \quad \{\{(4, 22)\}\}, \quad \{\{(13, 13)\}\}$$

1.9 En la figura 1.1, cada clase corresponde a los nudos de la malla situados en una misma línea roja. ¿Dónde están los puntos correspondientes a los representantes canónicos?

Consideremos la aplicación

$$N \xrightarrow{f} N \times N$$

que asocia a cada número natural $n \in N$ la pareja $(n, 0) \in N \times N$. Consideremos la aplicación

$$N \times N \xrightarrow{g} N \times N/\sim$$

que asocia a cada pareja (a, b) la clase $\{\{(a, b)\}\}$. La aplicación compuesta de f y g asociará al número natural n la clase $\{\{(n, 0)\}\}$, como se indica

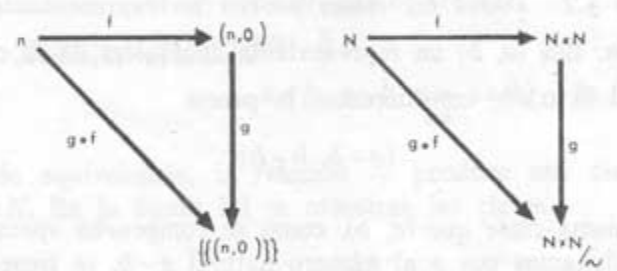


Figura 1.3

en los esquemas de la figura 1.3, análogos al de la figura 8.1 del § 3.

Por ejemplo, la aplicación $g \circ f$ asocia al número natural tres la clase $\{\{(3, 0)\}\}$.

EJERCICIOS

1.10 Pruebe que la aplicación $g \circ f$ es inyectiva.

1.11 Muestre que la aplicación $g \circ f$ no es suprayectiva.

Se tiene así una inyección de N en $N \times N/\sim$, que asocia a

$$0 \longrightarrow \{(0,0),\ (1,1),\ (2,2),\ \ldots\ldots\ldots\}$$
$$1 \longrightarrow \{(1,0),\ (2,1),\ (3,2),\ \ldots\ldots\ldots\}$$
$$2 \longrightarrow \{(2,0),\ (3,1),\ (4,2),\ (5,3),\ \ldots\}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Como el conjunto imagen de esa aplicación es el conjunto de las clases de la forma $\{\{(p, 0)\}\}$, donde $p \in N$, la aplicación $g \circ f$ es una biyección de N en el conjunto de las clases de la forma $\{\{(p, 0)\}\}$, donde $p \in N$.

Por ello, la clase $\{\{(p, 0)\}\}$, donde $p \in N$, se designa habitualmente en la forma abreviada por p. En particular, la clase $\{\{(5, 0)\}\}$ se designa abreviadamente por 5; la clase $\{\{(0, 0)\}\}$ se designa abreviadamente por 0, etc.

Por otra parte, la clase $\{\{(0, q)\}\}$ se designa abreviadamente por $-q$. En particular, la clase $\{\{(0, 7)\}\}$ se designa abreviadamente por -7.

EJERCICIO

1.12 Escribir en forma abreviada las clases

$$\{\{(15, 0)\}\}, \qquad \{\{(0, 8)\}\}, \qquad \{\{(5, 9)\}\}$$

Nótese que el signo 3 se utiliza para dos cosas distintas, hasta ahora, para designar al número natural tres y para designar a la clase $\{\{(3, 0)\}\}$. El signo 0 representa, pues, al número natural cero y al entero nulo.

El conjunto de las clases, o sea, de los números enteros, se designa por Z, es decir,

$$Z = N \times N/\sim = \{\ldots,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\}$$

A los números enteros, cuyo representante canónico es de la forma $(p, 0)$, donde $p \in N$, siendo $p \neq 0$, se les llama *enteros positivos*. A aquellos cuyo representante canónico es de forma $(0, q)$, donde $q \in N$, siendo $q \neq 0$, se les llama *enteros negativos*. Se ha efectuado así una partición de Z en enteros positivos, enteros negativos y el entero nulo.

Designemos por Z_+ al conjunto de los enteros cuyo representante canónico es de la forma $(m, 0)$, donde $m \in N$, es decir, Z_+ resulta al agregar el cero al conjunto de los enteros positivos.

En realidad N no es un subconjunto de Z, pero como se ha visto que existe una biyección de N en Z_+, se puede considerar que

$$N \subset Z$$

Suele decirse que así N se ha «sumergido» en Z.

2. Grupo aditivo de los enteros

Vamos a definir la suma de enteros de modo que cuando se efectúe, en particular, con naturales, coincida con la suma de naturales, definida en el párrafo 2 del § 9.

Para ello consideremos las parejas

$$(a, b) \quad \text{y} \quad (c, d)$$

y supongamos que

$$b \leqslant a \quad , \quad d \leqslant c$$

de modo que, utilizando la notación abreviada indicada en el párrafo anterior, se tiene

$$\{\{(a, b)\}\} = a - b; \qquad \{\{(c, d)\}\} = c - d$$

EJERCICIO

2.1 Demostrar que dados los números naturales a, b, c y d, tales que $b \leqslant a$ y $d \leqslant c$, se verifica

$$(a-b)+(c-d)=(a+c)-(b+d)$$

aplicando las propiedades de la sustracción estudiadas en el párrafo 8 del § 9.

Como el segundo miembro de la igualdad del ejercicio anterior se puede escribir en la forma

$$\{\{(a+c,\ b+d)\}\}$$

la referida igualdad del ejercicio 2.1 se puede escribir así

$$\{\{(a, b)\}\}+\{\{(c, d)\}\}=\{\{(a+c,\ b+d)\}\}$$

donde $b \leqslant a$ y $d \leqslant c$.

Generalicemos el resultado anterior para el caso de que los enteros considerados sean cualquiera, incluso negativos.

• EJEMPLO 2.1: Para sumar los enteros 2 y -5 tomamos un representante de la clase 2 y otro de la clase -5, sumamos los primeros componentes y también los segundos componentes respectivos, como indica el esquema de la figura 2.1, obteniendo así

$$\begin{array}{rcl} 2 & \longrightarrow & (6, 4) \\ -5 & \longrightarrow & (2, 7) \\ \hline -3 & \longleftarrow & (8, 11)=(6+2, 4+7) \end{array}$$

Figura 2.1

otra pareja, la (8, 11), que pertenece a la clase -3. Por ello diremos que la suma de los enteros 2 y -5 es -3, y escribimos

$$2+(-5)=-3$$

EJERCICIO

2.2 Repita el ejemplo 2.1 tomando un representante de la clase 2, distinto del (6, 4), y otro de la clase -5, distinto del (2, 7). ¿Se llega al mismo resultado -3?

El ejercicio anterior se generaliza así:

• PROPOSICIÓN 2.1:

$$\left.\begin{array}{l}(a,b)\sim(a',b')\\(c,d)\sim(c',d')\end{array}\right\}\Longrightarrow(a+c,\ b+d)\sim(a'+c',\ b'+d')$$

EJERCICIO

2.3 Demostrar la proposición 2.1, utilizando la definición 1.1, como se hizo en la demostración de la proposición 1.1.

• DEFINICIÓN 2.1: *Dados dos números enteros r y s, si (a, b) es un representante de r y (c, d) lo es de s, se llama suma de r y s al entero*

$$\{\{(a+c,\ b+d)\}\}$$

Esquemáticamente:

$$\begin{array}{rcl} r & \longrightarrow & (a,b) \\ s & \longrightarrow & (c,d) \\ \hline r+s & \longleftarrow & (a+c,b+d) \end{array}$$

Obsérvese que $r+s$ no depende de los representantes elegidos, como consecuencia de la proposición 2.1. Por tanto, la suma así definida asocia a cada pareja de enteros, (r, s), otro entero, $r+s$. La suma es, pues, una operación interna en el conjunto Z.

Notemos que el mismo signo $+$ que se utilizó para la adición de naturales se utiliza ahora para designar otra operación, la adición de enteros. El

utilizar un mismo signo para cosas distintas tiene el inconveniente de qu puede dar lugar a confusiones conceptuales y la ventaja de no tener que ut lizar más signos nuevos.

Estudiemos ahora las propiedades de la adición de enteros:

PROPIEDAD UNIFORME

$$\left.\begin{array}{l} r=r' \\ s=s' \end{array}\right\} \Longrightarrow r+s=r'+s'$$

Demostración: Tomemos representantes:

$$r \longrightarrow (a, b); \quad s \longrightarrow (c, d); \quad r' \longrightarrow (a', b'); \quad s' \longrightarrow (c', d')$$

$$r=r' \Longleftrightarrow (a, b) \sim (a', b')$$

$$s=s' \Longleftrightarrow (c, d) \sim (c', d')$$

$$r+s=r'+s' \Longleftrightarrow (a+c,\ b+d) \sim (a'+c',\ b'+d')$$

El resto de la demostración sigue de la proposición 2.1.

PROPIEDAD CONMUTATIVA

$$\boxed{r+s=s+r} \qquad \forall\, r, s \in Z$$

Demostración: Tomemos representantes:

$$r \longrightarrow (a, b); \quad s \longrightarrow (c, d)$$

Aplicando la definición 2.1:

$$r+s=\{\{(a+c, b+d)\}\}; \qquad s+r=\{\{(c+a, d+b)\}\}$$

Como por la conmutatividad de la suma de naturales

$$a+c=c+a; \qquad b+d=d+b$$

se verifica

$$r+s=s+r$$

PROPIEDAD ASOCIATIVA

$$\boxed{(r+s)+t=r+(s+t)} \qquad \forall\, r, s, t, \in Z$$

EXISTENCIA DE ELEMENTO CERO

$$\exists\, 0 \in Z; \quad \forall\, r \in Z \qquad \boxed{0+r=r}$$

Demostración:

$$0 \longrightarrow (n,n); \qquad r \longrightarrow (a,b)$$
$$(n+a, n+b) \sim (a,b)$$
$$\Downarrow$$
$$\{\{(n+a, n+b)\}\} = \{\{(a,b)\}\}$$
$$\Downarrow$$
$$0+r=r$$

EXISTENCIA DE ELEMENTO OPUESTO

$$\forall\, r \in Z; \quad \exists\, (-r) \in Z \qquad \boxed{r+(-r)=0}$$

Demostración: Si r es entero positivo, su representante canónico será $(r, 0)$, luego el representante canónico de $-r$ será $(0, r)$. Por tanto,

$$r+(-r)=\{\{(r,0)\}\}+\{\{(0,r)\}\}=\{\{(r+0, 0+r)\}\}=\{\{(r,r)\}\}=0$$

Si r es un entero negativo, se razona de modo similar, pues $-r$ es entonces positivo.

EJERCICIOS

2.4 Demostrar que la propiedad asociativa de la suma de enteros es consecuencia de la propiedad homónima para los naturales.

2.5 Demostrar que el entero opuesto de $\{\{(a,b)\}\}$ es $\{\{(b,a)\}\}$.

2.6 Formar los opuestos de los enteros siguientes:

$$\{\{(2,9)\}\}, \quad 16, \quad \{\{(5,5)\}\}, \quad -7$$

2.7 ¿Cuál es el entero

$$-(-r)$$

es decir, el opuesto del opuesto del entero r? Interprete gráficamene los enteros opuestos sobre la figura 1.1.

De las propiedades anteriores sigue el siguiente

- TEOREMA 2.2: *$(Z, +)$ es un grupo conmutativo.*
- DEFINICIÓN 2.2: *Sustracción:*

$$\boxed{r-s=t} \underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \boxed{t+s=r} \qquad r,s,t \in Z$$

- PROPOSICIÓN 2.3:

$$\boxed{r-s=r+(-s)}$$

es decir, *para restar enteros se suma con el opuesto.*

Demostración:

$$r-s=t \underset{\text{def}}{\iff} t+s=r$$
$$\Downarrow$$
$$(t+s)+(-s)=r+(-s)$$
$$\Downarrow$$
$$t+[s+(-s)]=r+(-s)$$
$$\Downarrow$$
$$t+0=r+(-s)$$
$$\Downarrow$$
$$t=r+(-s)$$

Obsérvese que el símbolo $-$ se utiliza para dos fines distintos, como signo convencional para designar la operación de sustracción y para designar el opuesto de un elemento. La proposición 2.3 justifica tal empleo doble del signo $-$.

• PROPOSICIÓN 2.4:

$$\boxed{-(r+s)=(-r)+(-s)} \qquad \forall\, r, s \in Z$$

es decir, el opuesto de una suma es la suma de los opuestos de los sumandos.

Demostración: Designemos por x al opuesto de $r+s$. Luego

$$(r+s)+x=0$$
$$\Downarrow$$
$$(-r)+[(r+s)+x]=(-r)+0$$
$$\Downarrow$$
$$((-r)+(r+s))+x=-r$$
$$\Downarrow$$
$$([(-r)+r]+s)+x=-r$$
$$\Downarrow$$
$$(0+s)+x=-r$$
$$\Downarrow$$
$$s+x=-r$$
$$\Downarrow$$
$$(-s)+(s+x)=(-s)+(-r)$$
$$\Downarrow$$
$$[(-s)+s]+x=(-s)+(-r)$$
$$\Downarrow$$
$$0+x=(-s)+(-r)$$
$$\Downarrow$$
$$x=(-s)+(-r)$$
$$\Downarrow$$
$$x=(-r)+(-s)$$

LEY CANCELATIVA de la suma de enteros

$$\boxed{r+t=s+t} \Longrightarrow \boxed{r=s} \qquad \forall\, r, s, t \in Z$$

Demostración: Basta sumar $-t$ a los dos miembros de la primera igualdad, para obtener la segunda.

EJERCICIOS

2.8 Con el resultado del ejercicio 2.7 y las proposiciones 2.3 y 2.4, demostrar que las cinco propiedades de la sustracción de naturales, estudiadas en el párrafo 8 del § 9, son también ciertas para la sustracción de enteros.

2.9 Despejar x en la ecuación

$$r+x+s=t; \qquad r, s, t \in Z$$

Razónese como en la demostración de las dos proposiciones anteriores.

El proceso que se ha seguido para pasar del semigrupo $(N, +)$ al grupo $(Z, +)$ es general, es decir, se puede aplicar a cualquier semigrupo (*). Por tanto, dado un semigrupo se puede construir un grupo tal que al semigrupo de partida se le pueda considerar como subsemigrupo del grupo construido a partir de él. Se consigue así que cada elemento tenga un simétrico, por lo que al proceso se le llama de *simetrización* del semigrupo. En el grupo construido se puede ya efectuar siempre la operación inversa de la operación del semigrupo. Así, en el caso del semigrupo $(N, +)$, al simetrizar, pasando al grupo $(Z, +)$, se consigue poder efectuar siempre la sustracción (operación inversa de la suma) como se vio en la proposición 2.3.

• PROPOSICIÓN 2.5: *La aplicación $g \circ f$ de la figura* 1.3 *es un homomorfismo del semigrupo $(N, +)$ en el $(Z, +)$.*

Demostración: Sigue directamente del ejercicio 2.1.

De otro modo: Sean $m, n \in N$. Basta razonar como indica la figura 2.2.

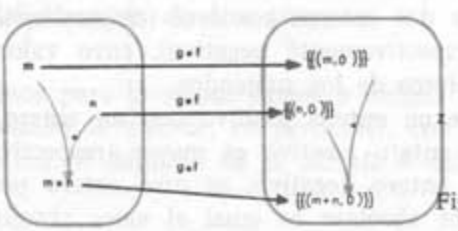


Figura 2.2

(*) Se supone que en el semigrupo se verifica la ley cancelativa, como ocurre en $(N, +)$, es decir, se supone que el semigrupo es cancelativo.

EJERCICIO

2.10 ¿Es correcto decir que $g \circ f$ es un isomorfismo del semigrupo $(N, +)$ en el $(Z_+, +)$?

• DEFINICIÓN 2.3: *Dado un número entero r, si su representante canónico es (p, 0), se llama valor absoluto de r al número natural p.* En cambio, *si el representante canónico del número entero r es (0, q), se llama valor absoluto de r al número natural q.*

• EJEMPLOS: El representante canónico del entero $\{\{(7, 2)\}\}$ es (5, 0), luego su valor absoluto es el número natural 5. El representante canónico del número entero -3 es (0, 3), luego su valor absoluto es 3.

Notación: El valor absoluto del entero r se representa por $|r|$.

• EJEMPLOS: $|-12|=12$; $|9|=9$.

EJERCICIOS

2.11 Calcular el valor absoluto de cada uno de los enteros siguientes:

$$-14;\ 7;\ \{\{(13, 15)\}\};\ -2;\ \{\{(4, 4)\}\}$$

2.12 Se habrá observado que el valor absoluto es una aplicación

$$Z \to N$$

¿Es la aplicación valor absoluto **un homomorfismo del semigrupo $(Z, +)$ en el semigrupo $(N, +)$?**

2.13. Demostrar que

$$|r|=0 \iff r=0; \qquad \forall r \in Z$$

REGLAS DE SIGNOS:

1.ª La suma de dos enteros positivos (respectivamente negativos) es otro entero positivo (respectivamente negativo), cuyo valor absoluto es la suma de los valores absolutos de los sumandos.

2.ª La suma de un entero positivo con un entero negativo, tales que el valor absoluto del entero positivo es mayor (respectivamente menor) que el valor absoluto del entero negativo, es otro entero positivo (respectivamente negativo) cuyo valor absoluto es igual al valor absoluto del entero positivo menos el valor absoluto del entero negativo (respectivamente al revés).

Demostración de la afirmación entre paréntesis de la segunda regla de signos: Sea r un entero positivo y s un entero negativo. Tomando representantes canónicos:

$$r=\{\{(p, 0)\}\} \qquad s=\{\{(0, q)\}\}$$

luego

$$|r|=p \quad \text{y} \quad |s|=q$$

supongamos que sea

$$|r|<|s|$$

lo que, por la definición 2.3, equivale a afirmar que

$$p<q$$

luego

$$q-\text{p} \in N; \qquad q-p \neq 0$$

sea

$$m=q-p \neq 0$$

será

$$r+s=\{\{(p, 0)\}\}+\{\{(0, q)\}\}=\{\{(p+0,\ 0+q)\}\}=\{\{(p, q)\}\}=$$
$$=\{\{(p-p,\ q-p)\}\}=\{\{(0, m)\}\}$$

que es un entero negativo, siendo además

$$|r+s|=|\{\{(0, m)\}\}|=m=q-p=|s|-|r|$$

EJERCICIO

2.14 Demostrar las restantes reglas anteriores.

---

3. Semigrupo multiplicativo de los enteros

Lo mismo que hicimos para la suma, vamos a definir el producto de enteros, de modo que, cuando se efectúe, en particular, con naturales, coincida con el producto de naturales, definido en el párrafo 4 del § 9.

EJERCICIO

3.1 Demostrar que, dados los números naturales, a, b, c y d, tales que $b \leqslant a$ y $d \leqslant c$, se verifica

$$(a-b)\,(c-d)=(ac+bd)-(ad+bc)$$

Teniendo en cuenta lo dicho al principio del párrafo 2, el resultado del ejercicio 3.1 puede expresarse en la forma

$$\{\{(a, b)\}\}\cdot\{\{(c, d)\}\}=\{\{(ac+bd,\ ad+bc)\}\}$$

donde

$$b \leqslant a \quad \text{y} \quad d \leqslant c$$

Generalicemos el resultado anterior para el caso de que los enteros considerados sean cualesquiera, incluso negativos.

• EJEMPLO 3.1: Para multiplicar los enteros 2 y -5 tomemos un representante de cada clase, como se indica en el esquema de la figura 3.1. Formemos a partir de estas dos parejas otra pareja, aplicando el resultado obtenido anteriormente:

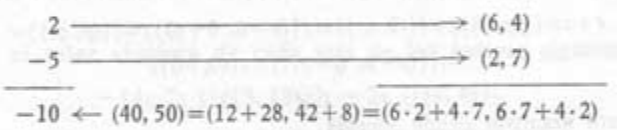


Figura 3.1

$$\left.\begin{matrix}(a, b)\\(c, d)\end{matrix}\right\} \longrightarrow (ac+bd,\ ad+bc)$$

para el caso de ser $b \leqslant a$ y $d \leqslant c$. Se obtiene así, en nuestro ejemplo, la pareja (40, 50), que pertenece a la clase -10. Por ello diremos que el producto de enteros 2 y -5 es -10 y escribimos

$$2\cdot(-5)=-10$$

EJERCICIO

3.2 Repita el ejemplo 3.1 tomando un representante de la clase 2, distinto del (6, 4) y otro de la clase -5, distinto del (2, 7). ¿Se llega así al mismo resultado -10?

El ejercicio anterior se generaliza así:

• PROPOSICIÓN 3.1:

$$\left.\begin{array}{l}(a,b)\sim(a',b')\\(c,d)\sim(c',d')\end{array}\right\}\Longrightarrow (ac+bd,\ ad+bc)\sim(a'c'+b'd',\ a'd'+b'c')$$

EJERCICIO

3.3 Demostrar la proposición anterior.

• DEFINICIÓN 3.1: *Dados dos números enteros, r y s, si (a, b) es un representante de r y (c, d) lo es de s, se llama producto de r y s al entero*

$$\{\{(ac+bd,\ ad+bc)\}\}$$

Esquemáticamente:

$$\begin{array}{rl} r & \longrightarrow (a,b)\\ s & \longrightarrow (c,d)\\ \hline r\cdot s & \longleftarrow \overline{(ac+bd,\ ad+bc)}\end{array}$$

Como $r\cdot s$ no depende de los representantes elegidos, según muestra la proposición 3.1, la multiplicación de enteros es una operación interna.

Estudiemos las propiedades del producto de enteros:

PROPIEDAD UNIFORME

$$\left.\begin{array}{l}r=r'\\s=s'\end{array}\right\}\Longrightarrow rs=r's'$$

PROPIEDAD CONMUTATIVA

$$\boxed{rs=sr}\qquad \forall\, r,s\in Z$$

PROPIEDAD ASOCIATIVA

$$\boxed{(rs)t=r(st)}\qquad \forall\, r,s,t\in Z$$

EXISTENCIA DE ELEMENTO UNIDAD

$$\boxed{1\cdot r=r}$$ cualquiera que sea el entero r.

Demostración: Sea (a, b) un representante de la clase r. El representante canónico de la clase 1 es $(1, 0)$. Se tiene

$$1 \cdot r = \{\{(1, 0)\}\} \cdot \{\{(a, b)\}\} = \{\{(1 \cdot a + 0 \cdot b,$$

EJERCICIOS

3.4 Demostrar la uniformidad, conmutatividad y asociatividad del producto de enteros.

3.5 Escribir la propiedad de existencia de elemento unidad del producto de enteros, haciendo uso de los cuantificadores.

De las propiedades anteriores se deduce el siguiente

• TEOREMA 3.2: *$(Z, \cdot)$ es un semigrupo conmutativo y con elemento neutro.*

PRODUCTO POR CERO

$$\boxed{0 \cdot r = 0} \qquad \forall\, r \in Z$$

EJERCICIO

3.6 Demostrar la proposición anterior aplicando la definición 3.1.

• PROPOSICIÓN 3.3: *La aplicación $g \circ f$ de la figura* 1.3 *es un homomorfismo del semigrupo $(N, \cdot)$ en el $(Z, \cdot)$.*

Demostración: Sigue directamente del ejercicio 3.1.

La proposición 3.3 puede también enunciarse diciendo que los semigrupos $(N, \cdot)$ y $(Z_+, \cdot)$ son isomorfos.

EJERCICIO

3.7 Demostrar la proposición 3.3 de otro modo, utilizando un esquema similar al de la figura 2.2.

• PROPOSICIÓN 3.4: *La aplicación valor absoluto es un homomorfismo del semigrupo* $(Z, \cdot)$ *en el* $(N, \cdot)$, es decir

$$|r \cdot s| = |r| \cdot |s| ; \qquad \forall\, r, s \in Z$$

REGLAS DE SIGNOS

1.ª El producto de dos enteros positivos (o de dos negativos) es un entero positivo.

2.ª El producto de un entero positivo por un negativo es un entero negativo.

Demostración de la segunda:
Sea r un entero positivo y $(p, 0)$ su representante canónico.
Sea s un entero negativo y $(0, q)$ su representante canónico.

$$r \cdot s = \{\{(p \cdot 0)\}\} \cdot \{\{(0, q)\}\} = \{\{(p \cdot 0 + 0 \cdot q,\ p \cdot q + 0 \cdot 0)\}\} = \{\{(0, pq)\}\}$$

que es negativo, ya que el natural pq es distinto de cero, por serlo p y q.

EJERCICIO

3.8 Demostrar la regla 1.ª).

---

4. Anillo de los números enteros

PROPIEDAD DISTRIBUTIVA del producto respecto de la suma de enteros

$$\boxed{r \cdot (s + t) = r \cdot s + r \cdot t} \qquad \forall\, r, s, t \in Z$$

EJERCICIOS

4.1 Demostrar la propiedad anterior utilizando las definiciones 2.1 y 3.1.

4.2 Demostrar que el producto es distributivo respecto de la diferencia de enteros.

• TEOREMA 4.1: $(Z, +, \cdot)$ *es un anillo conmutativo y con elemento unidad.*

Demostración: Basta tener en cuenta las definiciones 8.1, 8.2 y 8.3 del § 5, los teoremas 2.2 y 3.2 de este § y la propiedad distributiva del producto respecto de la suma de enteros.

• PROPOSICIÓN 4.2: *Si el producto de dos enteros, r y s, es cero, uno de ellos, al menos, es nulo,* es decir,

$$\boxed{r \cdot s = 0} \Longrightarrow \boxed{r = 0 \quad \text{o bien} \quad s = 0}$$

Demostración: Sean $r, s \in Z$

$$r \cdot s = 0 \Longrightarrow |r \cdot s| = 0$$

Proposición 3.4 ⇓

$$|r| \cdot |s| = 0$$

Proposición 8.1 del § 9 ⇓

$$\boxed{|r| = 0 \quad \text{o bien} \quad |s| = 0}$$

⇓ ejercicio 2.12

$$\boxed{r = 0 \quad \text{o bien} \quad s = 0}$$

Otra demostración es la indicada en el párrafo 9 del § 9, también válida para enteros.

EJERCICIO

4.3 Demostrar que la proposición 4.2 se puede también enunciar diciendo el producto de dos enteros distintos de cero es distinto de cero **(contrarrecíproco, véase párrafo 7 del § 6).**

• DEFINICIÓN 4.1: *Los anillos conmutativos, en que el producto de dos elementos distintos de cero es distinto de cero, se llaman anillos de integridad.*

• DEFINICIÓN 4.2: *Los anillos de integridad que además tienen elemento unidad se llaman dominios de integridad.*

De donde sigue

• PROPOSICIÓN 4.3: *$(Z, +, \cdot)$ es un dominio de integridad.*

EJERCICIO

4.4 ¿Es de integridad el anillo $[\mathcal{P}(E), \triangle, \cap]$, considerado en el ejemplo 8.2 del § 5?

LEY CANCELATIVA DEL PRODUCTO de enteros

$$\left.\begin{array}{l} r\cdot t = s\cdot t \\ t \neq 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow r = s \qquad \forall\, r, s, t \in Z$$

EJERCICIOS

4.5 Demostrar que la ley cancelativa del producto, que se acaba de enunciar, es consecuencia de la proposición 4.2. Razónese como en el párrafo 9 del § 9 se hizo para la ley cancelativa del producto de naturales.

4.6 Demostrar que la proposición 4.2 es consecuencia de la ley cancelativa del producto.

La ley cancelativa o simplificativa se puede también enunciar diciendo que todos los enteros, excepto el cero, son *regulares* respecto del producto, como se indicó en el párrafo 9, para la ley cancelativa de la suma.

Del ejercicio 2.10 y la proposición 3.3 se deduce que el semianillo $(N, +, \cdot)$ de los naturales es isomorfo al semianillo $(Z_+, +, \cdot)$, por lo que se identifican en la práctica, es decir, no se hace distinción entre el natural n y el entero $\{\{(n, 0)\}\}$.

5. Ordenación de enteros

El subconjunto Z_+ del conjunto Z, considerado al final del párrafo 1, es un semigrupo aditivo con elemento neutro, isomorfo al semigrupo $(N, +)$, según se vio en el ejercicio 2.10.

EJERCICIO

5.1 Probar que el conjunto de los enteros negativos posee estructura de semigrupo respecto de la suma. ¿Es grupo este semigrupo? ¿Es cerrado respecto del producto el conjunto de los enteros negativos?

• DEFINICIÓN 5.1: *Diremos que el entero r es menor o igual que el entero s, y escribiremos*

$$r \leqslant s$$

si la diferencia

$$s - r \in Z_+$$

es decir, si la diferencia

$$s-r\in N$$

ya que hemos identificado Z_+ con N.

Abreviadamente:

$$\boxed{r\leqslant s} \underset{\text{def}}{\iff} \boxed{s-r\in N} \qquad r,s\in Z$$

• EJEMPLOS:

$$\begin{aligned}
2\leqslant 5,&\quad \text{pues}\quad 5-2=3\in N\\
(-2)\leqslant 1,&\quad \text{pues}\quad 1-(-2)=1+2=3\in Z_+\\
(-6)\leqslant(-2),&\quad \text{pues}\quad (-2)-(-6)=(-2)+6=4\in N\\
(-1)\leqslant(-1),&\quad \text{pues}\quad (-1)-(-1)=(-1)+1=0\in Z_+
\end{aligned}$$

EJERCICIOS

5.2 Comparar, mediante la relación $\leqslant$, los enteros que se indican:

a) -7 y -2;
b) $\{\{(5,2)\}\}$ y -4;
c) $\{\{(3,7)\}\}$ y -4.

5.3 Demostrar que si r es un entero negativo y $s\in Z_+$, entonces

$$r\leqslant s$$

5.4 Utilizando la proposición 2.3 y la asociatividad de la suma, probar que

$$(r-s)+(s-t)=r-t \qquad \forall\, r,s,t\in Z$$

• PROPOSICIÓN 5.1: *La relación $\leqslant$, entre números enteros, es una relación de orden.*

Demostración de la transitividad:

EJERCICIO

5.5 Demostrar la reflexividad y simetría de la relación $\leqslant$ entre números enteros.

• PROPOSICIÓN 5.2: *La relación $\leqslant$, ordena totalmente a los números enteros.*

EJERCICIO

5.6 Demostrar la proposición 5.2 ayudándose del ejercicio 5.3.

• PROPOSICIÓN 5.3: *La relación $\leqslant$, entre números enteros, es compatible con la suma,* es decir,

$$\left.\begin{array}{l} r \leqslant t \\ s \leqslant u \end{array}\right\} \Longrightarrow r+s \leqslant t+u$$

EJERCICIOS

5.7 La demostración de la proposición 5.3 es muy parecida a la de la proposición 5.1. Hágala.

5.8 Ponga un contraejemplo para probar que la relación $\leqslant$, entre números enteros, no es compatible con el producto.

Como la relación de orden total $\leqslant$ es compatible con la suma de enteros, diremos que el *anillo* $(Z, +, \cdot)$ *está totalmente ordenado por esa relación.*

EJERCICIOS

5.9 ¿Es compatible con la $\cup$ la relación de inclusión en el conjunto $\mathcal{P}(E)$? Para expresar este resultado, ¿qué dirá del semigrupo $[\mathcal{P}(E), \cup]$?

5.10 ¿Es compatible con $\triangle$ la relación de inclusión en el conjunto $\mathcal{P}(E)$? Para expresar este resultado, ¿qué dirá del anillo $[\mathcal{P}(E), \triangle, \cap]$?

6. Sobre la introducción de los enteros en la Escuela Primaria; procedimientos

Al pasar de los números naturales a los enteros, se ha pasado del semigrupo $(N, +)$ al grupo $(Z, +)$, para poder efectuar en todo caso la operación inversa de la adición, es decir, la sustracción. En cuanto a la multiplicación, el anillo de los enteros tiene propiedades similares al semianillo de los naturales.

Algunos psicólogos, interesados en la enseñanza de la Matemática Elemental, opinan hoy que el niño pequeño está capacitado psicológicamente para manejar la estructura de semigrupo, pero las estructuras de grupo requieren una edad mental de unos *doce años*. Según este criterio, los números enteros no deben ser introducidos antes de esta edad.

El camino natural para introducir los números enteros es el utilizado en el párrafo 1, como clases de parejas. Interesará buscar *situaciones* que resulten familiares al alumno para la introducción de tales parejas y de la relación de equivalencia entre ellas, que da lugar a la partición, cuyas clases son los números enteros. Una de estas situaciones se describe a continuación. Si un niño jugando a canica obtiene

Canicas ganadas	*Canicas perdidas*
8	3

este resultado le lleva a la consideración de la pareja

(8, 3)

Preguntas como la siguiente: *¿si el resultado hubiera sido* (7, 2), *te sentirías más contento?*, pueden llevar a establecer la relación de equivalencia deseada. Para introducir la suma, podría considerarse, por ejemplo, la situación siguiente

	Canicas ganadas	*Canicas perdidas*
Primera partida	8	3
Segunda partida	2	4
TOTAL	8+2	3+4

Entre otras muchas posibles situaciones, que llevan al niño a la consideración de parejas de naturales para introducir el concepto de entero, citemos las siguientes:

a) *dinero que me dan y dinero que gasto;*
b) *partidos ganados y perdidos por mi equipo favorito;*
c) *parejas de regletas.*

La consideración de la figura 1.1 permite visualizar intuitivamente el conjunto de los enteros, que aparecen materializados por dos rectas simétricas respecto de la bisectriz del ángulo recto formado por los ejes de coordenadas.

La representación gráfica de los enteros, hecha en la figura 6.1, puede aclarar ideas

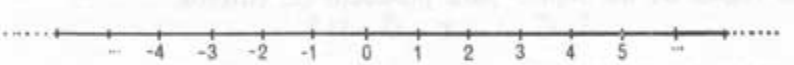


Figura 6.1

Figura 6.2

Otro procedimiento, más tradicional, para introducir el concepto de los números negativos surge de la consideración de dos posibles *cualidades* en los números naturales. Muchas son las situaciones que pueden presentarse en tal sentido. Por ejemplo, la temperatura (figura 6.2). No basta decir «estamos a cuatro grados centígrados». Es necesario especificar una cualidad, si se trata de bajo o sobre cero. Se conviene en tomar como negativos a los grados bajo cero, escribiéndolos precedidos del signo $-$. Así:

4 significará sobre cero, y
-4 significará bajo cero.

Entre otras muchas situaciones que pueden conducir a la consideración de dos posibles cualidades en los números citemos la posibilidad de que un móvil que parte de un punto fijo de la carretera vaya en uno u otro sentido (figura 6.3) o el socorrido ejemplo de la escalera, que sugiere la figura 6.4.

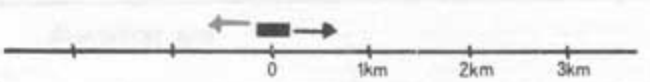


Figura 6.3

Figura 6.4

A partir de cualquiera de estas situaciones las reglas de signos para la suma son obtenidas con facilidad, así como las reglas de cambios de signos:

$$-(-a)=a$$
$$-(a+b)=(-a)+(-b)$$

En cuanto a la multiplicación de enteros puede definirse, en primer lugar, el producto de un natural por un entero negativo:

$$3\cdot(-5)=(-5)+(-5)+(-5)=-(5+5+5)=-(5\cdot 3)$$

sugerido por el teorema 9.2 del § 9. Se tiene así

$$a\cdot(-b)=-(a\cdot b)=(-a)\cdot b$$

de donde se deduce inmediatamente el producto de dos enteros negativos y, por tanto, las reglas de los signos para producto de enteros.

7. La relación de divisibilidad en Z

En el párrafo 10 del § 9 hemos visto que la relación $|$, entre números naturales, es una relación de orden parcial. Vamos a extender esta relación al conjunto Z de los enteros.

• DEFINICIÓN 7.1:

$$\boxed{r \mid s} \underset{\text{def}}{\iff} \boxed{\exists\, t \in Z;\ tr=s}, \quad \text{donde} \quad r, s \in Z$$

• EJEMPLOS:

$$\begin{aligned}
5 \mid 10, &\quad \text{pues} \quad 2\cdot 5=10\\
(-2) \mid 6, &\quad \text{pues} \quad (-3)\cdot(-2)=6\\
4 \mid (-12), &\quad \text{pues} \quad (-3)\cdot 4=-12\\
(-3) \mid (-15), &\quad \text{pues} \quad 5\cdot(-3)=-15\\
7 \mid (-7), &\quad \text{pues} \quad (-1)\cdot 7=-7\\
(-7) \mid 7, &\quad \text{pues} \quad (-1)\cdot(-7)=7
\end{aligned}$$

• PROPOSICIÓN 7.1: *La relación $|$, entre números enteros, es reflexiva y transitiva.*

EJERCICIOS

7.1 Demostrar la proposición 7.1 (véase la demostración de la proposición 10.2 del § 9).

7.2 **¿Es antisimétrica la relación $|$, entre números enteros? Observe los dos últimos ejemplos anteriores. ¿Es la relación $|$ de orden, entre números enteros? ¿Es simétrica?**

7.3 **Demostrar que los únicos enteros que poseen inverso (simétrico respecto del producto) son 1 y -1. Téngase en cuenta que**

$$r \cdot s = 1 \implies |r| \cdot |s| = 1$$

7.4 **Demostrar que el conjunto**

$$E = \{1, -1\}$$

de los enteros que poseen inverso, es un grupo multiplicativo.

• EJEMPLO: En los dos últimos ejemplos anteriores se observa que

$$7 \mid (-7) \quad \text{y} \quad (-7) \mid 7$$

es decir, cada uno de estos dos números, 7 y -7, divide al otro. Por ello decimos que 7 y -7 son *asociados* y escribimos

$$7 \ as \ (-7)$$

Análogamente

$$(-3) \ as \ 3; \quad 1 \ as \ (-1); \quad 45 \ as \ (-45)$$

• DEFINICIÓN 7.2: *Dos enteros, r y s, se dicen asociados, si cada uno de ellos divide al otro.* Para expresar que los enteros r y s son asociados se escribe:

$$r \text{ as } s$$

Abreviadamente:

$$r \text{ as } s \underset{\text{def}}{\iff} \begin{cases} r \mid s \\ s \mid r \end{cases}$$

EJERCICIO

7.5 **Si e es un entero invertible (ejercicio 7.4), es decir, si**

$$e \in E = \{1, -1\} \subset \mathbf{Z}$$

demostrar que

$$\boxed{er = s} \implies \boxed{r \text{ as } s} \qquad r, s \in \mathbf{Z}$$

• PROPOSICIÓN 7.2:

$$\boxed{r \text{ as } s} \Longrightarrow \boxed{\exists e \in E=\{1,-1\};\quad er=s}$$

Demostración:

Primer caso: $r \neq 0$.

$$r \text{ as } s \underset{\text{def. 7.2}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} r \mid s \underset{\text{def. 7.1}}{\Longleftrightarrow} \exists\, e \in Z;\ er=s \\ \qquad\qquad \downarrow \text{ sustituyendo} \\ s \mid r \underset{\text{def. 7.1}}{\Longleftrightarrow} \exists\, g \in Z;\ gs=r \Longrightarrow g(er)=r \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$(ge)r=1 \cdot r$$

ley cancelativa del producto $\Downarrow$

$$ge=1$$

ejercicio 7.3 $\Downarrow$

$$\boxed{e=1,\ \text{o bien}\ \ e=-1}$$

Segundo caso: $r=0$.

Sigue de que $1 \cdot 0=0$.

EJERCICIOS

7.6 ¿Cuáles son los enteros asociados con 0? ¿Cuáles son los enteros asociados con −5?

7.7 Demostrar que

$$e \in E=\{1,1\} \Longrightarrow e \mid r;\ \forall\, r \in Z$$

Del ejercicio 7.5 y la proposición 7.2 sigue

• TEOREMA 7.3:

$$\boxed{r \text{ as } s} \Longleftrightarrow \boxed{\exists\, e \in \{1,-1\};\quad er=s}$$

• PROPOSICIÓN 7.4: *La relación as, entre números enteros, es de equivalencia.*

Demostración de la transitividad (la reflexividad y simetría son triviales):

Esta relación de equivalencia produce una clasificación en el conjunto Z, que se esquematiza en la figura 7.1.

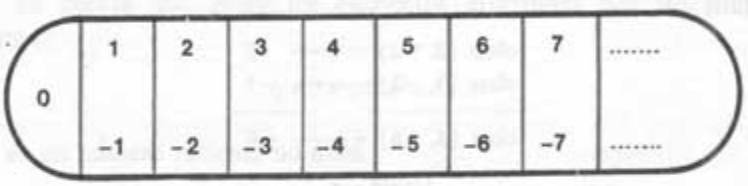


Figura 7.1

El conjunto de las clases será el conjunto cociente

$$Z/as$$

La aplicación

$$N \xrightarrow{\ i\ } Z/as$$

que asocia a cada número natural n la clase que contiene al entero n, es evidentemente una biyección.

EJERCICIOS

7.8 En el conjunto Z, de los enteros, se considera la relación R siguiente

$$s\,R\,t \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} |s| = |t|; \qquad \forall\, r, s \in Z$$

Demostrar que R es una relación de equivalencia.

7.9 Compare el ejercicio anterior con el ejercicio 3.4 del § 4.

7.10 Compare la clasificación producida por la relación de equivalencia del ejercicio 7.8 con la clasificación producida por la relación as, esquematizada en la figura 7.1.

7.11 El resultado del ejercicio anterior es consecuencia de que

$$r \text{ as } s \iff |r| = |s|$$

Demuestre que esta equivalencia sigue del teorema 7.3.

7.12 Demuestre que la relación | es compatible con el producto de enteros (véase proposición 7.10 del § 9).

En el conjunto Z/as (figura 7.1) se puede definir el producto de clases, tomando representantes de cada clase, multiplicándolos (pues son enteros) y pasando a la clase del producto obtenido, como se indica en el esquema de la figura 7.2.

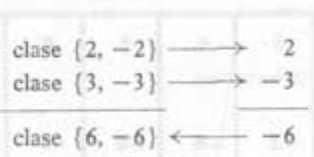


Figura 7.2

El ejercicio 7.12 permite asegurar que el resultado obtenido no depende de los representantes elegidos de cada clase.

Obsérvese que el procedimiento seguido para definir el producto en Z/as ha sido ya utilizado en la suma de enteros y en otras ocasiones. El procedimiento se puede generalizar diciendo: si en un conjunto está definida una operación, compatible con una relación de equivalencia entre sus elementos, en el conjunto cociente, respecto de la relación de equivalencia, se tiene, de forma natural, una operación, inducida por la operación del conjunto de partida.

Dicho en otras palabras, el producto en Z/as ha sido definido de modo que la aplicación anteriormente citada sea un isomorfismo.

$$i : N \longrightarrow Z/as$$

Si se define ahora la relación |, entre las clases (elementos de Z/as), como es habitual:

$$x \mid y \underset{\text{def}}{\iff} \exists\, v \in Z/as; \qquad v \cdot x = y$$

donde $x,\ y \in Z/as$, es inmediato verificar que esta relación entre las clases de Z/as es de orden parcial.

En la práctica, en vez de utilizar las clases, lo que se hace es tomar un representante de cada clase, es decir, considerar, por ejemplo, el conjunto:

$$\{0,\ 1,\ -2,\ 3,\ -4,\ 5,\ -6,\ 7,\ -8,\ 9,\ -10,\ 11,\ \ldots\}$$

Pero también N es un conjunto que verifica tal condición.

En resumen, el tratar de hacer que la relación $|$ entre números enteros sea de orden, nos ha llevado a considerar de nuevo la divisibilidad en N. En otras palabras, a efectos de divisibilidad dos enteros opuestos se pueden considerar como el mismo número, ya que

$$r \mid s \iff (-r) \mid s \iff (-r) \mid (-s) \iff r \mid (-s)$$

Todo lo dicho hasta ahora para la divisibilidad en Z se extiende inmediatamente a cualquier otro dominio de integridad, sin más que sustituir el conjunto $\{1, -1\}$ por el conjunto de *elementos invertibles* en ese otro dominio de integridad.

Así, por ejemplo, en el anillo de polinomios en una indeterminada, cuyos coeficientes son números racionales, es válido todo lo dicho en este párrafo, teniendo en cuenta que ahora los elementos invertibles son los polinomios de la forma:

$$q + 0x + 0x^2 + \ldots$$

donde q es un número racional no nulo.

8. Factorización

• EJEMPLO 8.1: Consideremos el entero 5. Sus divisores son:

$$1, -1, 5, -5$$

es decir, sus únicos divisores son sus asociados, -5 y 5, y los invertibles, 1 y -1, que dividen a todos los enteros, según se vio en el ejercicio 7.7. Por ello diremos que el entero 5 es *primo.*

• EJEMPLO 8.2: Los divisores del entero 6 son:

$$1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6$$

es decir, 6 posee otros divisores, además de sus asociados 6 y -6 y los invertibles 1 y -1. A estos divisores de 6, que no son asociados de 6, ni invertibles, les llamaremos *divisores propios* de 6.

• DEFINICIÓN 8.1: *A los divisores de un número entero, distintos de sus asociados e invertibles, se les llama divisores propios de ese número. Si un número entero no es invertible y no posee divisores propios se dice que es un número primo. A los números enteros distintos de cero que no son primos ni invertibles se les llama números compuestos.*

EJERCICIOS

8.1 Buscar los divisores propios de cada uno de los enteros siguientes:

$$-4,\ 7,\ -1,\ 3,\ -10,\ 0,\ 18,\ 40$$

y decidir si son primos.

8.2 Estudiar si es correcta la siguiente definición: número entero primo es aquel que posee cuatro divisores únicamente.

8.3 Si los enteros p y q son ambos primos, probar que

$$\boxed{p \mid q} \Longrightarrow \boxed{p=q, \text{ o bien } p=-q}$$

• PROPOSICIÓN 8.1: *Dado un número entero, distinto de* 1, *existe un número primo que lo divide.*

Abreviadamente:

$$\boxed{r \in Z;\quad r \neq 1} \Longrightarrow \boxed{\exists\, p \text{ primo};\quad p \mid r}$$

Demostración:

Primer caso: sea $r \neq 0$.

Designemos por

$$div \cdot prop\ (r)$$

al conjunto de los divisores propios de r.

Ejemplo: $r=6$

$$div \cdot prop\ (6)=\{2,\ -2,\ 3,\ -3\}$$

Si

$$div \cdot prop\ (r)=\varnothing$$

entonces, por la definición 8.1

$$r \text{ es primo}$$

Ejemplo: $r=11$

$$div \cdot prop\ (11)=\varnothing$$

luego ya tenemos un primo que divide a 11, el mismo número 11.

Si

$$r \text{ es compuesto}$$

entonces

$$div \cdot prop\ (r) \neq \varnothing$$

Llamemos entonces

$$div \cdot prop \cdot nat\ (r)$$

Ejemplo: $r=12$

$$div \cdot prop\ (12)=$$
$$=\{2,\ -2,\ 3,\ -3,\ 4,\ -4,\ 6,\ -6\}$$

$$div \cdot prop \cdot nat\ (12)=\{2, 3, 4, 6\}$$

$$2 \leqslant 3 \leqslant 4 \leqslant 6$$

$$2=\text{mínimo } \{2, 3, 4, 6\}$$

al conjunto de los divisores propios naturales de r. Como N es un conjunto totalmente ordenado por la relación $\leqslant$, el conjunto

$$div \cdot prop \cdot nat\ (r)$$

estará también totalmente ordenado por la relación $\leqslant$. Sea q el menor de los números del conjunto

$$div \cdot prop \cdot nat\ (r)$$

Para demostrar que q es primo, razonemos por reducción al absurdo, como se indicó en el párrafo 7 del § 6.

Si q no fuera primo, admitiría divisores propios naturales, que serían menores que q. Si d fuera uno de tales divisores

$$\left.\begin{array}{l} d \mid q \\ q \mid r \end{array}\right\} \Longrightarrow d \mid r$$

d sería un divisor propio natural de r, menor que q, contra la hipótesis de que q era el menor.

Segundo caso: Si $r=0$, entonces $2 \mid r$ y 2 es primo.

EJERCICIOS

8.4 Comprobar lo afirmado en la proposición anterior, con los números:

117, 167, 207

8.5 Intente dar un criterio para decidir si un número r es primo. Observe que, como consecuencia de la proposición 8.1, si un número natural n, compuesto, divide a r, entonces existe un número natural primo, menor que n, divisor de r.

8.6 Demostrar que el conjunto de los números primos es infinito. Para ello téngase en cuenta que dado un número natural primo p, el

$$p!+1$$

posee un divisor primo mayor que p, como consecuencia de la proposición 8.1 y de la definición de división entera de naturales.

8.7 Buscar los números primos menores que 120.

• EJEMPLO 8.3: El número entero -2100 puede expresarse como producto de números enteros primos:

$$2 \times 2 \times (-3) \times 5 \times (-5) \times (-7) = -2100$$

a lo que llamaremos una *descomposición del número* -2100 *en producto de factores primos,* o bien una *factorización prima de* -2100.

• EJEMPLO 8.4: El número entero -60 admite varias factorizaciones primas distintas:

$$2\times(-2)\times 3\times 5;\quad 2\times 2\times(-3)\times 5;\quad 2\times 2\times 3\times(-5);$$
$$2\times(-2)\times(-3)\times(-5)$$

• EJEMPLO 8.5: El número natural 12 sólo admite una única factorización en naturales primos, ya que las factorizaciones:

$$2\times 2\times 3;\quad 2\times 3\times 2;\quad 3\times 2\times 2$$

son la misma, por la conmutatividad del producto.

EJERCICIO

8.8 Expresar el número entero -60 como producto de un entero invertible y primos naturales.

• DEFINICIÓN 8.2: *Se llama factorización prima de un número compuesto n a toda expresión de n como producto de primos.*

EJERCICIOS

8.9 Efectuar factorizaciones primas de los siguientes números naturales:

18, 30, 7, 100, 48, 28, 52

8.10 ¿Pueden efectuarse factorizaciones primas de 0 y 1?

• PROPOSICIÓN 8.2: *Todos los números naturales compuestos pueden expresarse como producto de factores primos naturales.*

Demostración: Sea $n \in N$.

Si n es compuesto, entonces, por la proposición 8.1, existe un primo natural p_1, tal que $p_1|n$. Será, pues,

$$n = p_1 \cdot n_1$$

siendo $n_1|n$, según se vio en el ejercicio 10.21 del § 9. Si n_1 es primo, entonces ya tenemos una factorización prima de n.

Si n_1 es compuesto, existirá un primo natural p_2, tal que $p_2 | n_1$, luego

$$n_1 = p_2 \cdot n_2$$

siendo $n_2 < n_1$. Si n_2 es primo, ya tenemos una factorización prima:

$$n = p_1 \cdot n_1 = p_1 \cdot p_2 \cdot n_2$$

Si n_2 es compuesto, se continúa del mismo modo. El proceso es finito, pues,

$$n > n_1 > n_2 > \dots$$

luego llegaremos a un cierto n_h primo, tal que

$$n_{h-1} = p_h \cdot n_h$$

Por tanto:

$$n = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_{h-1} \cdot p_h \cdot n_h$$

es una factorización prima.

• PROPOSICIÓN 8.3: *La factorización de la proposición anterior es única.*

Demostración:
Supongamos dos factorizaciones primas naturales del natural n:

$$n = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_j; \qquad n = p_1' \cdot p_2' \cdot \dots \cdot p_h'$$

Será

$$p_1 \cdot (p_2 \cdot \dots \cdot p_j) = p_1' \cdot p_2' \cdot \dots \cdot p_h'$$

luego

$$p_1 \mid p_1' \cdot p_2' \cdot \dots \cdot p_h'$$

pero si un primo natural, p_1, divide a un producto de primos naturales $p_1' \cdot p_2' \cdot \dots \cdot p_h'$, entonces es igual a uno de ellos, según se verá más adelante en el ejercicio 10.33. Sea. por ejemplo

$$p_1 = p_1'$$

Por tanto,

$$p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_j = p_1 \cdot p_2' \cdot \dots \cdot p_h'$$

$$\Downarrow \text{ ley cancelativa del producto}$$

$$p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_j = p_2' \cdot p_3' \cdot \dots \cdot p_h'$$

Continuando el razonamiento del mismo modo, se llega a

$$p_2 = p_2'; \; p_3 = p_3'; \; \dots, \; p_j = p_h' \qquad \text{siendo} \qquad j = h$$

• EJEMPLO 8.6: Busquemos la factorización prima natural de 600. Por co-

600	2
300	2
150	2
75	3
25	5
5	5
1	

Figura 8.1.

modidad dividimos por el menor primo natural 2, todas las veces posibles, a continuación por 3, por 5, etc. La disposición habitual del cálculo es la indicada en la figura 8.1, como es sabido. Por tanto:

$$600 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5$$

y teniendo en cuenta que

$$2 \times 2 \times 2 = 2^3; \quad 3 = 3^1; \quad 5 \times 5 = 5^2$$

puede escribirse

$$600 = 2^3 \times 3^1 \times 5^2$$

Se ha expresado así al número natural 600 como producto de potencias de primos naturales.

EJERCICIOS

8.11 Expresar los números:

$$18,\ 30,\ 7,\ 100,\ 28,\ 52,\ 48$$

como producto de potencias de primos naturales.

8.12 Expresar los números:

$$-18,\ -100,\ 720$$

como producto de un invertible por potencias de primos naturales.

8.13 Expresar los números:

$$-30,\ 360,\ -52$$

como producto de potencias de primos enteros.

Generalicemos el ejemplo 8.6:

• PROPOSICIÓN 8.4: *Todo número natural n, distinto de cero y uno, puede escribirse de modo único en la forma*

$$n = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{e_k}$$

donde $p_1, p_2, \ldots, p_k$ *son primos naturales, distintos dos a dos, y* $e_1, e_2, \ldots, e_k$ *son números naturales, distintos de cero.*

Demostración: Basta tener en cuenta las proposiciones 8.2 y 8.3 y agrupar los primos

naturales iguales, teniendo en cuenta la definición de potencia, dada en el ejercicio 2.6 del § 5.

• DEFINICIÓN 8.3: *Se llaman números primarios a las potencias de la forma p^h, donde p es un entero primo y h un natural distinto de cero.*

• EJEMPLOS:

a) 9 es primario, pues $9=3^2$ y 3 es un entero primo

b) -8 es primario, pues $-8=(-2)^3$ y -2 es un entero primo

c) 7 es primario, pues $7=7^1$ y 7 es un entero primo

EJERCICIO

8.14 Estudiar si son primarios los enteros siguientes:

16, 10, 12, 25, 27, 11, −27, −25, 100, −16, 0, 1, 1000

¿cuáles de ellos son naturales primarios?

La figura 8.2 muestra la tabla de naturales primarios:

2	3	5	7	11	13	17	19	23 ...
2^2	3^2	5^2	7^2	11^2	13^2	17^2	19^2	23^2 ...
2^3	3^3	5^3	7^3	11^3	13^3	17^3	19^3	23^3 ...
2^4	3^4	5^4	7^4	11^4	13^4	17^4	19^4	23^4 ...
2^5	3^5	5^5	7^5	11^5	13^5	17^5	19^5	23^5 ...
.	.	.	.	.	.	.	.	. ...
.	.	.	.	.	.	.	.	. ...
.	.	.	.	.	.	.	.	. ...

Figura 8.2

• EJEMPLO 8.7: El número 600, considerado en el ejemplo 8.6, es producto de los tres números primarios:

$$2^3,\ 3,\ 5^2$$

que son potencias de tres primos distintos, 2, 3 y 5.

En general, la proposición 8.4 se puede expresar así:

• PROPOSICIÓN 8.5: *Todo número natural n, distinto de cero y uno, puede expresarse de modo único, como producto de naturales primarios, que son potencias de primos naturales, distintos entre sí dos a dos:*

$$n = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{e_k}$$

A una descomposición de este tipo la llamaremos una *factorización primaria natural del número n.*

EJERCICIO

8.15 Efectuar la factorización primaria de los números naturales:

15, 42, 64, 35, 400, 31, 222

---

9. Factorización y divisibilidad

• EJEMPLO 9.1: Consideremos los números 252 y 88200. Se verifica que

$$252 \mid 88200$$

Comparando las descomposiciones siguientes de esos dos números

$$252 = 2^2 \times 3^2 \times 5^0 \times 7$$
$$88200 = 2^3 \times 3^2 \times 5^2 \times 7^2$$

se observa que los exponentes a que aparecen elevados los primos naturales de la descomposición 252 son menores o iguales que los respectivos de 88200, lo que era previsible, pues

$$252 \mid 88200$$

equivale a decir que existe un número, 350, tal que

$$350 \times 252 = 88200$$

siendo, por tanto,

$$88200 = 2^3 \times 3^2 \times 5^2 \times 7^2 = (2 \times 5^2 \times 7) \times (2^2 \times 3^2 \times 7) = 350 \times 252$$

EJERCICIO

9.1 Demostrar que

$$(p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \ldots p_k^{e_k}) \cdot (p_1^{e_1'} \cdot p_2^{e_2'} \ldots p_k^{e_k'}) = p_1^{e_1+e_1'} \cdot p_2^{e_2+e_2'} \ldots p_k^{e_k+e_k'}$$

Generalicemos el ejemplo 9.1.

• PROPOSICIÓN 9.1: *Dados dos números naturales*

$$n = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{e_k}; \quad m = p_1^{e_1'} \cdot p_2^{e_2'} \cdot \ldots \cdot p_k^{e_k'};$$

donde $p_1, \ldots, p_k$ *son primos naturales, distintos entre sí dos a dos, y* $e_1, e_2, \ldots, e_k$, $e'_1, e'_2, \ldots, e'_k$ *son números naturales, se verifica:*

$$\boxed{n \mid m} \iff \boxed{e_1 \leqslant e_1';\ e_2 \leqslant e_2';\ \ldots;\ e_k \leqslant e_k'}$$

EJERCICIOS

9.2 Demostrar la proposición 9.1, como consecuencia del ejercicio 9.1.

9.3 Como consecuencia de la proposición 9.1, demostrar que dado un natural primario de forma

$$p^h$$

y un número natural, cuya factorización natural primaria es

$$p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \ldots p_k^{e_k}$$

se verifica:

$$\boxed{p^h \mid p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \ldots p_k^{e_k}} \iff \boxed{\begin{array}{l} 1)\ p \text{ es igual a uno de los números } p_1, p_2, \ldots, p_k \\ 2)\ h \leqslant p_2 \text{ si, por ejemplo, } p = p_2 \end{array}}$$

●

9.4 Encontrar los posibles valores del número natural x, de modo que

$$3^x \mid (2^3 \cdot 3^4 \cdot 7)$$

9.5 Encontrar los posibles valores del número natural x, de modo que

$$3^x \mid (2^3 \cdot 5 \cdot 11)$$

• EJEMPLO 9.2: Como

$$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$$

el conjunto de los divisores primarios naturales de 360 será

$$\{2,\ 2^2,\ 2^3,\ 3,\ 3^2,\ 5\}$$

que es una parte del conjunto de los primarios naturales, bordeada en rojo

Figura 9.1

en la figura 9.1. Designaremos por $h(360)$ al conjunto de los divisores primarios naturales de 360, es decir,

$$h(360)=\{2,\ 2^2,\ 2^3,\ 3,\ 3^2,\ 5\}$$

• EJEMPLO 9.3: Como $140=2^2\cdot5\cdot7$, el conjunto de los divisores primarios naturales de 140 será

$$h(140)=\{2,\ 2^2,\ 5,\ 7\}$$

que es un subconjunto del conjunto de los primarios naturales, bordeado en rojo en la figura 9.2.

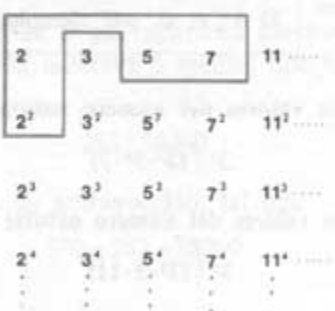


Figura 9.2

EJERCICIO

9.6 Formar el conjunto de los divisores primos naturales de cada uno de los números naturales siguientes:

12, 10, 25, 11, 108, 26

construyendo los diagramas de Venn de los conjuntos

$$h(12),\ h(10),\ h(25),\qquad h(108),\ h(26)$$

sobre el conjunto de los primarios naturales, representados en la figura 8.2, de modo análogo a como se ha hecho en las figuras 9.1 y 9.2.

De este modo, a cada número natural, distinto de 0 y 1, se puede asociar una parte del conjunto de los primarios naturales, como consecuencia de la proposición 8.5.

Designemos por Π al conjunto de los primarios naturales, considerados en la tabla de la figura 8.2. Sea $\mathcal{P}(\Pi)$ el conjunto de las partes de Π. (Véase párrafo 8 del § 2.) En el ejemplo 9.2 se tenía

$$h(360)=\{2,\ 2^2,\ 2^3,\ 3,\ 3^2,\ 5\}\in\mathcal{P}(\Pi)$$

Análogamente, en el ejemplo 9.3

$$h(140)=\{2,\ 2^2,\ 5,\ 7\}\subset\Pi$$

luego

$$h(140)\in\mathcal{P}(\Pi)$$

• DEFINICIÓN 9.1: *Designaremos por h a la aplicación*

$$N\xrightarrow{\ h\ }\mathcal{P}(\Pi)$$

que asocia a cada número natural el conjunto de sus divisores primarios naturales.

EJERCICIOS

9.7 Demostrar que

$$h(0)=\Pi;\qquad h(1)=\varnothing$$

9.8 Comprobar que

$$\Pi\subset N;\qquad \Pi\neq N$$

9.9 Comprobar que

$$\mathcal{P}(\Pi)\subset\mathcal{P}(N);\qquad \mathcal{P}(\Pi)\neq\mathcal{P}(N)$$

9.10 Demostrar que la aplicación h es inyectiva.

9.11 **Encontrar el número natural x, tal que**

$$h(x)=\{3,\ 3^2,\ 7\}$$

9.12 **Comprobar que no existe ningún número natural x, tal que**

$$h(x)=\{2^3,\ 5\}$$

9.13 **¿Es suprayectiva la aplicación h que estamos considerando?**

9.14 **Demostrar que el conjunto imagen de la aplicación h (definición 5.1 del § 3) es el formado por las partes de Π, tales que si un primario pertenece a ella, entonces todos los primarios, que son potencias de menor exponente del mismo primo, también pertenecen a ella, es decir**

$$\text{im}\,(h)=\{S\subset\Pi \mid p^k\in S \Longrightarrow p^x\in S;\ x<k;\ k,x\in N;\ p \text{ primo}\}$$

9.15 **Explique, sobre la figura 8.2, cuáles son las partes de Π que pertenecen al conjunto $M=\text{im}\,(h)$. Demuestre que la aplicación**

$$h : N \longrightarrow M$$

es una biyección. Interprete la figura 9.3.

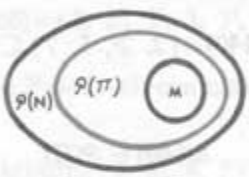


Figura 9.3

• EJEMPLO 9.3: Consideremos los números naturales 90 y 1260. Se verifica

$$90 \mid 1260$$

De acuerdo con la proposición 9.1, los exponentes de los divisores primos de 90 son menores o iguales que los respectivos de 1260. En efecto, sus factorizaciones primarias son:

$$90=2\times 3^2\times 5 \longrightarrow h(90)=\{2,\ 3,\ 3^2,\ 5\}$$
$$1260=2^2\times 3^2\times 5\times 7 \longrightarrow h(1260)=\{2,\ 2^2,\ 3,\ 3^2,\ 5,\ 7\}$$

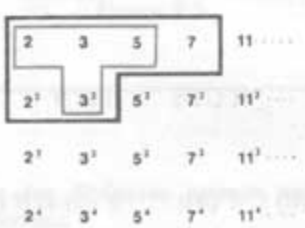


Figura 9.4

lo que se traduce en que

$$h(90) \subset h(1260)$$

como se esquematiza en la figura 9.4.

EJERCICIOS

9.16 **Comprobar, con varios ejemplos, que si a y b son naturales mayores que 1, entonces**

$$a \mid b \implies h(a) \subset h(b)$$

Háganse esquemas, similares al de la figura 9.3, para cada ejemplo.

9.17 **Comprobar, con varios ejemplos, que si a y b son números naturales mayores que 1, entonces**

$$h(a) \subset h(b) \implies a \mid b$$

Háganse también esquemas.

• PROPOSICIÓN 9.2: *Cualesquiera que sean los números naturales a y b, se verifica*

$$\boxed{a \mid b} \iff \boxed{h(a) \subset h(b)}$$

EJERCICIO

9.18 **Demostrar la proposición anterior. Téngase en cuenta que, para a y b mayores que 1, es consecuencia de la proposición 9.1 y cuando alguno de estos números es cero o uno, entonces sigue del ejercicio 9.7.**

10. Máximo común divisor

Representemos por

$$\text{div}\,(a)$$

al conjunto de los diversos naturales del número natural a.

• EJEMPLO 10.1:

$$\text{div}\,(18) = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$$

EJERCICIOS

10.1 Formar los conjuntos:

$$\text{div}(12); \quad \text{div}(48); \quad \text{div}(56); \quad \text{div}(90)$$

10.2 Formar el conjunto

$$\text{div}(360)$$

a partir de su factorización primaria, indicada en el ejemplo 9.2. ¿Cuántos divisores naturales posee 360?

10.3 Generalizar el ejercicio anterior, demostrando que si

$$a = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{e_k}$$

es una factorización primaria natural del número natural a, entonces

$$\text{Card}\,[\text{div}\,(a)] = (e_1+1)\cdot(e_2+1)\cdot\ldots\cdot(e_k+1)$$

• EJEMPLO 10.2: Como

$$\text{div}\,(18) = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$$
$$\text{div}\,(30) = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$$

el conjunto intersección de ambos será

$$\text{div}\,(18) \cap \text{div}\,(30) = \{1, 2, 3, 6\}$$

es decir, los números naturales

$$1, 2, 3, 6$$

son los divisores naturales comunes a 18 y 30.

EJERCICIOS

10.4 Formar el conjunto

$$\text{div}\,(48) \cap \text{div}\,(90)$$

10.5 ¿Cuáles son los divisores naturales comunes a 12 y 56?

Como el conjunto N, de los naturales, está totalmente ordenado por la

relación $\leqslant$, todo subconjunto S, del conjunto N, también quedará ordenado totalmente por esta relación. En particular, si el subconjunto S es finito, tendrá un *elemento máximo*, respecto de la relación $\leqslant$, es decir, existirá un elemento $m \in S$, tal que cualquier otro elemento, $x \in S$, es tal, que $x \leqslant m$.

• EJEMPLO 10.3: El elemento máximo, respecto de la relación $\leqslant$, del subconjunto finito

$$\{1, 2, 3, 6\}$$

del conjunto N, es 6, para expresar lo cual escribimos

$$\text{máx}\{1, 2, 3, 6\} = 6$$

EJERCICIOS

10.6 Escribir el segundo miembro de las igualdades siguientes:

$$\text{máx}\{2, 3, 7, 8, 9\} =$$
$$\text{máx}\{5, 3, 9, 25, 16, 4\} =$$

• EJEMPLO 10.4: De los ejemplos 10.2 y 10.3 se deduce que

$$\text{máx}\{\text{div}(18) \cap \text{div}(30)\} = \text{máx}\{1, 2, 3, 6\} = 6$$

es decir, el mayor divisor común de 18 y 30 es 6, por lo que decimos que *el máximo común divisor de* 18 *y* 30 *es* 6, lo que se expresa abreviadamente escribiendo

$$\text{m.c.d.}(18, 30) = 6$$

o bien escribiendo

$$18 \wedge 30 = 6$$

Generalicemos este ejemplo:

• DEFINICIÓN 10.1: (1.ª parte) *Se llama máximo común divisor de los números naturales a y b al número natural*

$$\text{máx}\{\text{div}(a) \cap \text{div}(b)\}$$

es decir, al mayor de los divisores comunes a los números a y b, supuesto que no son ambos nulos.

Notación: El máximo común divisor de los números a y b se representa de una cualquiera de las dos formas siguientes:

$$a \wedge b$$
$$\text{m.c.d.}(a, b)$$

Por tanto,

$$a \wedge b = \max \{ \operatorname{div}(a) \cap \operatorname{div}(b) \}$$

donde $a, b \in N$ y *uno, al menos, de estos dos números es distinto de cero.*

EJERCICIOS

10.7 Calcular

$$12 \wedge 56; \qquad 48 \wedge 90; \qquad 18 \wedge 0; \qquad 360 \wedge 405$$

10.8 Observe el esquema del ejemplo 6.2 del § 4 y con su ayuda calcule

$$12 \wedge 45$$

Para ello bordee en rojo, sobre el citado esquema, el conjunto div (12) y en otro color el conjunto div (45). El elemento máximo del conjunto intersección será el m. c. d. pedido.

10.9 Prolongue el esquema del ejemplo 6.2 del § 4 y repita el proceso indicado en el ejercicio anterior, para calcular ahora

$$135 \wedge 450$$

Observe que en el conjunto intersección

$$\operatorname{div}(135) \cap \operatorname{div}(450)$$

que aparece rayado en ambos colores, hay un elemento, 45, que es múltiplo de todos los demás del conjunto intersección citado anteriormente.

10.10 En el ejemplo 6.2 del § 4 se esquematiza la divisibilidad en N^*, pero ahora estamos estudiando la divisibilidad en N. ¿Dónde debe situarse el cero en el referido esquema? Compruebe que

$$\forall\, a \in N; \qquad \operatorname{div}(a) \subset \operatorname{div}(0) = N$$

10.11 Demuestre que

$$\forall\, a \in N; \qquad a \wedge 0 = a$$

10.12 Intente aplicar la definición 10.1 (primera parte) a calcular

$$0 \wedge 0$$

Notemos que el m.c.d., tal como ha sido definido hasta ahora, no es una aplicación de

$$N \times N \longrightarrow N$$

ya que la definición 10.1 (1.ª parte) no tiene sentido cuando $a=0=b$. En la proposición 10.1 del § 9 se vio que

$$a \mid b \Longrightarrow a \leqslant b$$

supuesto que a y b son naturales no nulos. Sin embargo, el cero, que es *elemento mínimo* respecto de la ordenación total $\leqslant$, ya que

$$\forall x \in N; \qquad 0 \leqslant x$$

es *elemento máximo* respecto de la ordenación $\mid$, ya que

$$\forall x \in N; \qquad x \mid 0$$

Compárese, al efecto, la ordenación del ejemplo 6.1 del § 4, donde el cero aparece a la izquierda, con la ordenación del ejemplo 6.2 del § 4, donde, como se ha visto en el ejercicio 10.10, el cero aparece a la derecha. Todo ello justifica la siguiente:

* DEFINICIÓN 10.1 (2.ª parte). Por definición:

$$\boxed{0 \wedge 0 = 0}$$

EJERCICIOS

10.13 ¿Es ahora el m. c. d. una operación interna en N?

10.14 Demostrar que

$$a \wedge b = b \wedge a; \qquad \forall a, b \in N$$

10.15 Demostrar

$$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c); \qquad \forall a, b, c \in N$$

10.16 Calcular

$$950 \wedge 675 \wedge 325$$

De los ejercicios anteriores se deduce la siguiente:

* PROPOSICIÓN 10.1: *$(N, \wedge)$ es un semigrupo conmutativo y con elemento neutro.*

EJERCICIO

10.17 Precisar de qué ejercicios sigue la proposición anterior.

10.18 Demostrar que

$$\boxed{a \mid b} \iff \boxed{a \in \operatorname{div}(b)} \iff \boxed{\operatorname{div}(a) \subset \operatorname{div}(b)} \iff \boxed{a \wedge b = a}$$

y ponga ejemplos.

10.19 Defina el m. c. d. de dos enteros, de modo que aunque uno de ellos, o ambos, sean negativos, su m. c. d. sea natural. Ponga ejemplos.

10.20 Comprobar con ejemplos el enunciado de la siguiente proposición 10.2.

• PROPOSICIÓN 10.2: *Si al efectuar la división entera del número natural a entre el número natural b, distinto de cero, se obtiene el resto r, entonces se verifica:*

$$a \wedge b = b \wedge r$$

Abreviadamente:

$$\boxed{\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline r & q \end{array}} \Longrightarrow \boxed{a \wedge b = b \wedge r}$$

Demostración:

$$\boxed{\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline r & q \end{array}} \iff \boxed{\begin{array}{l} a = r + qb \\ r < b \end{array}} \iff \boxed{\begin{array}{l} r = a - qb \\ r < b \end{array}}$$

Si

$$\boxed{x \in \operatorname{div}(a) \cap \operatorname{div}(b)} \Longrightarrow \begin{cases} \boxed{x \in \operatorname{div}(a)} \iff \boxed{x \mid a} \\ \boxed{x \in \operatorname{div}(b)} \iff \boxed{x \mid b} \end{cases} \Longrightarrow \boxed{x \mid qb}$$

$$\longrightarrow \boxed{x \mid a - qb = r} \iff \boxed{x \in \operatorname{div}(r)}$$

es decir,

$$\boxed{x \in \operatorname{div}(a) \cap \operatorname{div}(b)} \Longrightarrow \boxed{x \in \operatorname{div}(r)}$$

luego

$$\boxed{x \in \operatorname{div}(a) \cap \operatorname{div}(b)} \Longrightarrow \boxed{x \in \operatorname{div}(b) \cap \operatorname{div}(r)}$$

Por tanto,

$$\boxed{\text{div}\,(a)\cap\text{div}\,(b)}\subset\boxed{\text{div}\,(b)\cap\text{div}\,(r)}$$

Análogamente, se prueba que

$$\boxed{\text{div}\,(a)\cap\text{div}\,(b)}\supset\boxed{\text{div}\,(b)\cap\text{div}\,(r)}$$

lo que, junto a la inclusión anterior, permite afirmar que

$$\text{div}\,(a)\cap\text{div}\,(b)=\text{div}\,(b)\cap\text{div}\,(r)$$

luego

$$\text{máx}\,\{\text{div}\,(a)\cap\text{div}\,(b)\}=\text{máx}\{\text{div}\,(b)\cap\text{div}\,(r)\}$$

es decir,

$$a\wedge b=b\wedge r$$

EJERCICIO

10.21 Completar la demostración anterior, probando que

$$\boxed{\text{div}\,(a)\cap\text{div}\,(b)}\supset\boxed{\text{div}\,(b)\cap\text{div}\,(r)}$$

Para ello demuestre que

$$\boxed{x\in\text{div}\,(b)\cap\text{div}\,(r)}\Longrightarrow\boxed{x\in\text{div}\,(a)}$$

utilizando la igualdad

$$a=r+qb$$

del **mismo modo que se utilizó, en la demostración anterior, la igualdad:**

$$r=a-qb$$

El teorema anterior sugiere un método para calcular el m.c.d. de dos números naturales a y b, tales que $a>b>1$.

$$\begin{array}{l} a \;\big|\; \underline{b} \\ r_1 \;\; q_1 \end{array} \Longrightarrow a\wedge b=b\wedge r_1 \qquad \text{siendo } r_1<b$$

$$\begin{array}{l} b \;\big|\; \underline{r_1} \\ r_2 \;\; q_2 \end{array} \Longrightarrow b\wedge r_1=r_1\wedge r_2 \qquad \text{siendo } r_1>r_2$$

$$\begin{array}{l} r_1 \;\big|\; \underline{r_2} \\ r_3 \;\; q_3 \end{array} \Longrightarrow r_1\wedge r_2=r_2\wedge r_3 \qquad \text{siendo } r_2>r_3$$

Siguiendo así, como

$$r_1 > r_2 > r_3 > \dots$$

necesariamente ha de llegarse a

$$r_h = 0$$

es decir,

$$\begin{array}{c|c} r_{h-2} & r_{h-1} \\ \hline 0 & q_h \end{array} \Longrightarrow r_{h-2} \wedge r_{h-1} = r_{h-1} \wedge 0 = r_{h-1}$$

Por tanto,

$$a \wedge b = b \wedge r_1 = r_1 \wedge r_2 = r_2 \wedge r_3 = \dots = r_{h-3} \wedge r_{h-2} = r_{h-2} \wedge r_{h-1} = r_{h-1} \wedge 0 = r_{h-1}$$

El m.c.d. buscado es, por tanto, el resto anterior al resto 0, en las sucesivas divisiones indicadas.

La disposición habitual de este cálculo es la siguiente:

	q_1	q_2	$q_3 \dots$	q_{h-1}	q_h
a	b	r_1	$r_2 \dots r_{h-3}$	r_{h-2}	r_{h-1}
r_1	r_2	r_3	$\dots r_{h-1}$	0	

Este procedimiento de cálculo del m.c.d. es conocido como *algoritmo de Euclides.*

• EJEMPLO 10.5: Cálculo de $1800 \wedge 2646$:

	1	2	7	1	5
2646	1800	846	108	90	18
846	108	90	18	0	

luego

$$1800 \wedge 2646 = 18$$

EJERCICIOS

10.22 Calcular, aplicando el algoritmo de Euclides

$$56 \wedge 120; \qquad 370 \wedge 145; \qquad 86400 \wedge 5725$$

10.23 **Demostrar que**

$$\boxed{a \wedge b = d} \Longrightarrow \boxed{(na) \wedge (nb) = nd} \qquad a, b, n \in N$$

es decir, si multiplicamos a los números a y b por el número natural n, entonces su m. c. d. también queda multiplicado por n. Para ello basta aplicar el resultado del ejercicio 10.20 del § 9 y la proposición 10.2 al algoritmo de Euclides, si ninguno de ellos es nulo. Si alguno es cero, es trivial la demostración.

10.24 **Demostrar, por el mismo procedimiento del ejercicio anterior, que**

$$\left.\begin{matrix} n \mid a \\ n \mid b \end{matrix}\right\} \Longrightarrow n \mid a \wedge b$$

es decir, que los divisores comunes de dos números son los divisores de su m. c. d.

10.25 **Comprobar, de acuerdo con el ejercicio 10.9, que los elementos del conjunto**

$$D = \text{div } (135) \cap \text{div } (450)$$

son todos divisores de $135 \wedge 450$, es decir, que el conjunto D posee un elemento máximo, respecto de la relación $\mid$. Obsérvelo sobre la figura indicada en el ejercicio 10.9. Generalice este resultado.

10.26 **Demostrar que dados los números naturales a, b y n, siendo $n \neq 0$ y tales que $n \mid a$ y $n \mid b$, se verifica:**

$$a \wedge b = d \Longrightarrow \frac{a}{n} \wedge \frac{b}{n} = \frac{d}{n}$$

es decir, que al dividir dos naturales por n (supuestos ambos divisibles), su m. c. d. queda dividido por n.

---

* DEFINICIÓN 10.2: *Dos números enteros se dicen primos entre sí, si su m.c.d. es 1* (véase ejercicio 10.19).

Abreviadamente:

$$\boxed{a \text{ y } b \text{ son primos entre sí}} \underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \boxed{a \wedge b = 1}$$

EJERCICIO

10.27 **Demostrar que $\boxed{a \wedge 1 = 1}$ y expresar este resultado con la nomenclatura de la definición 10.1**

10.28 **Demostrar que**

$$a \wedge b = d \implies \frac{a}{d} \wedge \frac{b}{d} = 1$$

como caso particular del ejercicio 10.24. Exprese este resultado de acuerdo con la definición 10.1.

• PROPOSICIÓN 10.3: *Si un número natural divide a un producto de dos naturales y es primo con uno de ellos, entonces divide al otro.*

Abreviadamente:

$$\left.\begin{array}{l} a \mid (nb) \\ a \wedge b = 1 \end{array}\right\} \implies a \mid n$$

Demostración:

$$\text{Hip: } a \wedge b = 1 \quad \Big\downarrow \text{ ejercicio 10.23} \quad na \wedge nb = n$$

$$\left.\begin{array}{l} a \mid na \\ \text{Hip: } a \mid nb \end{array}\right\} \underset{\text{ejer. 10.24}}{\Longrightarrow} a \mid na \wedge nb \implies a \mid n$$

• EJEMPLO 10.6:

$$\left.\begin{array}{l} 4 \mid (12 \cdot 15) \\ 4 \wedge 15 = 1 \end{array}\right\} \implies 4 \mid 12$$

EJERCICIOS

10.29 **Ponga un contraejemplo, para probar que**

$$a \mid (nb) \not\Longrightarrow a \mid n$$

si no se verifica que

$$a \wedge b = 1$$

10.30 **Si dos números naturales son primos, entonces coinciden o son primos entre sí. Ponga un ejemplo y después demuéstrelo en general.**

10.31 **Si p es un natural primo y no divide al natural n, entonces**

$$p \wedge n = 1$$

10.32 **Si el primo p divide a un producto de dos naturales y no divide a uno de ellos, entonces divide al otro.**

10.33 **Si el primo p_1 divide al producto de primos**

$$p_1' \, p_2' \, \ldots \, p_h'$$

entonces coincide con alguno de ellos. Por ejemplo, $p_1 = p_1'$.

---

* EJEMPLO 10.7: Dado el conjunto de números naturales

$$\{5, 3, 10\}$$

representaremos por

$$\text{mín}\{5, 3, 10\}$$

al menor de ellos, respecto a la relación $\leqslant$, es decir,

$$\text{mín}\{5, 3, 10\} = 3$$

EJERCICIO

10.34 Calcular

$$\textbf{mín}\{3, 2, 4\}$$

---

* EJEMPLO 10.8: Para calcular

$$900 \wedge 3675$$

podemos efectuar la factorización primaria de cada uno de ellos:

$$900 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$$
$$3675 = 3 \cdot 5^2 \cdot 7^2$$

luego estos números se pueden escribir en la forma

$$900 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^0$$
$$3675 = 2^0 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7^2$$

De acuerdo con la proposición 9.1, si el número

$$n = 2^{e_1} \cdot 3^{e_2} \cdot 5^{e_3} \cdot 7^{e_4}$$

es tal que

$$n \mid 900$$

habrá de ser

$$e_1 \leqslant 2; \quad e_2 \leqslant 2; \quad e_3 \leqslant 2; \quad e_4 \leqslant 0$$

Si además

$$n \mid 3675$$

habrá de ser

$$e_1 \leqslant 0; \quad e_2 \leqslant 1; \quad e_3 \leqslant 2; \quad e_4 \leqslant 2$$

Por tanto, si n divide a ambos, habrá de ser

$$e_1 \leqslant \text{mín}\{2, 0\} = 0$$
$$e_2 \leqslant \text{mín}\{2, 1\} = 1$$
$$e_3 \leqslant \text{mín}\{2, 2\} = 2$$
$$e_4 \leqslant \text{mín}\{0, 2\} = 0$$

Por tanto, el mayor divisor común a ambos será

$$900 \wedge 3675 = 2^0 \cdot 3^1 \cdot 5^2 \cdot 7^0 = 75$$

Generalicemos este ejemplo:

• PROPOSICIÓN 10.4: *Dados dos números naturales, a y b, distintos de cero, tales que*

$$a = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{e_k}$$
$$b = p_1^{e'_1} \cdot p_2^{e'_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{e'_k}$$

donde $p_1, p_2, \ldots, p_k$ *son primos, distintos entre sí dos a dos, y* $e_1, e_2, \ldots, e_k$, $e'_1, e'_2, \ldots, e'_k$ *son números naturales, se verifica:*

$$a \wedge b = p_1^{\min\{e_1, e'_1\}} \cdot p_2^{\min\{e_2, e'_2\}} \cdot \ldots \cdot p_k^{\min\{e_k, e'_k\}}$$

Demostración: Sigue de la proposición 9.1.

EJERCICIOS

10.35 Calcular, aplicando el resultado de la proposición 10.4, el m. c. d. de los números indicados en el ejercicio 10.7, y comparar con los resultados allí obtenidos.

10.36 Calcular, aplicando la definición 10.4. el m. c. d. de los números indicados en el ejercicio 10.22. ¿Qué procedimiento le parece más ventajoso cuando los números son grandes?

• EJEMPLO 10.9: Las imágenes de los números 900 y 3675, del ejemplo 10.8, en la aplicación h, de la definición 9.1, serán

$$h(900) = \{2, 2^2, 3, 3^2, 5, 5^2\}$$
$$h(3675) = \{3, 5, 5^2, 7, 7^2\}$$

que se representan en la figura 10.1.

Notemos que

$$h(900) \cap h(3675) = \{3, 5, 5^2\} = h(75) = h(900 \wedge 3675)$$

Generalicemos este ejemplo:

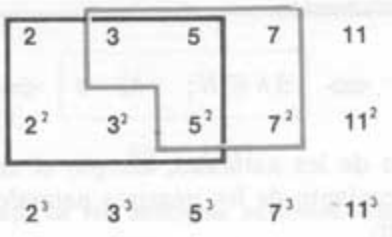


Figura 10.1

• PROPOSICIÓN 10.5: *La aplicación*

$$h: N \longrightarrow \mathcal{P}(\Pi)$$

es un homomorfismo del semigrupo $(N, \wedge)$ *en el semigrupo* $[\mathcal{P}(\Pi), \cap]$, es decir,

$$\forall\, a, b \in N; \qquad \boxed{h(a \wedge b) = h(a) \cap h(b)}$$

Demostración:

Primer caso: Si a y b son distintos de cero, sigue de la proposición 10.4.

Segundo caso: Si alguno de los dos es cero, sigue del ejercicio 9.7, del 10.11 y de la definición 10.1.

La proposición 10.5 sugiere un procedimiento para calcular el m.c.d. de dos números, utilizando la tabla de primarios. Lo esquematizaremos así:

$$\begin{array}{rcl} a & \longrightarrow & h(a) \\ b & \longrightarrow & h(b) \\ \hline a \wedge b & \longleftarrow & h(a) \cap h(b) \end{array}$$

EJERCICIOS

10.37 Calcular, por el procedimiento que acaba de indicarse

$$400 \wedge 625 \qquad 252 \wedge 360 \qquad 48 \wedge 72$$

10.38 Demuestre que

$$\forall\, a \in N; \qquad a \wedge a = a$$

---

11. Mínimo común múltiplo

Como ya se indicó en el ejemplo 1.2 del § 4 y en el párrafo 10 del § 9, decir que «el número natural a es múltiplo del b» equivale a decir que «b es

divisor de a». Abreviadamente:

$$\boxed{b \mid a} \iff \boxed{\exists\, h \in N;\quad hb = a} \iff \boxed{a = \dot{b}}$$

Sea N^* el conjunto de los naturales, excepto el cero. Sea $b \in N^*$. Representemos por bN^* al conjunto de los números naturales, múltiplos de b y distintos de cero, es decir,

$$bN^* = \{x \mid x \in N^*;\ x = \dot{b}\}$$

Por tanto

$$bN^* = \{1 \cdot b,\ 2 \cdot b,\ 3 \cdot b,\ 4 \cdot b,\ 5 \cdot b,\ \ldots\}$$

• EJEMPLO 11.1:

$$3N^* = \{3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15,\ 18,\ 21,\ \ldots\}$$

EJERCICIOS

11.1 Formar los conjuntos:

$$2N^* \qquad 5N^* \qquad 12N^*$$

¿Son finitos estos conjuntos?

11.2 Probar que $(3N^*, +)$ es un semigrupo conmutativo.

11.3 ¿Es $(3N^*, +)$ un subsemigrupo de $(N^*, +)$? Véase el párrafo 5 del § 5.

11.4 Demostrar que, en general, la intersección de dos subsemigrupos, de un mismo semigrupo, es otro subsemigrupo.

• EJEMPLO 11.2:

$$4N^* = \{4,\ 8,\ 12,\ 16,\ 20,\ 24,\ 28,\ 32,\ 36,\ 40,\ 44,\ \ldots\}$$
$$6N^* = \{6,\ 12,\ 18,\ 24,\ 30,\ 36,\ 42,\ 48,\ 54,\ 60,\ 66,\ \ldots\}$$

luego

$$4N^* \cap 6N^* = \{12,\ 24,\ 36,\ 48,\ 60,\ \ldots\}$$

será el conjunto de los múltiplos naturales, distintos de cero, comunes a 4 y 6.

EJERCICIOS

11.5 Formar el conjunto

$$8N^* \cap 10N^*$$

11.6 ¿Cuál es el conjunto de los múltiplos naturales, distintos de cero, comunes a 12 y 18?

---

* EJEMPLO 11.3: Según se dijo en el ejemplo 10.7, será

$$\text{mín}\,\{4N^* \cap 6N^*\} = \text{mín}\,\{12,\ 24,\ 36,\ 48,\ \ldots\} = 12$$

es decir, el menor múltiplo, distinto de cero, común a 4 y 6, es 12, por lo que diremos que el *mínimo común múltiplo* de 4 y 6 es 12, lo que se expresa abreviadamente así

$$\boxed{\text{m.c.m.}\,(4, 6) = 12}$$

o bien

$$\boxed{4 \vee 6 = 12}$$

Generalicemos este ejemplo:

* DEFINICIÓN 11.1: (1.ª parte) *Se llama mínimo común múltiplo de los números naturales a y b, no nulos, al número*

$$\text{mín}\,\{aN^* \cap bN^*\}$$

es decir, al menor de los múltiplos comunes, no nulos, de a y b.

Abreviadamente:

$$\forall\, a, b \in N^*; \quad \boxed{\text{m.c.m.}\,(a, b) = \text{mín}\,\{aN^* \cap bN^*\} = a \vee b}$$

EJERCICIOS

11.7 Calcular

$$12 \vee 18; \qquad 8 \vee 10; \qquad 2 \vee 3$$

11.8 Sobre el esquema del ejemplo 6.2 del § 4, colorear en rojo el conjunto $2N^*$ y en otro color el $5N^*$. ¿Cuál será el elemento mínimo del conjunto intersección?

11.9 **Amplíe aquel esquema, mencionado en el ejercicio anterior, para calcular**

$$12 \vee 20$$

11.10 **Demostrar que si** $a, b \in N^*$, **se verifica**

$$a = \dot{b} \iff a \in bN^* \iff aN^* \subset bN^* \iff a \vee b = a$$

Ponga un ejemplo.

En el ejercicio anterior se ha visto que

$$a = \dot{b} \Longrightarrow a \vee b = a$$

cuando $a,\ b \in N^*$. Deseamos extender este resultado al caso de que a y b sean cualesquiera números naturales, incluso cero. Ya se ha visto que

$$0 = \dot{b}$$

cualquiera que sea el número natural b, por tanto, para que la implicación anterior siga siendo cierta, hemos de hacer la siguiente

- DEFINICIÓN 11.1: (2.ª parte)

$$\boxed{0 \vee b = 0}$$

cualquiera que sea el número natural b.

EJERCICIOS

11.11 **Probar que**

$$0 \vee 0 = 0$$

11.12 **¿Es el m. c. m. una operación interna en** N**?**

11.13 **Demostrar que**

$$\forall\, a, b \in N; \qquad a \vee b = b \vee a$$

11.14 **Demostrar que**

$$\forall\, a, b, c \in N; \qquad (a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$$

11.15 **Calcular**

$$6 \vee 8 \vee 10$$

11.16 **Demostrar que**

$$a \vee 1 = a; \qquad \forall\, a \in N$$

De los ejercicios anteriores se deduce:

• PROPOSICIÓN 11.1: $(N, \vee)$ *es un semigrupo conmutativo y con elemento neutro.*

• EJEMPLO 11.4: Consideremos los números 900 y 3675, del ejemplo 10.8. Razonando como allí, se tiene

$$900 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^0$$
$$3675 = 2^0 \cdot 3^1 \cdot 5^2 \cdot 7^2$$

Si el número

$$n = 2^{e_1} \cdot 3^{e_2} \cdot 5^{e_3} \cdot 7^{e_4}$$

es múltiplo de 900 y de 3675, habrá de ser

$$e_1 \geqslant \text{máx}\{2, 0\} = 2$$
$$e_2 \geqslant \text{máx}\{2, 1\} = 2$$
$$e_3 \geqslant \text{máx}\{2, 2\} = 2$$
$$e_4 \geqslant \text{máx}\{0, 2\} = 2$$

luego el mínimo múltiplo común de 900 y 3675 será

$$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 = 44100$$

Generalicemos este ejemplo:

• PROPOSICIÓN 11.2: En las condiciones de la proposición 10.4, se verifica:

$$\boxed{a \vee b = p_1^{\text{máx}\{e_1, e_1'\}} \cdot p_2^{\text{máx}\{e_2, e_2'\}} \cdot \ldots \cdot p_k^{\text{máx}\{e_k, e_k'\}}}$$

EJERCICIOS

11.17 Demostrar la proposición 11.4, con ayuda de la proposición 9.1.

11.18 Demostrar, con ayuda de la proposición 9.1, que si $\boxed{a \vee b = m}$ **entonces**

$$\left.\begin{matrix} n = \dot{a} \\ n = \dot{b} \end{matrix}\right\} \Longrightarrow n = \dot{m}$$

Del ejercicio anterior se deduce que los *múltiplos comunes a dos números son los múltiplos de su m.c.m.*

EJERCICIOS

11.19 **Demostrar que**

$$a \vee b = m \implies (na) \vee (nb) = nm; \qquad \forall\, a, b, n \in N$$

11.20 **Demostrar que**

$$(a \wedge b) \mid (a \vee b); \qquad \forall\, a, b \in N$$

11.21 **Demostrar que dados los números naturales a, b y n, siendo $n \neq 0$, y tales que $n|a$ y $n|b$, entonces**

$$a \vee b = m \implies \frac{a}{n} \vee \frac{b}{n} = \frac{m}{n}$$

• EJEMPLO 11.5: De los ejemplos 10.9 y 11.4 se deduce:

$$h(900) \cup h(3675) = \{2,\ 2^2,\ 3,\ 3^2,\ 5,\ 5^2,\ 7,\ 7^2\} =$$
$$= h(44100) = h(900 \vee 3675)$$

Generalicemos este ejemplo:

• PROPOSICIÓN 11.3: *La aplicación*

$$h : N \longrightarrow \mathcal{P}(\Pi)$$

es un homomorfismo del semigrupo $(N, \vee)$ *en el semigrupo* $[\mathcal{P}(\Pi), \cup]$, es decir,

$$\forall\, a, b \in N; \quad \boxed{\boxed{h(a \vee b) = h(a) \cup h(b)}}$$

EJERCICIOS

11.22 **Demostrar la proposición anterior.**

11.23 **Explicar el procedimiento para calcular el m. c. m., que sugiere la proposición anterior y aplicarlo a calcular**

$$400 \vee 625 \qquad 252 \vee 360 \qquad 48 \vee 72$$

11.24 **Demostrar que**

$$\forall\, a \in N; \qquad a \vee a = a$$

---

12. Relaciones entre el m.c.d. y el m.c.m.

EJERCICIOS

12.1 Comprobar que

$$(36 \wedge 60)\cdot(36 \vee 60)=36\cdot 60$$

¿Será cierto, en general, este resultado?

12.2 Comprobar que

$$\text{máx}\{4, 6\}\times\text{mín}\{4, 6\}=4\times 6$$

12.3 Demostrar que $\forall\, e, e' \in N$:

$$\text{mín}\{e, e'\}+\text{máx}\{e, e'\}=e+e'$$
$$\text{mín}\{e, e'\}\times\text{máx}\{e, e'\}=e\times e'$$

• PROPOSICIÓN 12.1: *El producto de dos números naturales es igual al producto de su m.c.d. por su m.c.m.*, es decir,

$$\forall\, a, b \in N; \quad \boxed{(a \wedge b)\cdot(a \vee b)=a\cdot b}$$

EJERCICIOS

12.4 Demostrar la proposición anterior, a partir de los ejercicios 9.1 y 12.3 y las proposiciones 10.4 y 11.2.

12.5 Demostrar que si dos números son primos, entonces su m. c. m. es igual a su producto.

La proposición anterior sugiere un procedimiento para calcular el m.c.m. de números grandes. Se halla el m.c.d. por el algoritmo de Euclides y se aplica la expresión

$$\boxed{a \vee b=\frac{a\times b}{a \wedge b}}$$

con lo que se evita la factorización.

EJERCICIOS

12.6 Calcular

$$127650 \vee 48275$$

12.7 Demostrar que si $a, b, c \in N^*$

$$a \vee b \vee c = \frac{abc}{ab \wedge bc \wedge ca}$$

con ayuda de la proposición 12.1.

12.8 Demostrar que $\forall\, a, b \in N$

$$a \wedge (a \vee b) = a; \qquad a \vee (a \wedge b) = a$$

12.9 Demostrar que $\forall\, a, b, c \in N$

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$
$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

¿cómo se llaman estas propiedades?

Como las operaciones internas $\wedge$ y $\vee$, definidas en el conjunto N, tienen las siguientes propiedades:

Conmutativas:

$$a \vee b = b \vee a \qquad a \wedge b = b \wedge a$$

Asociativas:

$$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c) \qquad (a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$$

Idempotentes:

$$a \vee a = a \qquad a \wedge a = a$$

Simplificativas:

$$a \vee (a \wedge b) = a \qquad a \wedge (a \vee b) = a$$

diremos que el conjunto N posee estructura de *retículo* respecto de las operaciones m.c.m. y m.c.d., o abreviadamente, diremos que $(N, \vee, \wedge)$ es un *retículo.*

• DEFINICIÓN 12.1: *Si en un conjunto C se han definido dos operaciones, que designamos por* $\perp$ *y* $\top$, *conmutativas, asociativas, idempotentes y tales que*

$$x \top (x \perp y) = x; \qquad x \perp (x \top y) = x; \qquad \forall\, x, y \in C$$

se dice que $(C, \top, \perp)$ *es un retículo.*

Los *retículos* también se llaman *redes*.

• EJEMPLO 12.1: De los párrafos 4, 5 y 7 del § 2 se deduce que el conjunto de partes de un conjunto E posee estructura de retículo, respecto de las operaciones unión e intersección, es decir, que

$$[\mathcal{P}(E), \cup, \cap]$$

es un retículo. Además, en el párrafo 7 del § 2 se vio que la unión es distributiva respecto de la intersección, y recíprocamente. Por ello diremos que *este retículo es distributivo*. En particular, $[\mathcal{P}(\Pi), \cup, \cap]$, donde Π es el conjunto de los naturales primarios, será un retículo distributivo.

• OTROS EJEMPLOS: Los sucesos aleatorios del § 8 y las proposiciones lógicas respecto de la conjunción y disyunción lógicas, indicadas en el párrafo 9 del § 6, son también ejemplos de retículos.

EJERCICIOS

12.10 ¿Es distributivo el retículo $(N, \vee, \wedge)$? Téngase en cuenta el ejercicio 12.8.

12.11 ¿Por qué $(N, +, \cdot)$ no es un retículo?

12.12 Si designamos por M al conjunto im (h), considerado en los ejercicios 9.14 y 9.15, probar que

$$(M, \cup, \cap)$$

es un retículo.

12.13 ¿Por qué se dice que $(M, \cup, \cap)$ es un subretículo del retículo $[\mathcal{P}(\Pi), \cup, \cap]$? Compárese con la idea de subanillo vista en los ejercicios 8.9, 8.10 y 8.11 del § 5.

12.14 De las proposiciones 10.5 y 11.6 se deduce que la aplicación

$$N \xrightarrow{h} \mathcal{P}(\Pi)$$

es un homomorfismo del retículo $(N, \vee, \wedge)$ en el retículo $[\mathcal{P}(\Pi), \cup, \cap]$. Defina, en general, homomorfismo de retículos. Compare, para ello, con la definición 8.5 del § 5.

De los ejercicios 9.15 y 12.13 se deduce:

• PROPOSICIÓN 12.2: *La aplicación*

$$N \xrightarrow{h} M$$

es un isomorfismo del retículo $(N, \vee, \wedge)$ en el retículo $(M, \cup, \cap)$.

EJERCICIO

12.15 Como consecuencia del isomorfismo h, cada propiedad del retículo $(M, \cup, \cap)$ induce otra similar en el retículo $(N, \vee, \wedge)$, como se indica en el siguiente cuadro resumen, que el alumno debe completar, escribiendo la expresión adecuada, dentro de cada recuadro:

$$
\begin{array}{rcl}
 & \overset{h}{\rightarrow} & \\
a & \rightarrow & A \\
a, b, c \in N \qquad b & \rightarrow & B \\
a \wedge b & \rightarrow & A \cap B \qquad A, B, C \in M \\
a \vee b & \rightarrow & A \cup B \\
a \wedge b = b \wedge a & \rightarrow & A \cap B = B \cap A \\
(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c) & \rightarrow & \boxed{\qquad\qquad} \\
a \wedge a = a & \rightarrow & \boxed{\qquad} \\
\boxed{\qquad\qquad} & \rightarrow & A \cup (A \cap B) = A \\
\boxed{\qquad\qquad\qquad} & \rightarrow & A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\
0 & \rightarrow & M \\
1 & \rightarrow & \varnothing \\
a \vee 0 = a & \rightarrow & \boxed{\qquad} \\
\boxed{\qquad\qquad} & \rightarrow & A \cap \varnothing = \varnothing \\
a \vee 1 = a & \rightarrow & \boxed{\qquad} \\
\boxed{\qquad\qquad} & \rightarrow & A \cap M = A \\
a \wedge b = 1 & \rightarrow & \boxed{\qquad}
\end{array}
$$

Teniendo en cuenta la proposición 9.2, puede continuarse así:

$$
\begin{array}{rcl}
 & \overset{h}{\rightarrow} & \\
a \mid b & \rightarrow & A \subset B \\
a \mid a \vee b & \rightarrow & \boxed{\qquad\qquad} \\
\boxed{\qquad\qquad} & \rightarrow & A \cap B \subset B \\
a \wedge b \mid a \vee b & \rightarrow & \boxed{\qquad\qquad} \\
\boxed{\qquad \Leftrightarrow \qquad} & \rightarrow & A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A \\
a \mid b \Leftrightarrow a \vee b = b & \rightarrow & \boxed{\qquad \Leftrightarrow \qquad}
\end{array}
$$

Hemos visto que el conjunto $\mathcal{P}(E)$ es un retículo respecto de $\cup$ e $\cap$. Por

otra parte, $\mathcal{P}(E)$ está ordenado por la relación $\subset$, verificándose

$$A \cup B = B \iff A \subset B \iff A \cap B = A$$

donde $A, B \in \mathcal{P}(E)$.

Análogamente, el conjunto N es un retículo respecto de las operaciones $\vee$ y $\wedge$. Por otra parte, N está ordenado por la relación $|$, verificándose

$$a \vee b = b \iff a \mid b \iff a \wedge b = a$$

donde $a, b \in N$.

EJERCICIO

12.16 El retículo $(C, \top, \bot)$, de la definición 12.1, permite definir una relación R entre los elementos de C:

$$\forall x, y \in C; \qquad x \top y = y \underset{\text{def}}{\iff} x R y \underset{\text{def}}{\iff} x \bot y = x$$

Demostrar que, como consecuencia de ser $(C, \top, \bot)$ un retículo

$$x \top y = y \iff x \bot y = x$$

y la relación R es de orden.

Por tanto, *todo retículo lleva consigo una ordenación.* Cabe preguntarse si el recíproco es cierto, es decir, si toda ordenación en un conjunto lleva consigo una estructura de retículo. En general, la respuesta es negativa.

No obstante, hay casos en que la ordenación lleva consigo la existencia del retículo. Recordemos que para el caso de la relación $\subset$, entre los elementos del conjunto $\mathcal{P}(E)$, para cada par

$$A, B \in \mathcal{P}(E)$$

en general, hay muchos conjuntos que contienen (respectivamente, están contenidos) a ambos, pero entre ellos hay uno mínimo (respectivamente máximo), su unión (respectivamente su intersección). Análogamente, para el caso de la relación $|$ en N, para cada par de naturales

$$a, b \in N$$

en general, hay muchos números que son divisores (respectivamente múltiplos) de ambos, pero entre ellos hay uno máximo (respectivamente mínimo), su m.c.d. (respectivamente su m.c.m.).

Pues bien, en general, si en un conjunto ordenado, para cada par de elementos

$$a,\ b$$

hay un máximo, entre los elementos relacionados con ellos, y un mínimo, entre los elementos con los que a y b están relacionados, entonces esa ordenación da lugar a un retículo (*).

El siguiente ejercicio sirve de ejemplo a lo que acaba de afirmarse:

EJERCICIO

12.17 En el conjunto Z de los enteros se tiene la relación de orden $\leqslant$. Para cada pareja

$$a,\ b$$

de enteros, el conjunto de los enteros x tales que

$$x \leqslant a; \qquad x \leqslant b$$

posee un elemento máximo, precisamente

$$\text{mín}\,\{a,\ b\}$$

indicado en el ejemplo 10.7.

Análogamente, el conjunto de los enteros, x, tales que

$$a \leqslant x; \qquad b \leqslant x$$

posee un elemento mínimo, el elemento

$$\text{máx}\,\{a,\ b\}$$

indicado en el ejemplo 10.3. Probar que

$$(Z,\ \text{máx},\ \text{mín})$$

es un retículo.

---

13. Didáctica de la divisibilidad

La introducción de la teoría de la divisibilidad en la Escuela ha de ser posterior a los conceptos de división exacta y entera. Se comienza haciendo que los niños manejen la relación «*divide a*» y su opuesta «*es múltiplo de*», para pasar después a caracterizar números primos y compuestos, a lo que seguirán descomposiciones de un número en factores.

(*) Para mayor precisión, puede verse el capítulo I de ETAYO, *Matemática Moderna*, «Revista Enseñanza Media», núm. 131-134 (1963).

Por ejemplo, la figura 10.1 del § 9 muestra que el número 5 no es divisor de 48. Si, para conseguir una situación que materialice este problema en la clase, se propone el problema de construir un rectángulo con 48 papelitos cuadrados (o monedas o sellos o fichas), habrá unos chicos que lleguen a la disposición indicada en la figura 13.1, es decir, a

$$48 = 8 \times 6$$

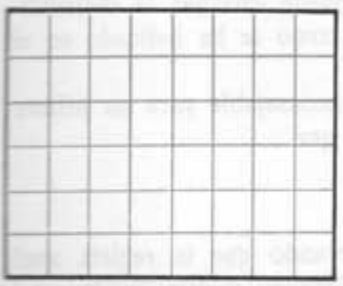


Figura 13.1

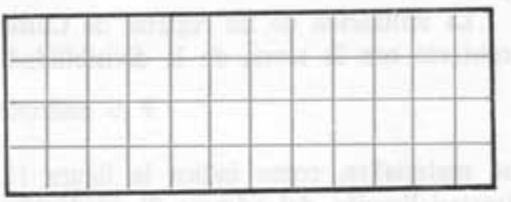


Figura 13.2

Otros, por ejemplo, pueden llegar a la de la figura 13.2, es decir, a

$$48 = 12 \times 4$$

Si cada grupo de trabajo continúa descomponiendo los factores obtenidos hasta llegar a descomponer en factores primos, los niños observarán finalmente que todos han llegado a una misma descomposición. El problema puede repetirse con situaciones diversas, una vez hecho lo cual, se les puede informar de que esto ocurre siempre.

De aquí puede pasarse al criterio de divisibilidad dado en la proposición 9.1, con ejemplos similares al 9.1.

El m.c.d. y m.c.m. pueden ser introducidos como se ha hecho en los ejemplos 10.4 y 11.3. Su cálculo se hará a partir de las factorizaciones de los números. El uso de esquemas similares al de la figura 10.1, basado en el isomorfismo de $(N, \vee, \wedge)$ en $(M, \cup, \cap)$, estudiado anteriormente, es recomendable.

El procedimiento sugerido en los ejercicios 10.8, 10.9 y 11.8, a partir del esquema del ejemplo 6.2 del § 4, tiene la ventaja de que no hay que excluir el cero de una exposición elemental del m.c.d. y m.c.m, ni tratarlo excepcionalmente, como se ha hecho en la segunda parte de las definiciones 10.1 y 11.1.

En efecto, notemos que si definimos el m.c.m. como el menor múltiplo común (menor respecto de la relación $\leqslant$), entonces esta definición no es aplicable a

$$6 \vee 0$$

ya que

$$6 \vee 0 = 0$$

y, sin embargo,

$$0 < 6$$

En cambio, definiendo el m.c.m. como el *mínimo múltiplo común* (mínimo respecto de la relación $|$), resulta

$$6 \vee 0 = 0$$

directamente del referido esquema del ejemplo 6.2 del § 4, ampliado con el cero, como se ha indicado en el ejercicio 10.10.

Una vez estudiados los números enteros, se puede estudiar la divisibilidad en Z, que no es más complicada que en N, como se ha indicado en el párrafo 7.

La utilización de las regletas de Cuisenaire es aconsejable para un primer contacto con la teoría de la divisibilidad. Nótese que

9 *es múltiplo de* 3

se materializa, como indica la figura 13.3, observando que la regleta azul (materialización del número 9) puede obtenerse sumando verdes únicamente.

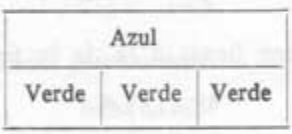


Figura 13.3

Para más detalles puede consultarse el libro:
GATEÑO, *Al fin Pepito puede aprender Aritmética*, Ed. Cuisenaire de España, págs. 55-60.

NUMERO RACIONAL 11

1. Conjunto de los números racionales

En el semianillo N de los números naturales se podrían efectuar las operaciones suma y producto, pero sus operaciones inversas, sustracción y división, no siempre eran posibles. Para hacer posible la sustracción, en todo caso, se amplió el concepto de número, pasando de naturales a enteros, pues en el semigrupo $(N, +)$ la sustracción no era una operación interna. En cambio, en el grupo $(Z, +)$ ya es una operación interna la sustracción.

En general, en un semigrupo sólo puede efectuarse, en todo caso, la operación de definición del semigrupo, mientras que en un grupo también su operación inversa es interna.

Pero en el anillo Z, aunque $(Z, +)$ es grupo, $(Z, \cdot)$ sólo es semigrupo, por lo que la división no es siempre posible. Por ello vamos a ampliar de nuevo el concepto de número, pasando a otros números, los racionales, de los cuales se puede considerar a los enteros como un subconjunto.

Para expresar que existe un entero, -3, que multiplicado por el entero 4 es igual al entero -12, es decir, que -12 dividido por 4 es igual a -3, se escribe

$$(-12):4=-3$$

o bien

$$\frac{-12}{4}=-3$$

es decir,

$$\boxed{(-12):4=-3} \underset{\text{def}}{\iff} \boxed{(-3)\times 4=-12} \underset{\text{def}}{\iff} \boxed{\frac{-12}{4}=-3}$$

En general

$$a, b \in Z; \quad b \neq 0; \quad \boxed{a:b=h} \iff \boxed{hb=a} \iff \boxed{\frac{a}{b}=h}$$

Consideremos los cocientes

$$\frac{-12}{4};\quad \frac{6}{2};\quad \frac{0}{6};\quad \frac{-5}{-1};\quad \frac{2}{-2}$$

todos los cuales son números enteros, pues su dividendo es múltiplo del divisor.

Notemos que el cociente

$$\frac{-12}{4}$$

se ha expresado mediante una pareja ordenada de enteros, que también podría escribirse en la forma

$$(-12, 4)$$

si así se hubiera convenido. Es decir, $\frac{-12}{4}$ es una pareja cuya primera componente, -12, es un entero, y cuya segunda componente, 4, es un entero distinto de cero.

Sea Z^* el conjunto de los números enteros, excluido el cero, es decir, sea

$$\boxed{Z^* = Z - \{0\}}$$

Considerando a $\frac{-12}{4}$ como una pareja ordenada cuya primera componente, -12, es un entero y cuya segunda componente, 4, es un entero distinto de cero, puede escribirse

$$\frac{-12}{4} \in Z \times Z^*$$

Análogamente:

$$\frac{0}{6} \in Z \times Z^*;\quad \frac{2}{-2} \in Z \times Z^*;\quad \frac{-5}{-1} \in Z \times Z^*$$

• DEFINICIÓN 1.1: *A los elementos del conjunto producto*

$$Z \times Z^*$$

se les llama fracciones. Convendremos en escribir estas parejas en la forma

$$\frac{a}{b}$$

en vez de en la forma habitual (a, b). La primera componente, a, de la pareja se llama *numerador* y la segunda, b, *denominador*.

Dada la fracción

$$\frac{-12}{4}$$

al dividir el numerador por el denominador, se obtiene el entero -3.

En cambio

$$\frac{4}{6}$$

es una fracción cuyo numerador no es divisible por el denominador.

Observemos que si en las fracciones:

$$\frac{-12}{4};\quad \frac{-6}{2};\quad \frac{6}{-2};\quad \frac{-45}{15}$$

se divide el numerador por el denominador, a partir de todas ellas se obtiene el mismo entero -3.

EJERCICIOS

1.1 Compare la definición de Z^* que acaba de darse, con la definición de N^* que se dio en el ejemplo 1.4 del § 5.

1.2 Ponga ejemplos de fracciones cuyo numerador no es divisible por su denominador y otros en que lo sea.

1.3 Forme varias fracciones, tales que al dividir su numerador por el denominador se obtenga 5.

1.4 Compruebe, con varios ejemplos, que si al dividir el numerador por el denominador de las fracciones:

$$\frac{a}{b} \quad \text{y} \quad \frac{c}{d}$$

tales que

$$b|a \quad \text{y} \quad d|c$$

se obtiene el mismo entero, entonces se verifica

$$ad = cb$$

Observemos que cuando el entero b divide al a, con la notación

$$\frac{a}{b}$$

se designa el cociente exacto $a:b$, que es otro número entero, y también el par ordenado de enteros (a, b), es decir, la fracción $\frac{a}{b}$.

Generalicemos el ejercicio anterior:

• PROPOSICIÓN 1.1: *Dadas dos fracciones*

$$\frac{a}{b} \quad \text{y} \quad \frac{c}{d}$$

tales que

$$a=\dot{b} \qquad y \qquad c=\dot{d}$$

se verifica

$$\boxed{a:b=c:d} \iff \boxed{ad=cb}$$

suponiendo, como siempre, $b\neq 0\neq d$.

Demostración:

Comencemos probando que

$$a:b=c:d \implies ad=cb$$

Sea $a:b=c:d=h$.

Primer caso: Sea $h\neq 0$.

$$\left.\begin{array}{l} a:b=h \iff hb=a \iff \boxed{a=hb} \\ c:d=h \iff \boxed{hd=c} \end{array}\right.$$

$$\Downarrow$$

$$a(hd)=(hb)c$$

$$\Downarrow$$

$$(ad)h=(cb)h$$

$$\Downarrow$$

$$ad=cb$$

Segundo caso: $h=0$.

$$\left.\begin{array}{l} a:b=0 \iff 0\cdot b=a \implies a=0 \implies ad=0 \\ c:d=0 \iff 0\cdot d=c \implies c=0 \implies cb=0 \end{array}\right\} \implies ad=cb$$

Probemos ahora que, recíprocamente

$$ad=cb \implies a:b=c:d$$

Sea $a:b=k$.

$$\left.\begin{array}{l} a:b=k \iff kb=a \implies kbd=ad \\ \qquad\qquad \text{Por hipótesis: } ad=bc \end{array}\right\} \implies kbd=bc$$

$$\Downarrow \; b\neq 0$$

$$\left.\begin{array}{l} kd=c \iff c:d=k \\ \text{Por hipótesis: } a:b=k \end{array}\right\} \implies a:b=c:d$$

Este resultado sirve de base para establecer la siguiente relación entre fracciones:

* DEFINICIÓN 1.2: *Diremos que las fracciones*

$$\frac{a}{b} \quad \text{y} \quad \frac{c}{d}$$

son iguales y escribiremos

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

si, y sólo si, se verifica

$$ad=bc$$

El signo convencional empleado para designar esta relación es, pues, $=$. Abreviadamente:

$$\boxed{\frac{a}{b}=\frac{c}{d}} \underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \boxed{ad=bc}$$

es decir, las fracciones

$$\frac{a}{b} \quad \frac{c}{d}$$

están relacionadas, si al multiplicar los enteros situados en los extremos de la doble flecha roja se obtiene el mismo número entero que al multiplicar los situados en los extremos de la negra.

* EJEMPLO:

$$\frac{2}{-3}=\frac{-8}{12} \quad \text{pues} \quad 2\cdot 12=24=(-8)\cdot(-3)$$

EJERCICIOS

1.5 Compare la definición 1.2 con la definición 1.1 del § 10.

1.6 Escribir varias fracciones iguales a la fracción $\dfrac{-12}{-10}$

1.7 Encontrar el entero x**, tal que:**

$$\frac{-8}{6}=\frac{x}{-15}$$

• PROPOSICIÓN 1.2: *La relación de igualdad de fracciones,* de la definición 1.2, *es una relación de equivalencia.*

Demostración:

Reflexividad:

$$\frac{a}{b}=\frac{a}{b} \iff ab=ab$$

Simetría:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \iff ad=cb$$
$$\Downarrow$$
$$cb=ad \iff \frac{c}{d}=\frac{a}{b}$$

Transitividad:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \iff ad=cb \implies (ad)f=(cb)f \implies \boxed{afd=cbf}$$
$$\frac{c}{d}=\frac{e}{f} \iff cf=ed \implies (cf)b=(ed)b \qquad \boxed{\implies cbf=ebd}$$
$$\Downarrow$$
$$afd=ebd$$
$$\Downarrow$$
$$(af)d=(eb)d$$
$$\Downarrow \quad d\neq 0$$
$$\frac{a}{b}=\frac{e}{f} \underset{\text{def}}{\iff} af=eb$$

Por tanto, la igualdad de fracciones produce una clasificación en el conjunto $Z\times Z^*$ de las fracciones:

... ...
... ...

$\frac{-7}{4}$; $\frac{7}{-4}$; $\frac{14}{-8}$; $\frac{-21}{12}$; $\frac{28}{-16}$; ...

... ...

$\frac{2}{-3}$; $\frac{-2}{3}$; $\frac{-4}{6}$; $\frac{4}{-6}$; $\frac{12}{-18}$; $\frac{-20}{30}$; ...

... ...

$\frac{0}{1}$; $\frac{0}{3}$; $\frac{0}{-5}$; $\frac{0}{48}$; ...

... ...

$$\frac{3}{5};\quad \frac{-6}{-10};\quad \frac{9}{15};\quad \frac{-9}{-15};\ \cdots$$

$$\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots$$

$$\frac{1}{1};\quad \frac{2}{2};\quad \frac{-7}{-7};\quad \frac{25}{25};\ \cdots$$

$$\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots$$

$$\frac{3}{1};\quad \frac{-6}{-2};\quad \frac{9}{3};\quad \frac{27}{9};\quad \frac{-36}{-12};\ \cdots$$

$$\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots$$
$$\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots$$

Cada una de las clases se llama un número racional. El conjunto de los números racionales es, por tanto, *el conjunto cociente de* $Z \times Z^*$ *respecto de la* relación de equivalencia que hemos llamado *igualdad de fracciones.*

A la clase definida por la fracción

$$\frac{a}{b}$$

la representaremos por

$$\left\{\left\{\frac{a}{b}\right\}\right\}$$

• PROPOSICIÓN 1.3: *Amplificación de fracciones:* Si r es un entero, distinto de cero, se verifica

$$\frac{a}{b} = \frac{ra}{rb}$$

cualquiera que sea la fracción $\frac{a}{b}$.

• PROPOSICIÓN 1.4: *Simplificación de fracciones:* Si r es un entero tal que

$$r \mid a \quad \text{y} \quad r \mid b$$

entonces

$$\frac{a}{b} = \frac{a:r}{b:r}$$

EJERCICIOS

1.8 Ponga un ejemplo de cada una de las dos proposiciones anteriores y después demuéstrelas.

1.9 Diga si es correcto escribir

$$\frac{-1}{2} \in \left\{\left\{\frac{1}{-2}\right\}\right\}$$

• EJEMPLO 1.1: Dada la fracción

$$\frac{72}{-90}$$

como

$$72 \wedge (-90) = 18$$

simplifiquemos, dividiendo numerador y denominador por su m.c.d.:

$$\frac{72}{-90} = \frac{72:18}{(-90):18} = \frac{4}{-5}$$

En esta fracción el numerador y el denominador son dos enteros, primos entre sí. Si amplificamos esta fracción, multiplicando numerador y denominador por el entero (-1), se obtiene:

$$\frac{4}{-5} = \frac{4 \cdot (-1)}{(-5) \cdot (-1)} = \frac{-4}{5}$$

Hemos pasado así de la fracción

$$\frac{72}{-90}$$

a la fracción

$$\frac{-4}{5}$$

que es de la misma clase que aquélla, pero cuyo denominador es natural y primo con el numerador.

Las fracciones cuyo numerador es primo con el denominador se llaman *irreducibles.*

En general, en cada clase existe un representante cuyo denominador es natural y primo con el numerador. A tal fracción la llamaremos *representante canónico de la clase.*

EJERCICIOS

1.10 **Encontrar los representantes canónicos de las clases**

$$\left\{\left\{\frac{-28}{20}\right\}\right\}; \quad \left\{\left\{\frac{-225}{-150}\right\}\right\}; \quad \left\{\left\{\frac{62}{15}\right\}\right\}$$

1.11 **Demostrar que en cada clase existe un único representante canónico. ¿Cuántos representantes irreducibles existen?**

Consideremos la aplicación

$$Z \xrightarrow{F} Z \times Z^*$$

que asocia a cada número entero $r \in Z$ la fracción $\frac{r}{1}$.

Consideremos también la aplicación:

$$Z \times Z^* \xrightarrow{G} Z \times Z^*/=$$

que asocia a cada fracción $\frac{r}{s}$ la clase $\left\{\left\{\frac{r}{s}\right\}\right\}$. La aplicación producto de F y G asociará a cada entero r la clase $\left\{\left\{\frac{r}{1}\right\}\right\}$, como se indica en los es-

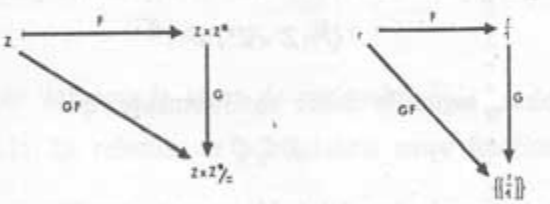


Figura 1.1

quemas de la figura 1.1. Así, por ejemplo, la aplicación GF asocia al entero -8 la clase $\left\{\left\{\frac{-8}{1}\right\}\right\}$

EJERCICIOS

1.12 **Probar que la aplicación GF es inyectiva.**

1.13 **Compare la figura 1.1 con la figura 1.3 del § 10.**

1.14 **¿Es la aplicación compuesta GF suprayectiva?**

Se tiene así una inyección, de Z en $Z \times Z^*/=$, que asocia:

$$\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots$$
$$\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots$$

$$-2 \longrightarrow \left\{\frac{-2}{1},\ \frac{2}{-1},\ \frac{-4}{2},\ \frac{6}{-3},\ \frac{10}{-5},\ \cdots\right\}$$

$$-1 \longrightarrow \left\{\frac{-1}{1},\ \frac{-5}{5},\ \frac{12}{-12},\ \frac{20}{-20},\ \cdots\right\}$$

$$0 \longrightarrow \left\{\frac{0}{1},\ \frac{0}{3},\ \frac{0}{-6},\ \frac{0}{115},\ \cdots\right\}$$

$$\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots$$
$$\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots$$

$$4 \longrightarrow \left\{\frac{4}{1},\ \frac{-12}{-3},\ \frac{-16}{-4},\ \frac{400}{100},\ \cdots\right\}$$

$$\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots$$
$$\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots$$

Como el conjunto imagen de esta inyección es el conjunto de las clases de forma $\left\{\left\{\frac{r}{1}\right\}\right\}$, donde $r \in Z$, la aplicación GF es una biyección de Z en el conjunto de los números racionales de la forma $\left\{\left\{\frac{r}{1}\right\}\right\}$, donde $r \in Z$. Esta biyección permite considerar a los enteros como un subconjunto de los racionales.

El conjunto de los números racionales se representa por Q, es decir,

$$Q = Z \times Z^*/=$$

pudiendo escribirse, según lo dicho anteriormente, que

$$Z \subset Q$$

lo que, unido a los resultados del § 10, permite escribir

$$N \subset Z \subset Q$$

De este modo se realiza la inmersión de los naturales en los enteros y de éstos en los racionales.

2. Grupo aditivo de los racionales

Vamos a definir la suma de racionales de modo que cuando se efectúe, en particular, con enteros, coincida con la suma de enteros.

Para ello, consideremos las fracciones

$$\frac{a}{b} \quad \text{y} \quad \frac{c}{d}$$

y supongamos que

$$b \mid a \quad \text{y} \quad d \mid c$$

de modo que

$$\frac{a}{b}=a:b=h; \qquad \frac{c}{d}=c:d=k$$

donde los enteros h y k son los cocientes respectivos. Se tiene:

$$\frac{a}{b}=h \iff a=bh \implies ad=(bh)d \implies \boxed{ad=(bd)h}$$

$$\frac{c}{d}=k \iff c=dk \implies cb=(dk)b \implies \boxed{cb=(bd)k}$$

$$\Downarrow$$

$$ad+cb=(bd)h+(bd)k$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{ad+cb}{bd}=h+k \iff ad+cb=bd(h+k)$$

es decir, se tiene

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+cb}{bd}$$

Este resultado, que ha sido probado para el caso de ser

$$b \mid a \quad \text{y} \quad d \mid c$$

sugiere cómo ha de definirse la suma de racionales.

* PROPOSICIÓN 2.1: La relación de equivalencia entre fracciones de la definición 1.2 verifica

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{a}{b}=\dfrac{a'}{b'}\\[2ex] \dfrac{c}{d}=\dfrac{c'}{d'}\end{array}\right\} \implies \frac{ad+cb}{bd}=\frac{a'd'+c'b'}{b'd'}$$

EJERCICIOS

2.1 Comprobar con un ejemplo la proposición anterior y demostrarla.

2.2 ¿Puede expresar el resultado de la proposición 2.1 diciendo que la relación de la definición 1.2 es compatible con la suma de fracciones? ¿Cómo habría de definir la suma de fracciones para afirmar esto?

• DEFINICIÓN 2.1: *Se llama suma de los números racionales*

$$\left\{\left\{\frac{a}{b}\right\}\right\} \quad \text{y} \quad \left\{\left\{\frac{c}{d}\right\}\right\}$$

al número racional

$$\left\{\left\{\frac{ad+cb}{bd}\right\}\right\}.$$

En otras palabras, para sumar dos números racionales α y β, tomemos un representante de cada clase y operemos como indica el esquema siguiente:

$$\begin{array}{rcl} \alpha & \longrightarrow & \dfrac{a}{b} \\ \beta & \longrightarrow & \dfrac{c}{d} \\ \hline \alpha+\beta & \longleftarrow & \dfrac{ad+cb}{bd} \end{array}$$

La proposición 2.1 afirma que la suma así obtenida no depende de los representantes elegidos.

PROPIEDADES DE LA SUMA DE RACIONALES:

Conmutatividad:

$$\forall\, \alpha, \beta \in Q \quad \boxed{\alpha+\beta=\beta+\alpha}$$

Demostración: Sea $\dfrac{a}{b}$ un representante de la clase α y sea análogamente $\dfrac{c}{d} \in \beta$. Se verifica:

$$\alpha+\beta=\left\{\left\{\frac{ad+cb}{bd}\right\}\right\} \quad \text{y} \quad \beta+\alpha=\left\{\left\{\frac{cb+ad}{db}\right\}\right\}$$

pero, por la conmutatividad de la suma de enteros, los numeradores de las fracciones

$$\frac{ad+cb}{bd} \quad \text{y} \quad \frac{cb+ad}{db}$$

son iguales, y, por conmutatividad del producto de enteros, sus denominadores son también iguales. Por tanto, por reflexividad de la relación de igualdad de fracciones, será

$$\frac{ad+cb}{bd}=\frac{cb+ad}{db}$$

luego

$$\alpha+\beta=\beta+\alpha$$

EJERCICIOS

2.3 **Enuncie y demuestre la propiedad uniforme de la suma de racionales.**

2.4 **Lo mismo para la asociativa.**

2.5 **¿Cuál es el elemento neutro de la suma de racionales?**

2.6 **¿Qué propiedad, de las anteriores, es la que permite afirmar que «si se suman miembro a miembro dos igualdades entre racionales, se obtiene otra igualdad»?**

2.7 **Diga cuál es el opuesto del racional**

$$\left\{\left\{\frac{a}{b}\right\}\right\}$$

y ponga un ejemplo.

De las consideraciones y ejercicios anteriores sigue

* TEOREMA 2.2: *$(Q, +)$ es un grupo conmutativo.*

EJERCICIOS

2.8 **Defina la sustracción de racionales, como se definió la sustracción de enteros.**

2.9 **Demuestre que para restar racionales basta sumar el minuendo con el opuesto del sustraendo.**

2.10 **Demuestre que el opuesto de la suma de dos racionales es igual a la suma de sus opuestos respectivos.**

2.11 **Enunciar y demotrar la ley cancelativa de la suma de racionales.**

2.12 **Resolver la ecuación**

$$\alpha+(\beta-x)=\gamma \qquad \textbf{donde} \qquad \alpha, \beta, \gamma \in Q$$

Para ello comience sustituyendo α, β y γ por tres racionales fijos y después resuélvala en general.

---

* PROPOSICIÓN 2.3: *La aplicación GF de la figura* 1.1 *es un homomorfismo del grupo $(Z, +)$ en el grupo $(Q, +)$.*

Esta afirmación justifica que el signo convencional + utilizado para suma de racionales sea el mismo utilizado para la suma de enteros.

EJERCICIOS

2.13 La proposición anterior es consecuencia inmediata de una afirmación hecha anteriormente. ¿De cuál?

2.14 Demuestre también directamente la proposición 2.3, de modo análogo a como se hizo en el esquema de la figura 2.2 del § 10.

2.15 Defina el valor absoluto de un racional y estudie sus propiedades.

2.16 Defina los números racionales positivos y negativos y estudie la regla de los signos de la suma de racionales.

2.17 Justifique las reglas habituales siguientes:

a) $r+\frac{a}{b}=\frac{rb+a}{b}=\frac{a}{b}+r$

b) $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-cb}{bd}$

c) $\frac{a}{b}-r=\frac{a-rb}{b}$

d) $r-\frac{a}{b}=\frac{rb-a}{b}$

e) $-\frac{a}{b}=\frac{-a}{b}=\frac{a}{-b}$

teniendo en cuenta que, en la notación habitual, $\frac{a}{b}$ representa, no a esta única fracción, sino a toda la clase $\left\{\left\{\frac{a}{b}\right\}\right\}$ y que el entero r coincide con el racional $\left\{\left\{\frac{r}{1}\right\}\right\}$, admitida la inclusión de Z en Q, como consecuencia de la inyección GF, indicada anteriormente, que permite identificar a los enteros con un subconjunto de los racionales.

2.18 Explique en qué consiste la reducción de fracciones a denominador común.

2.19 Explique en qué consiste la reducción de fracciones a mínimo denominador común. ¿Qué ventaja tiene sumar racionales, tomando representantes con denominador común mínimo?

3. Semigrupo multiplicativo de los números racionales

El producto de racionales también se define de modo que cuando se efectúe, en particular con enteros, coincida con el producto de enteros.

• PROPOSICIÓN 3.1: Dados $a, b, c, d \in Z$ tales que $b \mid a$; $d \mid c$

sean

$$\frac{a}{b}=a:b=h\in Z;\qquad \frac{c}{d}=c:d=k\in Z$$

Se verifica

$$\frac{ac}{bd}=(ac):(bd)=hk$$

es decir,

$$\boxed{\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}}$$

Demostración:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{a}{b}=h \iff a=bh\\[2mm] \dfrac{c}{d}=k \iff c=dk\end{array}\right\} \Longrightarrow ac=(bh)\,(dk) \Longrightarrow ac=(bd)\,(hk) \iff \frac{ac}{bd}=hk$$

Nótese que $b\neq 0\neq d \Longrightarrow bd\neq 0$, por ser Z de integridad.

* PROPOSICIÓN 3.2: Cualesquiera que sean las fracciones siguientes, se verifica:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{a}{b}=\dfrac{a'}{b'}\\[2mm] \dfrac{c}{d}=\dfrac{c'}{d'}\end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{ac}{bd}=\frac{a'c'}{b'd'}$$

EJERCICIOS

3.1 **Demostrar la proposición anterior, después de comprobarla con ejemplos.**

3.2 **Exprésela de otro modo.**

---

* DEFINICIÓN 3.1: *Se llama producto de los números racionales*

$$\left\{\left\{\frac{a}{b}\right\}\right\} \quad \text{y} \quad \left\{\left\{\frac{c}{d}\right\}\right\}$$

el número racional

$$\left\{\left\{\frac{ac}{bd}\right\}\right\}$$

EJERCICIOS

3.3 ¿Depende el producto así definido de los representantes elegidos?

3.4 Escriba y demuestre la propiedad uniforme del producto de racionales. Enúnciela de otro modo ahora.

3.5 Escriba y demuestre la propiedad conmutativa del producto de racionales. ¿De qué propiedades de los enteros es consecuencia?

3.6 Lo mismo para la asociativa.

3.7 ¿Cuál es el elemento neutro del producto de racionales?

3.8 Demostrar que todo racional, excepto el número racional nulo, posee inverso. Ponga ejemplos previamente.

• TEOREMA 3.3: $(Q, \cdot)$ *es un semigrupo conmutativo y con elemento unidad.*

•DEFINICIÓN 3.2: *Dados dos números racionales,*

$$\left\{\left\{\frac{a}{b}\right\}\right\} \quad \text{y} \quad \left\{\left\{\frac{c}{d}\right\}\right\}$$

el segundo de los cuales no es nulo, se llama cociente de $\left\{\left\{\frac{a}{b}\right\}\right\}$ *entre* $\left\{\left\{\frac{c}{d}\right\}\right\}$ *a otro racional que multiplicado por* $\left\{\left\{\frac{c}{d}\right\}\right\}$ *sea igual al racional* $\left\{\left\{\frac{a}{b}\right\}\right\}$.

Abreviadamente:

$$\left\{\left\{\frac{a}{b}\right\}\right\} : \left\{\left\{\frac{c}{d}\right\}\right\} = \left\{\left\{\frac{x}{y}\right\}\right\} \underset{\text{def}}{\iff} \left\{\left\{\frac{x}{y}\right\}\right\} \cdot \left\{\left\{\frac{c}{d}\right\}\right\} = \left\{\left\{\frac{a}{b}\right\}\right\}$$

Notación: Es lo mismo escribir $\frac{a}{b}$ que escribir a/b.

Es lo mismo escribir

$$\left\{\left\{\frac{a}{b}\right\}\right\} : \left\{\left\{\frac{c}{d}\right\}\right\} \quad \text{que} \quad \frac{\left\{\left\{\frac{a}{b}\right\}\right\}}{\left\{\left\{\frac{c}{d}\right\}\right\}}$$

Habitualmente se escribe $\frac{a}{b}$ para representar a la clase $\left\{\left\{\frac{a}{b}\right\}\right\}$. El inverso de $\left\{\left\{\frac{a}{b}\right\}\right\}$ se escribe $\left\{\left\{\frac{a}{b}\right\}\right\}^{-1}$, es decir:

$$\left\{\left\{\frac{a}{b}\right\}\right\}^{-1} = \left\{\left\{\frac{b}{a}\right\}\right\}$$

* PROPOSICIÓN 3.4:

$$\left\{\left\{\frac{a}{b}\right\}\right\} : \left\{\left\{\frac{c}{d}\right\}\right\} = \left\{\left\{\frac{a}{b}\right\}\right\} \cdot \left\{\left\{\frac{c}{d}\right\}\right\}^{-1}$$

es decir, *para dividir se multiplica por el inverso.*

EJERCICIOS

3.9 **Compare la proposición 3.4 con la proposición 2.3 del § 10.**

3.10 **Demuestre la proposición 3.4, ayudándose de la demostración de la proposición 2.3 del § 10.**

3.11 **Si se designa por Q^* el conjunto de los racionales no nulos, demostrar que $(Q^*, \cdot)$ es un grupo conmutativo.**

3.12 **Demuestre que el inverso del producto de dos racionales no nulos es igual al producto de sus inversos.**

3.13 **Escriba y demuestre la ley cancelativa del producto de racionales. ¿Puede simplificarse, dividiendo ambos miembros, de una igualdad de racionales, por un racional cualquiera?**

3.14 **Resuelva la ecuación**

$$\alpha\beta x = \gamma \qquad \text{donde} \qquad \alpha, \beta, \gamma \in Q;$$

siendo α y β no nulos.

---

* PROPOSICIÓN 3.5: *La aplicación GF, de la figura* 1.1, *es un homomorfismo del semigrupo* $(Z, \cdot)$ *en el* $(Q, \cdot)$.

EJERCICIOS

3.15 **Demostrar la proposición anterior.**

3.16 **Justifique las reglas habituales siguientes:**

a) $r \cdot \frac{a}{b} = \frac{ra}{b} = \frac{a}{b} \cdot r$

b) $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$

c) $\frac{a}{b} : r = \frac{a}{br}$

d) $r : \frac{a}{b} = \frac{rb}{a}$

teniendo en cuenta que con $\frac{a}{b}$ se suele representar el racional $\left\{\left\{\frac{a}{b}\right\}\right\}$ y el entero r coincide con el racional $\left\{\left\{\frac{r}{1}\right\}\right\}$, admitida la inclusión:

$$Z \subset Q.$$

4. Cuerpo de los números racionales

DISTRIBUTIVIDAD DEL PRODUCTO RESPECTO DE LA SUMA DE RACIONALES:

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma; \qquad \forall\, \alpha, \beta, \gamma \in Q$$

EJERCICIOS

4.1 Comprobar con varios ejemplos la propiedad anterior.

4.2 Demostrarla.

• TEOREMA 4.1: $(Q, +, \cdot)$ *es un cuerpo.*

EJERCICIOS

4.3 Demostrar el teorema anterior, teniendo en cuenta la definición 8.4 del § 5.

4.4 ¿Es conmutativo el cuerpo $(Q, +, \cdot)$?

4.5 Demuestre que «el producto de dos racionales no nulos es otro racional no nulo», ayudándose del ejercicio 4.3 del § 10.

4.6 Demostrar que el enunciado del ejercicio anterior es equivalente a la ley cancelativa del producto. Razone para ello como en el párrafo 4 del § 10.

4.7 Demuestre que todo cuerpo conmutativo es un dominio de integridad, en el sentido de la definición 4.2 del § 10.

En el anillo Z de los enteros sólo podían efectuarse siempre tres operaciones, la adición y su operación inversa, la sustracción, y la multiplicación, ya que Z tenía estructura de grupo respecto de la suma y de semigrupo respecto del producto. En Q también es posible siempre la división de un racional cualquiera entre otro no nulo, ya que los racionales no nulos forman grupo multiplicativo.

• PROPOSICIÓN 4.2: *La aplicación GF, de la figura* 1.1, *es un homomorfismo del anillo* $(Z, +, \cdot)$ *en el anillo* $(Q, +, \cdot)$.

EJERCICIO

4.8 Demostrar la proposición anterior, teniendo en cuenta la definición 8.5 del § 5. ¿Es isomorfismo?

---

5. Ordenación de racionales

• DEFINICIÓN 5.1: *Diremos que la fracción*

$$\frac{a}{b}$$

es positiva si los enteros a y b son del mismo signo.

Si $a=0$, *la fracción* $\frac{a}{b}$ *se llama nula. Las fracciones que no son positivas, ni nulas, se llaman negativas.*

Se consigue de este modo efectuar una partición de $Z \times Z^*$, en fracciones positivas, nulas y negativas.

• EJEMPLOS:

$\frac{1}{5}$ y $\frac{-3}{-10}$ son fracciones positivas

$\frac{0}{20}$ y $\frac{0}{-5}$ son nulas

$\frac{3}{-7}$ y $\frac{-4}{6}$ son negativas

EJERCICIO

5.1 Ponga otros ejemplos.

• PROPOSICIÓN 5.1:

Si $\frac{a}{b}$ *es una fracción positiva* (respectivamente negativa o nula) *y* $\frac{c}{d}$ *es igual a la fracción* $\frac{a}{b}$, en el sentido de la definición 1.2, *entonces* $\frac{c}{d}$ *es positiva* (respectivamente negativa o nula).

EJERCICIOS

5.2 Compruebe con ejemplos la proposición anterior.

5.3 Demuéstrela.

5.4 Demuestre que todas las fracciones que forman un número racional son del mismo tipo, es decir, todas positivas, todas negativas o todas nulas.

• DEFINICIÓN 5.2: *Un número racional se llama positivo* (respectivamente negativo o nulo) *si uno cualquiera de sus representantes es positivo* (respectivamente negativo o nulo).

El conjunto de los números racionales positivos y nulos se designan por Q_+.

EJERCICIOS

5.5 Ponga ejemplos de números racionales positivos, negativos y nulos.

5.6 ¿Qué estructura posee Q_+ respecto de la suma y del producto?

• DEFINICIÓN 5.3: Si $\alpha, \beta \in Q$

$$\boxed{\alpha \leqslant \beta} \underset{\text{def}}{\iff} \boxed{\beta - \alpha \in Q_+}$$

EJERCICIOS

5.7 Comparar los siguientes racionales, mediante la relación $\leqslant$:

a) $\frac{5}{3}$ y $\frac{8}{5}$

b) $\frac{-3}{4}$ y $\frac{2}{3}$

c) $\frac{2}{7}$ y $\frac{1}{3}$

donde, como se ha indicado anteriormente, con cada fracción se desea designar la clase a que pertenece.

5.8 **Demostrar que si $\alpha, \beta \in Q_+$, siendo**

$$\alpha = \left\{\left\{\frac{a}{b}\right\}\right\} \quad \text{y} \quad \beta = \left\{\left\{\frac{c}{d}\right\}\right\}$$

$$\alpha \leqslant \beta \iff ad \leqslant cb$$

5.9 **Demostrar que la relación $\leqslant$, entre racionales, es de orden total.**

5.10 **Demostrar que la relación $\leqslant$ es compatible con la suma, pero no con el producto. Por ello decimos que el cuerpo $(Q, +, \cdot)$ está totalmente ordenado por la relación $\leqslant$.**

5.11 **Demostrar que si $\gamma \in Q_+$**

$$\alpha \leqslant \beta \implies \gamma\alpha \leqslant \gamma\beta$$

5.12 **Explicar el significado de**

$$\alpha < \beta$$

donde α y β son números racionales.

---

* PROPOSICIÓN 5.2: *Sean* $\alpha, \beta \in Q$

$$\alpha < \beta \implies \alpha < \frac{\alpha+\beta}{2} < \beta$$

Demostración:

$$\alpha < \beta \implies \begin{cases} \alpha+\alpha < \beta+\alpha \implies 2\alpha < \boxed{\begin{matrix}\alpha+\beta \\ \alpha+\beta\end{matrix}} < 2\beta \\ \alpha+\beta < \beta+\beta \implies \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{2\alpha < \alpha+\beta < 2\beta}$$

$$\Downarrow \text{ ejercicio 9.1}$$

$$\boxed{\frac{1}{2}2\alpha < \frac{1}{2}(\alpha+\beta) < \frac{1}{2}2\beta}$$

Nótese que, como $N \subset Z \subset Q$, será

$$2 = \left\{\left\{\frac{2}{1}\right\}\right\}$$

EJERCICIOS

5.13 Demostrar que

$$\frac{a}{b}<\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$$

Ponga ejemplos, previamente a la demostración.

5.14 Demostrar que entre dos números racionales existen infinitos números racionales, como consecuencia de la proposición 5.2, o del ejercicio anterior.

• PROPOSICIÓN 5.3: *Dados dos números racionales positivos, α y β, tales que*

$$0<\alpha<\beta$$

existe un número natural n, tal que

$$n\alpha>\beta$$

Demostración: Sea

$$0<\alpha<\beta$$

Por ser $\alpha \neq 0$, existe el número racional α^{-1}, inverso de α. Por ser α un racional positivo, también será α^{-1} positivo. Como β es positivo, también $\beta\cdot\alpha^{-1}$ será positivo. Tomemos una fracción perteneciente al racional $\beta\cdot\alpha^{-1}$, cuyo numerador y denominador sean enteros positivos, es decir, naturales ambos, lo que es posible, por ser $\beta\cdot\alpha^{-1}$ positivos.

Sea

$$\beta\cdot\alpha^{-1}=\frac{a}{b} \qquad a,b\in N$$

Si al efectuar la división entera de a entre b, obtenemos el cociente c y el resto r, será:

$$\begin{array}{r|l} a & b \\ \hline r & c \end{array}; \qquad r<b; \qquad a=bc+r$$

$$r<b \Rightarrow \underbrace{bc+r}_{a}<bc+b=b(c+1) \Rightarrow a<b(c+1)$$

$$\Big\Downarrow \text{ multiplicando por } \frac{1}{b} \text{ y teniendo en cuenta el ejercicio 5.10}$$

$$\beta\cdot\alpha^{-1}=\frac{a}{b}<c+1$$

Llamando n al número natural $c+1$, es decir, al racional $\dfrac{c+1}{1}$, se tiene ya un número natural n, tal que

$$\beta\cdot\alpha^{-1}<n$$

luego, multiplicando por α ambos miembros de la desigualdad, teniendo en cuenta el ejercicio 5.11, quedará

$$\beta<n\alpha$$

EJERCICIO

5.15 Encontrar un número natural n, tal que

$$n \cdot \frac{2}{5} > \frac{36}{8}$$

¿Cuántas soluciones tiene el problema? ¿Cuál es la menor de ellas?

El enunciado de la proposición 5.3 se expresa también diciendo que *el semigrupo* $(Q_+, +)$ *es arquimediano*, en memoria del matemático griego ARQUÍMEDES.

6. Representación gráfica de números racionales

Sea una recta r. Vamos a representar a los números racionales mediante

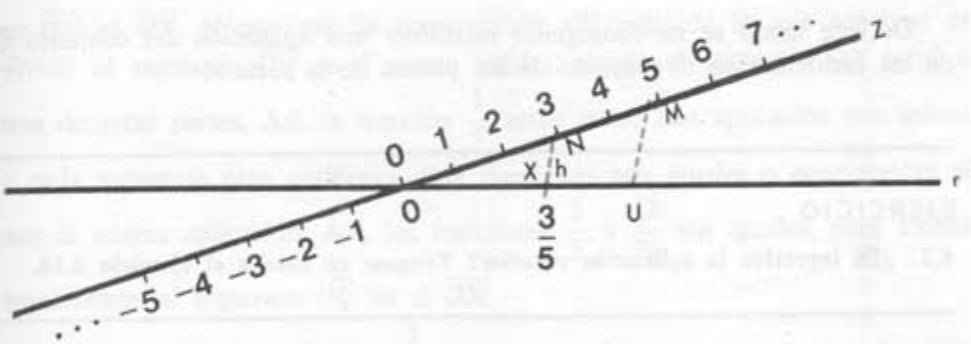


Figura 6.1

puntos de esta recta. Para ello elijamos otra recta auxiliar z, que corte a la recta r. Considerando a ambas rectas como conjuntos de puntos, sea

$$z \cap r = O$$

es decir, sea O el punto de intersección de ambas rectas. Representemos a los números enteros sobre la recta auxiliar z, de modo que el entero nulo se represente sobre el punto O, como se indica en la figura 6.1. Elijamos un punto U, distinto de O, sobre la recta r. Para representar ahora, por ejemplo,

al número racional $\frac{-6}{-10}$ tomemos el representante canónico de esta clase, que es $\frac{3}{5}$, según se indicó en el párrafo 1. Sea M el punto de la recta auxiliar z, representativo del denominador, 5, de la fracción $\frac{3}{5}$, y sea N el punto, de la recta auxiliar z, representativo del numerador 3, de la fracción $\frac{3}{5}$. Tracemos por el punto N una recta h, paralela al segmento $\overline{MU}$. El punto, X, de intersección de las rectas h y r, representa al número racional que estamos considerando.

EJERCICIO

6.1 Representar gráficamente los números racionales siguientes:

$$\frac{2}{3},\ 1,\ \frac{-2}{3},\ 0,\ \frac{7}{-2},\ \frac{-4}{4}$$

De este modo se ha conseguido establecer una aplicación del conjunto Q de los racionales en el conjunto de los puntos de la recta r.

EJERCICIO

6.2 ¿Es inyectiva la aplicación anterior? Téngase en cuenta el ejercicio 2.18.

Más adelante veremos que esta aplicación no es biyección.

7. Metodología de las fracciones ordinarias y decimales

La forma actual de introducir el concepto de fracción consiste en considerar a la fracción como un operador o aplicación. Así, la fracción $\frac{4}{6}$ actúa sobre el círculo de la figura 7.1, indicando que se ha de partir el círculo en 6 partes iguales y se han de considerar 4 de estas partes, con lo que se tiene

el trozo de círculo rayado en la figura 7.1. La fracción $\frac{2}{3}$ es equivalente a la fracción $\frac{4}{6}$, pues al actuar sobre el círculo anterior da lugar al mismo trozo de círculo, como se indica en rojo en la figura 7.1.

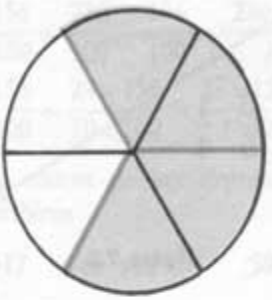


Figura 7.1

Del mismo modo, en la representación gráfica indicada en el párrafo anterior, la fracción $\frac{3}{5}$ se considera como una aplicación que asocia al segmento $\overline{OU}$ el $\overline{OX}$. Nótese que la construcción allí indicada lo que consigue es dividir al segmento $\overline{OU}$ en 5 partes iguales, siendo el segmento $\overline{OX}$ igual a tres de estas partes. Así, la fracción $\frac{3}{5}$ actúa como una aplicación que asocia a cada segmento otro segmento. Dos fracciones son iguales o equivalentes si son la misma aplicación. Así, las fracciones $\frac{3}{5}$ y $\frac{12}{20}$ son iguales, pues ambas transforman al segmento $\overline{OU}$ en el $\overline{OX}$.

Análogamente, la fracción $\frac{5}{7}$ puede considerarse como una aplicación que asocia a cada número natural n, múltiplo de 7, un natural múltiplo de 5 (*)

$$n \xrightarrow{\frac{5}{7}} (5n):7$$

La reducción de fracciones a común denominador suele anteponerse, en las exposiciones elementales, a la definición de adición de racionales.

(*) En este sentido puede verse el interesante trabajo didáctico del Prof. CALERO, *El número racional*, publicado en el número 153 de la «Revista de Enseñanza Media».

Considerando, como hemos indicado, a las fracciones como aplicaciones, el producto aparece como aplicación compuesta. Así, de acuerdo con el esquema de la figura 7.2,

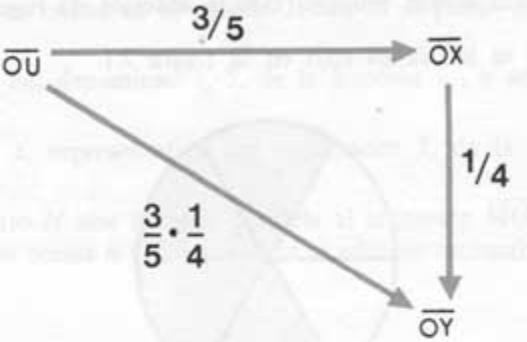


Figura 7.2

el producto $\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{4}$ aparece como aplicación producto de la aplicación $\frac{3}{5}$ por la aplicación $\frac{1}{4}$

En las exposiciones elementales suelen estudiarse únicamente los números racionales positivos.

Las regletas de Cuisenaire también son útiles para una primera introducción a los racionales. Las fracciones vienen representadas por parejas de regletas. Su estudio puede verse en el libro V de la *Aritmética con números en color* del profesor GATTEGNO.

Las fracciones cuyo denominador es una potencia de 10 se llaman *fracciones decimales*. Ejemplos de fracciones decimales son:

$$\frac{23}{10},\quad \frac{156}{100},\quad \frac{37}{1000},\quad \frac{148}{10^5}$$

Los números racionales, algunos de cuyos representantes son fracciones decimales, se llaman números racionales decimales. Como es sabido, la forma habitual de escribir los números racionales decimales es mediante sus expresiones decimales, sirviéndose de una coma en lugar apropiado. Ejemplos:

$$\frac{23}{10}=2{,}3;\quad \frac{156}{100}=1{,}56;\quad \frac{37}{1000}=0{,}037;\quad \frac{148}{10^5}=0{,}00148$$

Nótese que nos limitamos así a considerar expresiones decimales con un número finito de cifras decimales. Más adelante, en el § siguiente, trataremos el caso general de expresiones decimales con infinitas cifras decimales.

Los decimales son los números racionales más utilizados en la vida corriente. Por ejemplo, al actuar el número decimal 0,1 sobre el *metro* obtenemos el *decímetro;* al actuar el decimal 0,01 sobre el *metro* obtenemos el *centímetro*, etc. Los números racionales decimales, y en general los racio-

nales, han surgido en la Humanidad como consecuencia del problema de la medida, que estudiaremos más adelante.

Las operaciones con las expresiones decimales que estamos considerando, con sus reglas para situar las comas, aparecen como consecuencia de considerar a estos decimales como caso particular de racionales.

- EJEMPLOS:

$$2{,}3+1{,}56=\frac{23}{10}+\frac{156}{100}=\frac{230}{100}+\frac{156}{100}=\frac{230+156}{100}=\frac{386}{100}=3{,}86$$

$$2{,}3\times 1{,}56=\frac{23}{10}\times\frac{156}{100}=\frac{23\times 156}{10\times 100}=\frac{23\times 156}{1000}=\frac{3588}{1000}=3{,}588$$

Es aconsejable poner las comas de las expresiones decimales abajo y no arriba, es decir, deberá escribirse

30,517 en vez de ~~30'517~~

En algunos idiomas (inglés) la coma se sustituye por un punto, escribiendo

30.51 lo que nosotros escribimos 30,51

Una situación muy utilizada, que permite considerar directamente los números racionales decimales mediante sus expresiones decimales, sin estudiar los restantes racionales, consiste en considerar papeles cuadrados (figura 7.3)

Figura 7.3

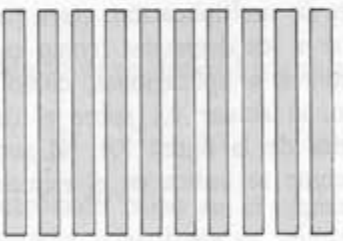


Figura 7.4

Figura 7.5

que pueden partirse en diez tiras iguales, como indica la figura 7.4, cada una de la cuales es una décima de cuadrado, que a su vez puede partirse en diez trozos (figura 7.5), cada uno de los cuales es una centésima de cuadrado, etc.

Así, el conjunto de papeles y trozos de la figura 7.6 puede indicarse

Figura 7.6

en la forma

Cuadrados	*Décimas*	*Centésimas*
2	3	5

o bien

2	3	5

lo que abreviadamente se escribe

$$2{,}35$$

Nótese la similitud de esta forma de representar los decimales con la indicada para sistemas de numeración en el § 9.

La suma es así inmediata. Sumemos 2,3 y 1,56:

2,3 →	2	3	0
1,56 →	1	5	6
3,86 ←	3	8	6

pero, en cambio, no lo es la multiplicación, pues para presentarla razonadamente hemos de considerar a los decimales (como caso particular de racionales que son) como operadores o aplicaciones, como se ha indicado al principio de este párrafo. Así, al actuar 0,1 sobre el cuadrado de la figura 7.3 se obtiene la décima o tira de la figura 7.4; al actuar 0,1 sobre la décima se obtiene la centésima, como se indica en el esquema de la figura 7.7

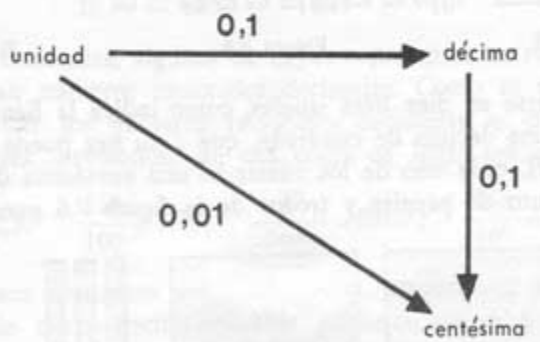


Figura 7.7

es decir,

$$0{,}1 \times 0{,}1 = 0{,}01$$

Reiterando el proceso se llega a:

$$0{,}01 \times 0{,}1 = 0{,}001$$
$$0{,}001 \times 0{,}1 = 0{,}0001$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

La asociatividad del producto de aplicaciones permite establecer, como se indica en la figura 7.8, el resultado:

$$0{,}01 \times 0{,}01 = 0{,}0001$$

y otros similares.

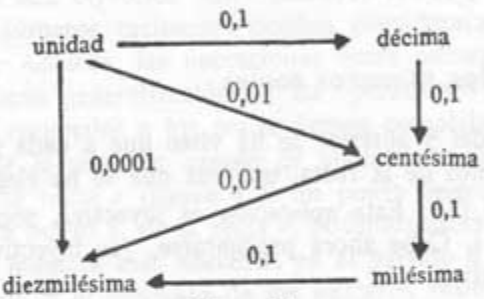


Figura 7.8

Se introduce ahora el producto de un decimal por un natural:

$$32 \xrightarrow{0{,}1} 3{,}2$$

lo que puede justificarse razonando como en el ejercicio 17.8 del § 9 y teniendo en cuenta que el operador consistente en multiplicar por 0,1 es el inverso del consistente en multiplicar por 10.

Ahora el producto de dos decimales no presenta dificultad, admitiendo la conmutatividad y asociatividad del producto de racionales:

$$2{,}3 \times 1{,}56 = (0{,}1 \times 23) \times (0{,}01 \times 156) = (0{,}1 \times 0{,}01) \times (23 \times 156) =$$
$$= 0{,}001 \times 3588 = 3{,}588$$

Obsérvese finalmente que las operaciones con decimales escritas en base decimal no son más simples ni más complicadas que las operaciones con decimales en base cuatro, por ejemplo, donde cada cuatro centenas formarán una decena, etc. Muchos autores recomiendan operar con decimales en otras bases, al mismo tiempo que en base diez. Háganse algunos ejercicios en este sentido y pasar decimales escritos en otras bases a base diez, y recíprocamente. Nótese que el problema es el mismo de cambio de base de naturales, indicado en el § 9.

12 ULTIMAS AMPLIACIONES DEL CONCEPTO DE NUMERO

1. Conjunto de los números reales

En el párrafo 6 del § anterior se ha visto que a cada número racional se puede asociar un punto de la recta, una vez que se ha elegido un origen O y un segmento unidad $\overline{OU}$. Esta aplicación es inyectiva, según se probó en el ejercicio 6.2 del § 11. Cabe ahora preguntarse, ¿es biyectiva esta aplicación? La respuesta es negativa.

Para verlo consideremos el segmento $\overline{OA}$, igual a la diagonal de un cuadrado de lado el segmento unidad $\overline{OU}$ (figura 1.1). Por el teorema de Pitá-

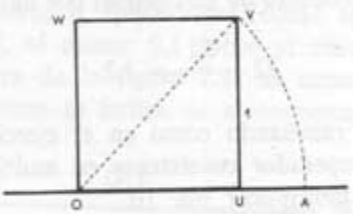


Figura 1.1

goras, la medida del segmento $\overline{OA}$ es $\sqrt{2}$. El número $\sqrt{2}$ no es racional, pues si existiera un racional igual a $\sqrt{2}$ y fuera $\frac{a}{b}$ una fracción irreducible perteneciente a ese racional, tendríamos

$$\frac{a}{b}=\sqrt{2} \Longrightarrow \frac{a^2}{b^2}=2 \Longrightarrow 2b^2=a^2 \Longrightarrow b^2 \mid a^2 \Longrightarrow b^2 \wedge a^2=b^2 \Longrightarrow b^2=1$$

$$\frac{a}{b} \text{ irreducible} \Longrightarrow a \wedge b=1 \Longrightarrow a^2 \wedge b^2=1$$

$$a^2=2$$

¡Absurdo! Pues no existe ningún número entero, a, cuyo cuadrado sea igual a 2.

Por tanto, hay puntos en la recta que no son imagen, en la aplicación inyectiva que estamos tratando, de ningún número racional. Si se desea que cada punto de la recta sea imagen de un número hemos de volver a ampliar

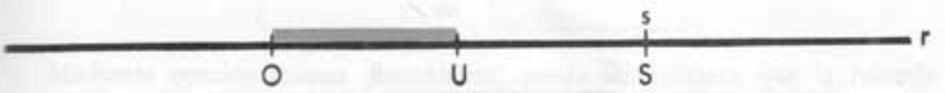


Figura 1.2

el concepto de número. Los nuevos números se llaman *reales* y se definen de modo que cada punto de la recta sea imagen de un número real, es decir, de modo que exista una biyección entre números reales y puntos de la recta. De este modo los números racionales pueden considerarse como un subconjunto de los reales. Además, las operaciones entre números reales se definirán de modo que sean generalización de las operaciones con racionales.

Al pasar de los racionales a los reales hemos completado la recta, ya que ahora cada punto de la recta es imagen de un número real o, en otras palabras, fijados sobre la recta r (figura 1.2) un punto origen O y un punto U, distinto de O, a cada punto S, de la recta r, podemos asociar un número real s, en la forma que se indicará más adelante, en el párrafo 6 de este §.

Si designamos por R al conjunto de los números reales y por r a la recta de la figura 1.2, considerada como conjunto de puntos, se tiene, según lo dicho anteriormente, una biyección

$$b: R \longrightarrow r$$

que asocia a cada número real s un punto $S \in r$. Al número real s se le llama la *abscisa* del punto S.

2. Grupo aditivo de los números reales

Consideremos sobre la recta r *segmentos orientados*. Los segmentos orientados $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BA}$ se consideran distintos, pues tienen distinta orientación o sentido. Diremos que A es el origen y B el extremo del segmento orientado $\overrightarrow{AB}$. Un segmento orientado viene definido por una pareja ordenada de puntos:

$$(A, B) \longrightarrow \overrightarrow{AB}$$

Por tanto, cada pareja ordenada de puntos de la recta r define un segmento orientado de la recta r. De este modo, a los segmentos orientados de la recta r se les puede considerar como elementos del conjunto producto $r \times r$.

Vamos a establecer una relación entre los segmentos orientados de la recta r. Para ello consideremos una recta auxiliar a, paralela a la recta r y distinta de ella (figura 2.1).

Sea O' un punto fijo de la recta a. A cada segmento orientado $\overrightarrow{AB}$, de la recta r, podemos asociar un punto de la recta auxiliar a, del siguiente modo: tracemos por B una recta b paralela al segmento $\overline{AO'}$ y consideremos el punto

$$B' = b \cap a$$

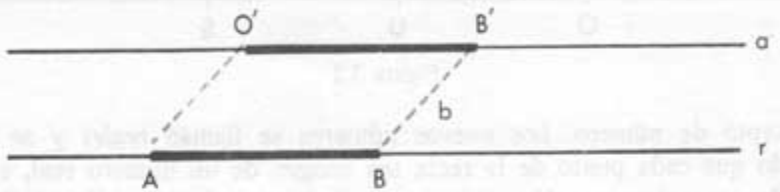


Figura 2.1

De este modo hemos asociado al segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ el punto $B' \in a$. Notemos que tenemos así una aplicación

$$f : r \times r \longrightarrow a$$

ya que $\overrightarrow{AB} \in r \times r$ y $B' \in a$. Se tiene, pues:

$$f(\overrightarrow{AB}) = B'$$

En la figura 2.2 se muestra la construcción del punto imagen del segmento orientado $\overrightarrow{CD}$ en la aplicación f, es decir, del punto $f(\overrightarrow{CD}) = D'$.

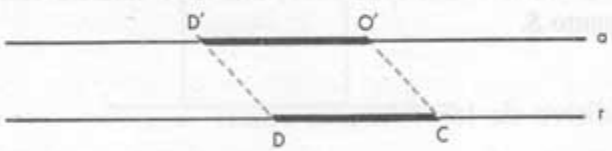


Figura 2.2

Dos segmentos orientados, $\overrightarrow{EF}$ y $\overrightarrow{GH}$, diremos que están relacionados (figura 2.3), si sus imágenes en la aplicación f coinciden.

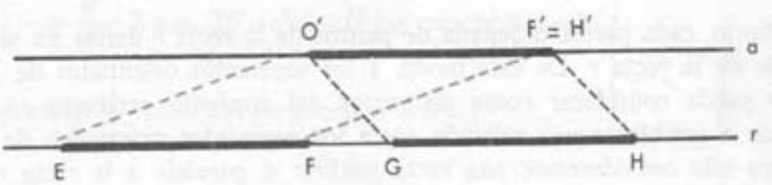


Figura 2.3

Por tanto, si $\sim$ es el signo convencional empleado para designar esta relación, tendremos

$$\boxed{\overrightarrow{EF} \sim \overrightarrow{GH}} \underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \boxed{f(\overrightarrow{EF}) = f(\overrightarrow{GH})}$$

Mediante consideraciones geométricas, puede demostrarse que la relación $\sim$ es de equivalencia e independiente de la recta auxiliar a elegida. A las clases producidas por esta relación de equivalencia les llamaremos *vectores*. Por tanto, los vectores son los elementos del conjunto cociente:

$$r \times r/\sim$$

Designemos por V al conjunto de los vectores de la recta r. Al vector definido por el segmento orientado $\overrightarrow{EF}$ lo representaremos por $\{\{\overrightarrow{EF}\}\}$. A cada punto S de la recta r (figura 1.2) se puede asociar el vector $\{\{\overrightarrow{OS}\}\}$, con lo que se obtiene una aplicación:

$$r \xrightarrow{c} V$$

ya que $S \in r$ y $\{\{\overrightarrow{OS}\}\} \in V$, que es biyectiva. Si consideramos ahora la aplicación compuesta de la aplicación:

$$R \xrightarrow{b} r$$

definida al final del párrafo anterior, y la aplicación c, que se acaba de definir, se tiene una aplicación, esquematizada en la figura 2.4, que asocia a cada

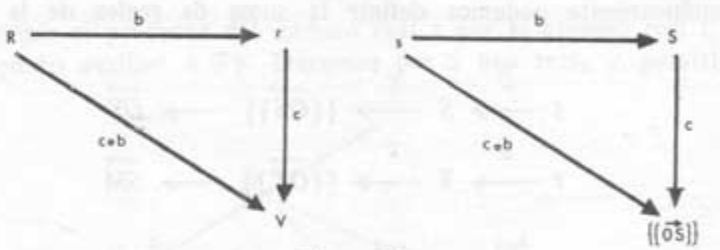


Figura 2.4

número real s un vector $\{\{\overrightarrow{OS}\}\}$, perteneciente a V. Como las aplicaciones b y c son biyectivas, también la aplicación:

$$R \xrightarrow{c \circ b} V$$

será una biyección.

Definamos ahora la suma de números reales. Sean s y t dos números reales. Sea

$$b(s)=S; \qquad b(t)=T$$

$$c(S)=\{\{\overrightarrow{OS}\}\}; \qquad c(T)=\{\{\overrightarrow{OT}\}\}$$

Tomemos el representante del vector $\{\{\overrightarrow{OT}\}\}$, cuyo origen es el punto S. Sea M el extremo de tal segmento orientado, es decir, sea

$$\overrightarrow{SM} \in \{\{\overrightarrow{OT}\}\}$$

El punto M se construye como se indica en la figura 2.5, de tal modo que

$$\overrightarrow{SM} \sim \overrightarrow{OT}$$

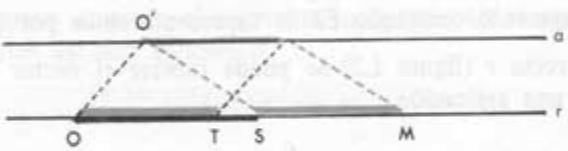


Figura 2.5

Sea m el número real tal que

$$b(m)=M$$

Por definición:

$$\boxed{m=s+t}$$

Esquemáticamente podemos definir la suma de reales de la forma siguiente:

$$s \xrightarrow{b} S \xrightarrow{c} \{\{\overrightarrow{OS}\}\} \longrightarrow \overrightarrow{OS}$$

$$t \xrightarrow{b} T \xrightarrow{c} \{\{\overrightarrow{OT}\}\} \longrightarrow \overrightarrow{SM}$$

$$s+t \xleftarrow{b^{-1}} M \xleftarrow{c^{-1}} \{\{\overrightarrow{OM}\}\} \longleftarrow \overrightarrow{OM}$$

donde c^{-1} y b^{-1} son las aplicaciones inversas de las biyecciones c y b, respectivamente.

Utilizando propiedades geométricas puede demostrarse que la suma de números reales así definida es uniforme, conmutativa, asociativa, posee elemento neutro o cero y cada número real posee un opuesto, por lo que se puede afirmar que $(R, +)$ *es un grupo conmutativo.*

EJERCICIOS

2.1 Determinar sobre la figura 2.5, el punto $H \in r$, tal que

$$b(0)=H$$

donde 0 es el número real nulo.

2.2 Determinar, sobre la figura 2.5, el punto $S' \in r$, tal que

$$b(-s)=S'$$

donde $-s$ es el número real opuesto del número real s, tal que

$$b(s)=S,$$

comprobando que 0 es el punto medio del segmento $\overline{SS'}$.

Las propiedades geométricas que permiten demostrar las propiedades indicadas anteriormente y otras que se citarán más adelante pueden encontrarse, si el lector está interesado en ello, en el libro: (*).

3. Multiplicación de números reales

Sea O el origen y U otro punto, distinto de O, de la recta r, de la figura 3.1. Sean S y T dos puntos de r, tales que

$$b(s)=S; \qquad b(t)=T$$

Para definir el producto del número real s por el número real t, consideremos el punto auxiliar $A \notin r$. Tracemos por S una recta x, paralela al seg-

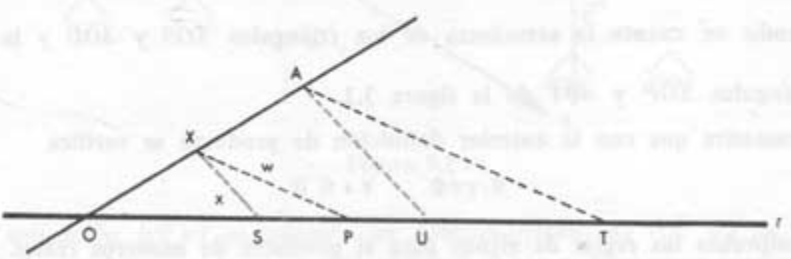


Figura 3.1

(*) HILBERT, *Fundamentos de la Geometría*, Publicaciones del Instituto Jorje Juan. Madrid, 1953.

mento $\overline{AU}$. Sea X el punto de intersección de la recta x y la recta OA. Tracemos por el punto X una recta w, paralela al segmento $\overline{AT}$. Sea

$$w \cap r = P$$

y sea p el número real tal que

$$b(p) = P$$

Por definición

$$\boxed{s \cdot t = p}$$

Esquemáticamente:

$$\left.\begin{array}{l} s \xrightarrow{b} S \\ t \xrightarrow{b} T \end{array}\right\} \text{construcción anterior} \longrightarrow P \xrightarrow{b^{-1}} p$$

Utilizando propiedades geométricas puede demostrarse que el producto así definido no depende del punto auxiliar A elegido, es decir, la uniformimidad, así como la conmutatividad y asociatividad.

EJERCICIOS

3.1 **Comprobar, mediante la definición anterior, que el punto $b^{-1}(U)$ es el elemento unidad del producto de reales.**

3.2 **Dado un punto $S \in r$, tal que $S \neq 0$, busque el punto $S'' \in r$, tal que $b^{-1}(S'')$ sea el inverso del número real $b^{-1}(S)$. El punto S'' así hallado es único.**

3.3 **Compruebe gráficamente la conmutatividad del producto, mediante un dibujo lo más perfecto posible.**

3.4 **Justifique la definición que se ha dado, de producto de números reales, teniendo en cuenta la semejanza de los triángulos $\overset{\triangle}{XOS}$ y $\overset{\triangle}{AOU}$ y la de los triángulos $\overset{\triangle}{XOP}$ y $\overset{\triangle}{AOT}$ de la figura 3.1.**

3.5 **Demuestre que con la anterior definición de producto se verifica**

$$0 \cdot s = 0 \qquad \forall\, s \in R$$

3.6 **Comprobar las reglas de signos para el producto de números reales.**

De lo dicho anteriormente se deduce que $(R, \cdot)$ *es un semigrupo conmutativo con elemento unidad y en que cada elemento no nulo posee inverso.*

4. Cuerpo de los números reales

A partir de las definiciones de suma y producto de números reales, dadas en los dos párrafos anteriores, se demuestra que *el producto de números reales es distributivo respecto de la suma*, por lo que $(R, +, \cdot)$ *es un cuerpo conmutativo.*

La consideración del semigrupo aditivo R_+, de los números reales positivos, permite definir la relación $\leqslant$ entre números reales de modo análogo a como se hizo para enteros y racionales. Como esta relación es compatible con la suma de reales, podemos decir que $(R, +)$ es un grupo ordenado y que $(R, +, \cdot)$ *es un cuerpo ordenado totalmente* por la relación $\leqslant$.

EJERCICIOS

4.1 Defínase el semigrupo $(R_+, +)$. Téngase en cuenta para ello que el punto origen 0 divide a la recta r en dos semirrectas.

4.2 ¿Será arquimediano el semigrupo $(R_+, +)$? Ayúdese de lo indicado en el párrafo 5 del § anterior.

---

5. Números racionales e irracionales

Designemos por j a la aplicación inyectiva, descrita en el párrafo 6 del § 11, que asocia a cada número racional un punto de la recta r. La aplicación $b^{-1} \circ j$, compuesta de j y la biyección b^{-1}, inversa de b, es una inyección de Q en R, como se esquematiza en la figura 5.1.

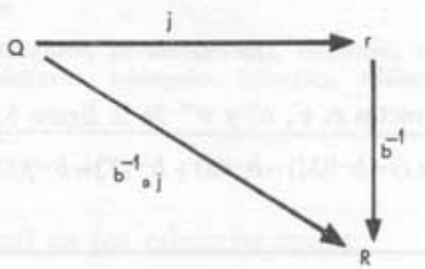


Figura 5.1

La aplicación $b^{-1} \circ j$ es además un homomorfismo de $(Q, +)$ en $(R, +)$. Para demostrarlo, consideremos dos racionales s y t. Tomemos representantes con denominador común:

$$s = \frac{d}{e}; \qquad t = \frac{g}{e}; \qquad e \in N^*; \qquad d, g \in Z$$

Tomemos una recta auxiliar z, sobre la que se representan los enteros e, d, g y $d+g$.

Según lo indicado en el párrafo 6 del § 11, será

$$j(s)=j\left(\frac{d}{e}\right)=S; \qquad j(t)=j\left(\frac{g}{e}\right)=T$$

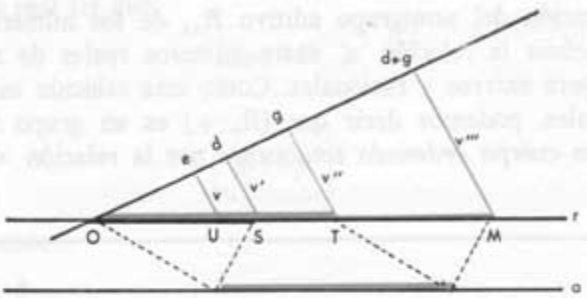


Figura 5.2

Para sumar ahora los números reales

$$b^{-1}(S) \qquad \text{y} \qquad b^{-1}(T)$$

apliquemos la definición de suma de reales, dada en el párrafo 2, para lo que nos servimos de la recta auxiliar a de la figura 5.2. Se obtiene así:

$$b^{-1}(S)+b^{-1}(T)=b^{-1}(M)$$

Por otra parte, como

$$s+t=\frac{d}{e}+\frac{g}{e}=\frac{d+g}{e}$$

se tiene

$$j(s+t)=M$$

por ser paralelas las rectas v, v', v'' y v''' de la figura 5.2. Luego:

$$b^{-1}\,j(s+t)=b^{-1}(M)=b^{-1}(S)+b^{-1}(T)=b^{-1}j(S)+b^{-1}j(T)$$

EJERCICIO

5.1 En la demostración anterior se ha dicho que la igualdad

$$j(s+t)=M$$

es consecuencia de ser paralelas las rectas marcadas en rojo. Explique la causa de esta afirmación.

Mediante consideraciones geométricas también se demuestra que *la aplicación* $b^{-1} \circ j$ *es un homomorfismo de* $(Q, \cdot)$ *en* $(R, \cdot)$. Por tanto, *la aplicación* $b^{-1} \circ j$ *es un homomorfismo inyectivo del cuerpo* $(Q, +, \cdot)$ *en el cuerpo* $(R, +, \cdot)$ por lo que puede considerarse a Q como un *subcuerpo* de R.

A los números reales que no son racionales se les llama *irracionales*.

EJERCICIOS

5.2 La cadena de inclusiones:

$$N \subset Z \subset Q \subset R$$

esquematizadas en la figura 5.3, dan lugar a la partición **del conjunto R, indicada en la figura 5.4. Explíquese.**

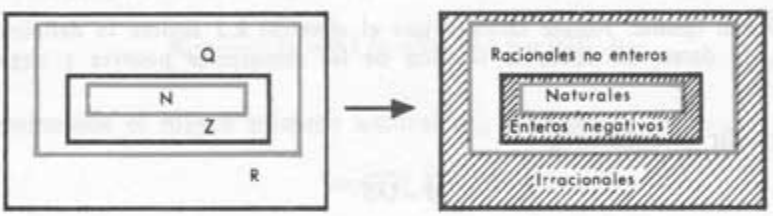


Figura 5.3 Figura 5.4

5.3 En el ejercicio anterior se ha visto cómo una cadena de inclusiones ha dado lugar a una partición en el mayor de los conjuntos. El proceso es inmediatamente generalizable a cualquier cadena de inclusiones. Establezca la cadena de inclusiones correspondiente y la partición a que da lugar, construyendo esquemas similares a los de las figuras 5.3 y 5.4, para cada uno de los apartados siguientes:

a) **cuadrados, rectángulos, paralelogramos, trapecios, cuadriláteros.**
b) **triángulos equiláteros, triángulos isósceles, triángulos.**

---

6. Expresión decimal de los números reales

Comencemos definiendo la biyección

$$b^{-1}: r \longrightarrow R$$

que ya hemos utilizado en los párrafos anteriores. Para ello, comencemos observando que el punto origen O define, sobre la recta r, dos semirrectas. De ellas, a la que contiene el punto U la llamaremos *semirrecta positiva* y a la otra *negativa*. Un punto S, perteneciente a la semirrecta positiva, define un

segmento $\overline{OS}$, cuya medida con el segmento $\overline{OU}$, como unidad, es, por definición, el número real

$$s = b^{-1}(S)$$

Notemos que el segmento $\overline{OU}$ ha sido tomado como unidad de medida, como consecuencia del ejercicio 3.1.

Si, por el contrario, el punto T' pertenece a la semirrecta negativa, entonces el número real

$$t' = b^{-1}(T')$$

será, por definición, el opuesto de la medida del segmento $\overline{OT'}$ con el segmento unidad $\overline{OU}$

Téngase en cuenta que si bien los vectores $\overrightarrow{OT'}$ y $\overrightarrow{T'O}$ son distintos, los segmentos $\overline{OT'}$ y $\overline{T'O}$ son iguales. Nótese también que el ejercicio 2.2 sugiere la definición de t', que acaba de darse, así como la elección de las semirrectas positiva y negativa con origen en O.

Para medir el segmento

$$\bar{s} = \overline{OS}$$

una vez elegido el segmento unidad

$$\bar{u} = \overline{OU}$$

se opera del siguiente modo: Como el cuerpo real es arquimediano, comencemos buscando el mayor número natural m, tal que

$$m\bar{u} \leqslant \bar{s}$$

Supongamos que sea

$$\bar{s}_1 = \bar{s} - m\bar{u}$$

es decir,

$$\bar{s} = m\bar{u} + \bar{s}_1$$

Como $\bar{s}_1 \leqslant \bar{u}$, consideremos la décima parte de $\bar{u}$:

$$\bar{u}_1 = \frac{1}{10}\bar{u} = 0{,}1\,\bar{u}$$

Determinemos el mayor número natural m_1, tal que

$$m_1\bar{u}_1 \leqslant \bar{s}_1$$

Nótese que el número natural m_1 ha de ser menor que diez, pues

$$m_1\bar{u}_1 \leqslant \bar{s}_1 < \bar{u} \Longrightarrow m_1\bar{u}_1 < \bar{u} = 10\bar{u}_1 \Longrightarrow m_1 < 10$$

Llamemos

$$\bar{s}_2 = \bar{s}_1 - m_1\bar{u}_1$$

es decir

$$\bar{s}_1 = m_1\bar{u}_1 + \bar{s}_2$$

con lo cual

$$\bar{s} = m\bar{u} + \bar{s}_1 = m\bar{u} + m_1\bar{u}_1 + \bar{s}_2 = m\bar{u} + m_1 \cdot 0{,}1\bar{u} + \bar{s}_2 =$$
$$= (m + m_1 \cdot 0{,}1)\bar{u} + \bar{s}_2 = (m, m_1)\bar{u} + \bar{s}_2$$

Como $\bar{s}_2 < \bar{u}_1$, consideremos la décima parte de $\bar{u}_1$:

$$\bar{u}_2 = \frac{1}{10}\bar{u}_1 = 0{,}1\,\bar{u}_1 = 0{,}1 \cdot 0{,}1\,\bar{u} = 0{,}01\,\bar{u}$$

Determinemos el mayor número natural m_2, tal que

$$m_2\bar{u}_2 < \bar{s}_2$$

Se tendrá, razonando como antes

$$m_2 < 10$$

Llamemos

$$\bar{s}_3 = \bar{s}_2 - m_2\bar{u}_2$$

es decir,

$$\bar{s}_2 = m_2\bar{u}_2 + \bar{s}_3$$

Se tiene

$$\bar{s} = (m, m_1)\bar{u} + \bar{s}_2 = (m, m_1)\bar{u} + m_2\bar{u}_2 + \bar{s}_3 =$$
$$= (m, m_1)\bar{u} + m_2 \cdot 0{,}01\,\bar{u} + \bar{s}_3 = (m, m_1m_2)\bar{u} + \bar{s}_3$$

siendo $\bar{s}_3 < \bar{u}_2$. Continuando del mismo modo se obtiene, como resultado de medir el segmento $\bar{s}$ con el segmento unidad $\bar{u}$, el número decimal

$$m, m_1m_2m_3 \ldots$$

pudiendo ocurrir que lleguemos a un cierto m_i, tal que

$$m_i = 0 = m_{i+1} = m_{i+2} = \ldots$$

Así, por ejemplo, podemos llegar al número decimal

$$51{,}634$$

si se ha obtenido:

$$m=51;\quad m_1=6;\quad m_2=3;\quad m_3=4;\quad m_4=0=m_5=m_6=\ldots$$

Este número decimal es racional, como ya se indicó en el párrafo 7 del § 11:

$$51{,}634=\frac{51634}{10^3}$$

Observemos que un razonamiento similar al hecho a propósito de la figura 5.2 sugiere que si ahora tratamos de representar gráficamente el número racional anterior, de acuerdo con el párrafo 6 del § anterior, obtenemos un punto S, tal que la medida de $\overline{OS}$ con el segmento unidad $\overline{OU}$ es

$$51{,}634$$

lo que en general puede expresarse diciendo que la definición que acaba de hacerse de la biyección b^{-1} es tal que la aplicación $b^{-1}\circ j$, de la figura 5.1, es la aplicación idéntica.

Si el número decimal obtenido hubiera sido periódico, como por ejemplo

$$15{,}423232323\ldots$$

que se escribe abreviadamente, como es sabido, en la forma

$$15{,}4\widehat{23}$$

se trataría también de un número racional, pues

$$15{,}4\widehat{23}=15{,}4+0{,}0\widehat{23}$$

luego

$$100\times 15{,}4\widehat{23}=1542{,}3\widehat{23}=1542{,}3+0{,}0\widehat{23}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
&100\times 15{,}4\widehat{23}=1542{,}3+0{,}0\widehat{23}\\
&15{,}4\widehat{23}=\quad 15{,}4+0{,}0\widehat{23}\\
&\Downarrow \text{ restando}\\
&(100-1)\times 15{,}4\widehat{23}=1542{,}3-15{,}4\\
&\Downarrow\\
&99\times 15{,}4\widehat{23}=1542{,}3-15{,}4\\
&\Downarrow\\
&10\times 99\times 15{,}4\widehat{23}=15423-154\\
&\Downarrow\\
&15{,}4\widehat{23}=\frac{15423-154}{990}
\end{aligned}$$

Hemos visto que si el número decimal obtenido como resultado de la medida es periódico, entonces también existe un número racional igual a él.

EJERCICIOS

6.1 **Busque una fracción perteneciente a cada uno de los números racionales cuyas respectivas expresiones decimales son:**

$$0{,}\widehat{3}; \quad 0{,}\widehat{271}; \quad 25{,}\widehat{83}; \quad 44{,}557; \quad 1{,}\widehat{9}$$

6.2 **Obtenga la expresión decimal del número racional $\frac{9}{7}$ operando como se indica a continuación:**

$$\frac{9}{7}=\frac{7+2}{7}=\frac{7}{7}+\frac{2}{7}=1+\frac{2}{7},$$

siendo

$$\frac{2}{7}=(0{,}1\times 10)\frac{2}{7}=0{,}1\times\left(10\times\frac{2}{7}\right)=0{,}1\times\frac{20}{7},$$

siendo

$$\frac{20}{7}=\frac{2\cdot 7+6}{7}=2+\frac{6}{7},$$

luego

$$\frac{9}{7}=1+\frac{2}{7}=1+0{,}1\times\frac{20}{7}=1+0{,}1\times\left(2+\frac{6}{7}\right)=$$

$$=1+\left(0{,}2+0{,}1\times\frac{6}{7}\right)=(1+0{,}2)+0{,}1\times\frac{6}{7}=$$

$$=1{,}2+0{,}1\times\frac{6}{7}$$

es decir

$$\frac{9}{7}=1{,}2+0{,}1\times\frac{6}{7}$$

Continúe el mismo proceso, ahora a partir de $\frac{6}{7}$, hasta obtener finalmente la expresión decimal periódica:

$$\widehat{1{,}285714}$$

Notemos que el proceso que acaba de indicarse es el de la división decimal:

```
9       | 7
20      1,2857142...
 60
  40
   50
    10
     30
      20
       .
        .
```

6.3 Elija otros números racionales y compruebe que la expresión decimal resultante al dividir el numerador por el denominador, de una cualquiera de las fracciones que determinan ese racional, es periódica (o bien posee un número finito de cifras decimales, si se trata de un número racional decimal, como se indicó en el párrafo 7 del § anterior). Demuestre que este resultado es general.

Hemos visto que las expresiones decimales con un número finito de cifras decimales y las periódicas son números racionales, y recíprocamente, es decir, todo racional admite una expresión decimal periódica o con un número finito de cifras decimales (ejercicios 6.2 y 6.3).

Por último, si como resultado de medir el segmento $\bar{s}$ con el segmento unidad $\bar{u}$ se obtiene una expresión decimal con infinitas cifras decimales no periódica, entonces decimos que el segmento $\bar{s}$ es *inconmensurable* con el segmento $\bar{u}$. Estos números reales cuya expresión decimal posee infinitas cifras decimales no periódicas no serían racionales, según se ha visto anteriormente, luego son *irracionales*.

Resumiendo los resultados obtenidos:

Racional	$\Leftrightarrow$	• *Expresión decimal con número finito de cifras decimales no nulas,* o bien • *Expresión decimal periódica.*
Irracional	$\Leftrightarrow$	• *Expresión decimal con infinitas cifras decimales no periódicas*

Un ejemplo de irracional es el número resultante de medir la diagonal del cuadrado con su lado (figura 1.1).

En otras palabras, la expresión decimal del número $\sqrt{2}$ posee infinitas cifras decimales y es no periódica:

$$\sqrt{2}=1{,}4142$$

Otro ejemplo es el número π, resultante de medir la circunferencia rectificada con su diámetro.

La teoría del número real hoy se encuentra completamente elaborada y puede estudiarse con independencia del problema de la medida de segmentos que lo originó. En el libro: ABELLANAS, *Elementos de Matemáticas,* se construye el número real a partir de sucesiones de racionales, como cuerpo de cociente de un anillo respecto de un ideal primo. Una exposición más clásica la encontrará en el libro: REY PASTOR, *Análisis algebraico,* donde se construye el número real a partir de sucesiones monótonas convergentes.

7. El sentido de aproximación; números aproximados

En el lenguaje habitual es frecuente oír la expresión «... *es aproximadamente igual a* ...». Muchas veces nos parece que esta expresión se utiliza inadecuadamente. Son las experiencias del mundo sensible que a lo largo de la vida vamos adquiriendo a través de nuestros sentidos las que permiten desarrollar este sentido de aproximación, que en opinión de algunos puede desarrollarse educándolo.

Puede ser interesante iniciar a los niños de los últimos grados en tal sentido, haciéndoles ver, mediante situaciones adecuadas, la necesidad de manejar a veces números aproximados.

Ya hemos visto, en el párrafo 6, que como resultado de una medida se puede obtener un número irracional, cuya expresión decimal posee infinitas cifras decimales. En escribir tal expresión se tardaría un tiempo infinito, por lo que estos números tienen un interés puramente teórico.

Por otra parte, la imperfección de los aparatos de medida impide que como resultado de las medidas experimentales pueda continuarse indefinidamente la determinación de cifras decimales.

Por estas causas, en la práctica, los números irracionales y los racionales cuya expresión decimal sea complicada son sustituidos por racionales cuya expresión decimal sea sencilla, es decir, con pocas cifras decimales.

Estos valores *aproximados* sustituyen, en la práctica, a los valores *exactos*, imposibles de obtener por las razones antedichas.

Para mayor simplicidad supondremos positivos los resultados de las medidas que manejaremos, pues no hay dificultad en extender las consecuencias a que lleguemos a números cualesquiera, positivos y negativos.

8. Error absoluto y relativo; cotas

Supongamos que se ha tomado a' como valor aproximado del valor exacto a. Entonces *se llama error absoluto a la diferencia entre el valor aproximado y el valor exacto,* es decir,

$$\textit{Error absoluto} = a' - a$$

• EJEMPLO 8.1: Si como valor aproximado de $\sqrt{2}$ tomamos 1,4142, el error absoluto cometido será:

$$1{,}4142 - \sqrt{2}$$

Si el valor aproximado es menor que el exacto, la aproximación se dice *por defecto,* y si es mayor, *por exceso.* Así, 1,414 será un valor aproximado por defecto de $\sqrt{2}$, y 1,415 por exceso.

Generalmente, los valores exactos son desconocidos. Por ejemplo, cuando se trata de resultados de medidas, lo único conocido son los valores aproximados, resultados de medir. Entonces lo interesante es conocer una *cota del error absoluto cometido,* es decir, un número racional positivo, tal que, el valor absoluto del error absoluto cometido sea, con toda seguridad, menor que dicha cota de error absoluto.

En la figura 8.1 se muestra un esquema que permite visualizar esta idea, basado en la biyección existente entre puntos de la recta y números reales.

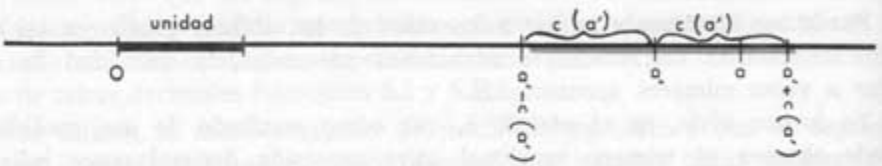


Figura 8.1

Supongamos que se haya obtenido a' como valor aproximado del valor exacto a, desconocido. Decir que la cota de error absoluto de a' es $c(a')$ significa que el valor exacto, desconocido, está comprendido entre $a'-c(a')$ y $a'+c(a')$, con toda seguridad, es decir, que

$$a'-c(a')<a<a'+c(a')$$

o sea que aunque el valor exacto de a sea desconocido, su imagen, en la biyección b del párrafo 1, es un punto interior al segmento cuyos extremos son los puntos imágenes de los números $a'-c(a')$ y $a'+c(a')$ en la biyección b, como, por ejemplo, el que se indica en rojo en la figura 8.1. Por tanto, la distancia entre los puntos $b(a)$ y $b(a')$ es menor que $c(a')$, es decir,

$$|\text{Error absoluto}|=|a'-a|<c(a')$$

EJERCICIO

8.1 Demostrar que

$$a'-c(a)<a<a'+c(a') \Rightarrow |a'-a|<c(a')$$

• EJEMPLO 8.2: Si decimos que la estatura de una persona es 1,76 m como valor aproximado, siendo la cota de error absoluto 0,01 m, significa que el valor exacto es mayor que 1,75 m y menor que 1,77 m.

• EJEMPLO 8.3: Supongamos que al calcular el número irracional $\sqrt{2}$ hemos

obtenido como valor aproximado 1,4142. Decir que *estas cifras son todas exactas* significa que el valor exacto de $\sqrt{2}$ está comprendido entre 1,4142 y 1,4143.

Nota: Es frecuente entre principiantes dar como exactas cifras que no lo son. Así, en el ejemplo 8.2, donde la cota de error absoluto es 0,01 m, es decir, un cm, sería absurdo dar como valor aproximado

1,761053 m

ya que las cuatro últimas cifras decimales son inútiles, por afectar la cota de error a la segunda cifra decimal.

EJERCICIOS

8.2 Hallar varias cotas del error absoluto cometido en el ejemplo 8.3. ¿Cuál es la menor cota posible en este caso?

8.3 Si decimos que las cifras

3,14159

obtenidas al calcular el número irracional π son exactas, ¿entre qué valores está comprendido su valor exacto? ¿Cuál es la menor cota del error absoluto que se comete al tomar este valor aproximado de π, suponiendo que no conocemos cuál es la siguiente cifra decimal?

El error absoluto no informa demasiado de si el error cometido es grande o pequeño. Por ejemplo, decir que la cota de error absoluto es de 0,05 m es dar una información incompleta, ya que esta cota de error es pequeña si se están midiendo longitudes del orden de kilómetros, pero grande si se trata de un valor aproximado de medio metro. Interesa, pues, comparar el error absoluto con el valor exacto, lo que nos lleva a establecer la siguiente definición:

Se llama error relativo al cociente entre el error absoluto y el valor exacto, es decir

$$\text{error relativo} = \frac{\text{error absoluto}}{\text{valor exacto}} = \frac{a' - a}{a}$$

• EJEMPLO 8.4: Al tomar como valor aproximado de $\sqrt{2}$ el valor 1,4142 se comete un error relativo igual a

$$\frac{1{,}4142 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

Como el valor exacto es habitualmente desconocido, más interesante que

el error relativo es obtener una *cota de error relativo*, es decir, un número racional positivo, tal que el valor absoluto del error relativo sea menor que dicha cota de error relativo. Por tanto, si a' es el valor aproximado, del valor exacto a, una cota de error relativo será un número positivo α, tal que

$$\frac{|a'-a|}{a}<\alpha$$

• EJEMPLO 8.5: Tratemos de calcular una cota de error relativo para el caso descrito en el ejemplo 8.2. Tendremos:

$$|1{,}76-\text{valor exacto}|<0{,}01=\text{cota error absoluto}$$

$$|\text{error relativo}|=\frac{|1{,}76-\text{valor exacto}|}{\text{valor exacto}}\Downarrow<\frac{0{,}01}{\text{valor exacto}}<\frac{0{,}01}{1{,}75}$$

$$\text{valor exacto}>1{,}75$$

Por tanto,

$$|\text{error relativo}|<\frac{0{,}01}{1{,}75}$$

luego una cota del error relativo es

$$\frac{0{,}01}{1{,}75}$$

EJERCICIOS

8.4 **Sean $\alpha,\beta,\gamma\in Q_+$; $\beta\neq 0\neq\gamma$. Demostrar que**

$$\beta>\gamma\Rightarrow\frac{\alpha}{\beta}<\frac{\alpha}{\gamma}$$

8.5 **Demostrar que si a' es el valor aproximado del valor exacto a, siendo $c(a')$ una cota del error absoluto, entonces una cota del error relativo es**

$$\frac{c(a')}{a'-c(a')}$$

Compare para ello con el ejemplo 8.5 y haga uso del ejercicio anterior.

Nota: En el ejercicio anterior y en todo lo que sigue, se supone que

$$c(a')\ll a'$$

es decir, que $c(a')$ es *mucho menor* que a', como ocurre de hecho en las aplicaciones.

9. Errores en las operaciones

• PROPOSICIÓN 9.1: Sean

valor aproximado: a'	valor aproximado: b'
valor exacto: a	valor exacto: b
cota de error absoluto: $c(a')$	cota de error absoluto: $c(b')$

Se verifica

$$|(a'+b')-(a+b)| < c(a')+c(b')$$

es decir, *la suma de las cotas de error absoluto de dos números aproximados es cota del error absoluto de su suma.*

Demostración:

$$\begin{array}{c} a'-c(a') < a < a'+c(a') \\ b'-c(b') < b < b'+c(b') \\ \hline (a'+b')-[c(a')+c(b')] < a+b < (a'+b')+[c(a')+c(b')] \end{array}$$

EJERCICIOS

9.1 Haga un esquema similar al de la figura 8.1 para visualizar la demostración anterior.

9.2 Demostrar que $\forall\ \alpha, \beta \in Q$

$$|\alpha+\beta| \leqslant |\alpha|+|\beta|; \qquad |\alpha-\beta| \leqslant |\alpha|+|\beta|;$$

9.3 A partir del ejercicio anterior, demuestre la proposición 9.1, teniendo en cuenta que

$$|(a'+b')-(a+b)| \leqslant |a'-a|+|b'-b|$$

9.4 Probar que «la suma de las cotas de error absoluto de dos números aproximados es cota del error absoluto de la diferencia de esos números aproximados». Haga la demostración de dos modos, como la hecha para la proposición 9.1 y apoyándose en el ejercicio 9.2.

• PROPOSICIÓN 9.2: Sean

valor aproximado: a'	valor aproximado: b'
valor exacto: a	valor exacto: b
cota de error absoluto: $c(a')$	cota de error absoluto: $c(b')$
cota de error relativo: $cr(a')$	cota de error relativo: $cr(b')$

Se verifica

$$\boxed{cr(a'\cdot b') \simeq cr(a') + cr(b')}$$

es decir, *la cota de error relativo del producto $a'\cdot b'$ es aproximadamente igual a la suma de las cotas de los errores relativos de a' y b'* (supuesto que la cota de error absoluto de uno de los valores aproximados es mucho menor que su valor aproximado).

Demostración: valor aproximado: $a'b'$.

$$\text{valor exacto: } ab$$

$$\text{error absoluto: } a'b' - ab$$

$$\text{error relativo} = \frac{a'b' - ab}{ab} = \frac{(a'b' - ab') + (ab' - ab)}{ab} = \frac{a'b' - ab'}{ab} + \frac{ab' - ab}{ab} =$$

$$= \frac{(a' - a)b'}{ab} + \frac{a(b' - b)}{ab} \simeq \frac{a' - a}{a} + \frac{b' - b}{b} < c(a') + c(b')$$

$$c(b') \ll b' \Longrightarrow b' \simeq b \Longrightarrow \frac{b'}{b} \simeq 1$$

• EJEMPLO 9.1: Supongamos un campo rectangular del que se han medido ambas dimensiones, obteniéndose los siguientes valores aproximados, con las cotas de error absoluto que se indican:

$a' = 28{,}12$ m	$b' = 15{,}37$ m
$c(a') = 0{,}01$ m	$c(b') = 0{,}01$ m

En la demostración anterior se tendría:

$$c(b') = 0{,}01 \ll 15{,}37 = b'$$

Como

$$\frac{b'}{b' + c(b')} < \frac{b'}{b} < \frac{b'}{b' - c(b')}$$

es decir

$$\frac{15{,}37}{15{,}37 + 0{,}01} < \frac{b'}{b} < \frac{15{,}37}{15{,}37 - 0{,}01}$$

o sea

$$0{,}9993 < \frac{b'}{b} < 1{,}0007$$

Por tanto, el error relativo del valor aproximado $a'b'$ del área del campo

rectangular será:

$$\frac{a'-a}{a}\cdot\frac{b'}{b}+\frac{b'-b}{b}<c(a')\frac{b'}{b}+c(b')<c(a')\cdot 1{,}0007+c(b')=$$

$$=\frac{0{,}01}{28{,}12-0{,}01}\times 1{,}0007+\frac{0{,}01}{15{,}37-0{,}01}\simeq$$

$$\simeq 0{,}00036\times 1{,}0007+0{,}00066\simeq 0{,}00036+0{,}00066\simeq 0{,}001$$

EJERCICIOS

9.5 En las mismas condiciones de la proposición anterior, probar que

$$cr\left(\frac{a'}{b'}\right)\simeq cr(a')+cr(b')$$

9.6 Probar que

$$cr(a'^n)\simeq n\cdot cr(a')$$

siendo n un número natural mayor que uno y supuesto que $c(a')\ll a'$.

9.7 Demostrar que, en la misma hipótesis del ejercicio anterior

$$cr(\sqrt{a'})\simeq\frac{1}{2}cr(a')$$

En el ejemplo 9.1 se ha calculado una cota de error para el resultado de operar con números aproximados cuyas cotas de error conocemos. Muchas veces se presenta también el problema inverso del que se acaba de indicar, es decir, el problema de calcular las cotas máximas de error, aceptables en ciertas medidas, para que al operar con los números aproximados, obtenidos como resultados de esas medidas, se obtenga un número aproximado cuya cota de error haya sido fijada de antemano. Así, por ejemplo, si se desea obtener el área de un rectángulo con error menor de 0,0001 m², ¿cuál será la máxima cota de error aceptable en las medidas de sus lados?

Nos contentaremos con plantear el problema. Si el lector desea ampliar este estudio, puede consultar el libro: J. REY PASTOR, *Análisis algebraico.*

10. Conjunto de los números complejos

En el cuerpo de los números reales no es posible realizar algunas operaciones aritméticas. Así, en el cuerpo real, no existe la raíz cuadrada de -1, es decir, no hay ningún número real cuyo cuadrado sea igual a -1, ya que

el cuadrado de cualquier número real es positivo, como se deduce sin más que tener en cuenta las reglas de los signos del producto de reales, similares a las de enteros.

Por ello hemos de volver a ampliar el concepto de número. Tratemos de construir un conjunto de números que contenga a los reales y en el cual exista la raíz cuadrada de -1. Dicha raíz cuadrada de -1 se representa habitualmente por i, es decir, sea

$$\sqrt{-1}=i$$

Designemos por C al nuevo conjunto de número que estamos construyendo. Hemos dicho que deseamos que C sea un superconjunto del conjunto R, de los reales, es decir, que

$$R \subset C$$

y como además ha de verificarse

$$i \in C$$

tendremos que

$$R \cup \{i\} \subset C$$

Deseamos definir las operaciones en C, de modo que la suma de dos elementos de C sea otro elemento de C y el producto de dos elementos de C sea otro elemento de C, es decir, de modo que el conjunto C sea cerrado (párrafo 1 del § 5) respecto de la suma y el producto. Además deseamos que la suma y el producto en C sean generalización de la suma y producto en R, con las mismas propiedades que tienen éstos. Por tanto, las expresiones de la forma

$$r+s\cdot i+t\cdot i^2+u\cdot i^3+v\cdot i^4+\ldots$$

donde $r, s, t, u, v, \ldots$, son reales (y donde $+$ y $\cdot$ son los signos convencionales representativos de la suma y el producto en C), ha de ser otro elemento de C. Pero teniendo en cuenta que

$$\sqrt{-1}=i \Longrightarrow \boxed{-1=i^2}$$

se puede simplificar la expresión anterior, según vamos a ver.

EJERCICIOS

10.1 Teniendo en cuenta que

$$i^2=-1$$

demostrar que cualquiera que sea el número natural n, la potencia

$$i^n$$

es igual a uno de los cuatro siguientes resultados:

$$1,\ -1,\ i,\ -i$$

10.2 Demostrar que, teniendo en cuenta el ejercicio anterior, toda expresión de forma

$$r+si+ti^2+ui^3+vi^4+\ldots;\ r, s, t, u, v, \ldots \in R$$

se puede escribir en la forma

$$a+bi \qquad a, b \in R$$

El conjunto C, que estamos formando, es precisamente el conjunto de las expresiones de la forma

$$a+bi$$

donde a y b son números reales.

A las expresiones de forma

$$a+bi \qquad a, b \in R$$

se les llama *números complejos*. El conjunto C, de estas expresiones, se llamará, por tanto, *conjunto de los números complejos*.

Abreviadamente:

$$C=\{a+bi \mid a, b \in R;\ i^2=-1\}$$

Al número real a se le llama *parte real* y al b *parte imaginaria* del complejo $a+bi$.

• EJEMPLOS: Son números complejos:

$$2+5i; \quad 3-14i; \quad 0+4i; \quad 1+3i; \quad 1+\frac{2}{7}i; \quad 1-i$$

EJERCICIO

10.3 Diga cuáles son la parte real y la imaginaria de los complejos siguientes:

$$\frac{1}{3}+i;\ -i;\ 2$$

Si designamos R^2 al conjunto producto $R \times R$, del conjunto R, de los reales, por sí mismo, consideremos la aplicación

$$R^2 \xrightarrow{f} C$$

que asocia a cada pareja ordenada de reales

$$(a, b)$$

el número complejo

$$a + bi$$

Veamos que, definiendo las operaciones en C de acuerdo con lo dicho anteriormente, *la aplicación f es una biyección.*

En efecto: Sean (a, b) y (c, d) dos parejas distintas, pertenecientes a R^2. Veamos que ha de ser $a + bi \neq c + di$.

Pueden presentarse dos casos:

Primer caso: $b \neq d$.

Si fuera $a + bi = c + di$

$$\Downarrow$$

$$a - c = di - bi$$

$$\Downarrow$$

$$a - c = (d - b)i$$

$$b \neq d \Longrightarrow d - b \neq 0 \quad \Downarrow$$

$$i = \frac{a - c}{d - b}$$

pero $\dfrac{a - c}{d - b} \in R$ $\Longrightarrow i \in R$ ¡absurdo!

Segundo caso: $d = b$.

Luego, para que las parejas

$$(a, b) \quad \text{y} \quad (c, d)$$

sean distintas, ha de ser

$$a \neq c$$

si fuera

$$a + bi = c + di$$

$$b = d \Longrightarrow bi = di \quad \Downarrow$$

$$a = c \quad \text{¡absurdo!}$$

Como la aplicación

$$f: R^2 \longrightarrow C$$

es una biyección, a los números complejos se les puede considerar como parejas ordenadas de números reales, por lo que se emplea frecuentemente la notación

$$(a, b)$$

para designar al complejo

$$a+bi$$

11. El cuerpo de los números complejos

De acuerdo con lo indicado en el párrafo anterior, se establecen las siguientes definiciones:

CONJUNTO DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS:

$$C=\{a+bi \mid a, b \in R\}$$

IGUALDAD DE COMPLEJOS:

$$a+bi=c+di \underset{\text{def}}{\iff} \begin{cases} a=c \\ b=d \end{cases}$$

SUMA DE COMPLEJOS:

$$(a+bi)+(c+di) \underset{\text{def}}{=} (a+c)+(b+d)i$$

* EJEMPLO:

$$(2+3i)+(4+12i)=(2+4)+(3+12)i=6+15i$$

EJERCICIOS

11.1 Efectuar las sumas de complejos siguientes:

$$(6+8i)+\left(\frac{3}{4}+i\right)$$

$$(3+5i)+(2-4i)$$

$$(6+2i)+(-10+i)$$

11.2 Escribir la propiedad conmutativa de la suma de complejos. Comprobarla con un ejemplo. Demostrarla. Decir de qué propiedad de los reales es consecuencia.

11.3 Lo mismo para la asociativa.

11.4 Demostrar que el complejo

$$0+0i$$

es el elemento neutro de la suma

11.5 Escribir el opuesto del complejo $2-3i$. Generalice el resultado.

• PROPOSICIÓN 11.1: *(C, +) es un grupo conmutativo.*

EJERCICIOS

11.6 Efectuar el producto de complejos:

$$(2+4i)\cdot(5+15i)$$

admitiendo, para el producto de complejos, las mismas propiedades del producto de reales, teniendo en cuenta que $i^2=-1$, según se vio en el párrafo anterior.

11.7 Teniendo en cuenta las indicaciones del ejercicio anterior, verificar la igualdad:

$$(a+bi)\cdot(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

donde $a, b, c, d \in R$.

Los dos ejercicios anteriores permiten establecer:

PRODUCTO DE COMPLEJOS: $\forall\ a, b, c, d \in R$

$$(a+bi)\cdot(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

EJERCICIOS

11.8 Repetir los ejercicios 11.1, 11.2 y 11.3 cambiando suma por producto.

11.9 Demostrar que el complejo

$$1+0i$$

es el elemento neutro del producto.

• PROPOSICIÓN 11.2: *(C, ·) es un semigrupo conmutativo y con elemento unidad.*

• DEFINICIÓN: Se llama *conjugado* del complejo

$$a+bi$$

al complejo

$$a-bi$$

EJERCICIOS

11.10 **Hallar los conjugados de cada uno de los complejos siguientes:**

$$2+3i; \qquad 3-i; \qquad \frac{3}{4}; \qquad 2i$$

11.11 **Comprobar, con varios ejemplos, que el producto de un complejo por su conjugado es real.**

11.12 **Generalizar lo afirmado en el ejercicio anterior, demostrando que**

$$(a+bi)\cdot(a-bi)=a^2+b^2$$

11.13 **Como consecuencia del ejercicio anterior, el inverso del complejo no nulo**

$$a+bi$$

es el complejo

$$\frac{1}{a^2+b^2}(a-bi)=\frac{a}{a^2+b^2}+\frac{-b}{a^2+b^2}i$$

Compruébelo con ejemplos y demuéstrelo.

11.14 **Demostrar que el producto de complejos es distributivo respecto de la suma.**

Como consecuencia de los dos ejercicios anteriores y de las proposiciones 11.1 y 11.2:

TEOREMA 11.3: $(C, +, \cdot)$ *es un cuerpo conmutativo.*

EJERCICIOS

11.15 **Resolver la ecuación:**

$$(2-5i)+(1+i)x=2-i$$

hallando el complejo x que la satisface.

11.16 **Demostrar que la aplicación**

$$j: R \to C$$

que asocia a cada número real a el complejo $a+0i$ es inyectiva. ¿Es biyectiva esta aplicación? ¿Es j un homomorfismo del cuerpo R en el cuerpo C?

El ejercicio anterior permite escribir:

$$R \subset C$$

A los complejos que no son reales, es decir, a los complejos cuya parte imaginaria no es nula, se les llama *imaginarios.*

• EJEMPLOS: $2+3i$; $\frac{2}{5}-i$; $4i$ son imaginarios.

$5+0i$; 4; $0+0i$ no lo son

A los imaginarios cuya parte real es nula se les llama *imaginarios puros.*

EJERCICIOS

11.17 Abreviadamente diremos que el complejo

$$a+bi$$

es real si $b=0$. Exprese abreviadamente las condiciones que ha de verificar

$$a+bi$$

para ser «imaginario» e «imaginario puro», respectivamente.

11.18 De lo dicho anteriormente se deduce que

$$N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$$

Esquematícelo con figuras similares a las 5.3 y 5.4

---

12. Representación gráfica de los complejos

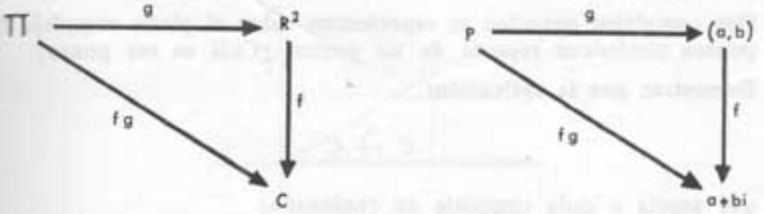
Sea Π el conjunto de los puntos del plano. Fijado un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares en el plano (párrafo 10 del § 8), a cada punto $P \in \Pi$ podemos asociar una pareja ordenada de números reales, su abscisa y su ordenada. Se tiene así la aplicación

$$\Pi \xrightarrow{g} R^2$$

que es una biyección. Consideremos también la aplicación:

$$R^2 \xrightarrow{f} C$$

estudiada en el párrafo 1. La aplicación compuesta de ambas:



asociará a cada punto P, del plano, el número complejo $a+bi$, siendo a la abscisa y b la ordenada del punto P, como muestra la figura 12.1.

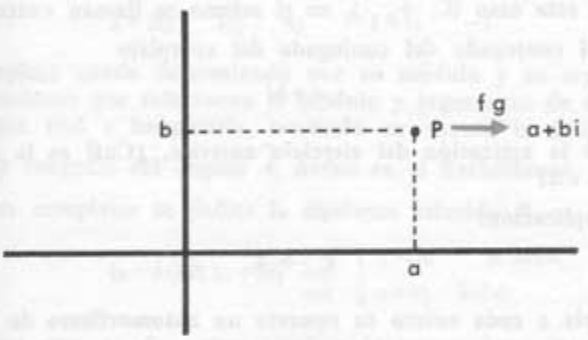


Figura 12.1

La aplicación producto fg es una biyección, por serlo f y g. Por tanto, los números complejos se pueden representar gráficamente mediante puntos de un plano. A este plano, sobre el que se representan los complejos, se le llama plano complejo o plano de ARGAND, pues este matemático encontró, a principios del siglo pasado, la representación gráfica de que hablamos.

EJERCICIOS

12.1 Representar, sobre el plano de Argand, los complejos:

$$3+4i; \quad 1-i; \quad 3i; \quad -4+\frac{3}{2}i; \quad 5; \quad -2-i$$

12.2 Indique dónde se representan, sobre el plano complejo

a) **los reales;**
b) **los imaginarios;**
c) **los imaginarios puros.**

Ponga ejemplos.

12.3 Dos complejos conjugados se representan, sobre el plano complejo, sobre dos puntos simétricos respecto de una recta. ¿Cuál es esa recta?

12.4 Dos complejos opuestos se representan sobre el plano complejo sobre dos puntos simétricos repecto de un punto. ¿Cuál es ese punto?

12.5 Demostrar que la aplicación:

$$C \xrightarrow{h} C$$

que asocia a cada complejo su conjugado:

$$a+bi \xrightarrow{h} a-bi$$

es isomorfismo de $(C, +, \cdot)$ en $(C, +, \cdot)$. Los isomorfismos de una estructura, en este caso $(C, +, \cdot)$, en sí mismo se llaman «automorfismos».

12.6 Hallar el conjugado del conjugado del complejo

$$a+bi$$

siendo h la aplicación del ejercicio anterior. ¿Cuál es la aplicación compuesta $h \circ h$?

12.7 ¿Es la aplicación:

$$Z \rightarrow Z$$

que asocia a cada entero su opuesto un automorfismo de $(Z, +, \cdot)$?

12.8 Se llama módulo del número complejo

$$a+bi$$

al número real

$$+\sqrt{a^2+b^2}$$

Demostrar que la aplicación

$$C \xrightarrow{\text{módulo}} R$$

es un homomorfismo de

$$(C, \cdot) \quad \text{en} \quad (R, \cdot)$$

El módulo del complejo

$$z=a+bi$$

se representa habitualmente por $|z|$.

12.9 Halle el módulo de varios complejos e interprete geométricamente su módulo sobre la figura 12.1.

12.10 Se llama argumento de un número complejo $a+bi$ al ángulo orientado $\widehat{A}$, cuya semirrecta origen es la semirrecta de abscisas positivas y cuya semirrecta extremo es aquella cuyo origen es el origen de coordenadas y que

contiene al punto P sobre el que se representa $a+bi$, como se muestra en la figura 12.2.

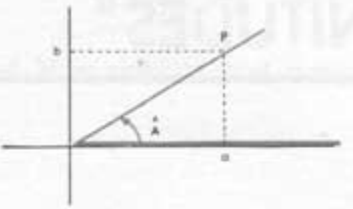


Figura 12.2

Hallar el argumento de los complejos siguientes:

$$2+2i; \quad 3i; \quad 4; \quad -1+i; \quad -i$$

12.11 Un complejo queda determinado por su módulo y su argumento. Buscar las expresiones que relacionan el módulo y argumento de un complejo con sus partes real e imaginaria, teniendo en cuenta la definición de seno, coseno y tangente del ángulo $\widehat{A}$, dados en el Bachillerato.

12.12 Entre los complejos se define la siguiente relación R

$$(a+bi)\ R\ (c+di) \underset{\text{def}}{\iff} \begin{cases} a<c & \text{o bien} \\ a=c; \quad b \leqslant d \end{cases}$$

Demostrar que es de orden total e interpretarla gráficamente sobre la figura 12.1. Compruebe que esta ordenación es compatible con $+$.

12.13 Estudiar si es de orden la relación R' tal que

$$z\ R\ z' \underset{\text{def}}{\iff} |z| \leqslant |z'|; \qquad \forall\ z, z' \in C$$

12.14 Comprobar que

$$\sqrt{-16}=4i$$

12.15 Calcular

$$\sqrt{-4}$$

12.16 Resolver la ecuación:

$$x^2+10x+34=0$$

En el cuerpo complejo pueden verificarse todas las operaciones aritméticas elementales. Además ya no es posible volver a ampliar el concepto de número, es decir, no puede construirse un cuerpo cuyos elementos sean ternas, etc., de números reales, según demostró el gran matemático alemán WEIERSTRASS.

Si se desea profundizar más en el estudio de complejos y estudiar cómo el problema de la radicación, logaritmación, etc., siempre tiene solución en el cuerpo complejo, puede consultarse el libro REY PASTOR, *Análisis Algebraico*, Madrid, 1961, capítulo XI.

13 MAGNITUDES

1. Concepto de magnitud

Habitualmente se definía antes el concepto de magnitud diciendo que: «magnitud es una cantidad que puede aumentar y disminuir», y se definía el concepto de cantidad diciendo que «cantidad es todo aquello que se puede medir», con lo que se caía en un círculo vicioso. Actualmente se define el concepto de magnitud en la forma siguiente:

• DEFINICIÓN 1.1: *Una magnitud es un semigrupo conmutativo y ordenado.*

Recordemos que un semigrupo se dice ordenado cuando entre sus elementos se ha definido una relación de orden, compatible con la operación de definición del semigrupo (véase párrafo 7 del § 9).

• DEFINICIÓN 1.2: *Se llaman cantidades a los elementos del semigrupo que constituye la magnitud.*

El semigrupo conmutativo y ordenado, que constituye la magnitud, puede que sea *grupo* o que no lo sea. Si no es grupo, se dice que se trata de una *magnitud absoluta,* y si es grupo diremos que estamos ante una *magnitud relativa.*

Por tratarse de semigrupos, o grupos, *conmutativos,* suele adoptarse, para las magnitudes, notación aditiva. Por ello suele decirse que «una magnitud es un semigrupo (o grupo) aditivo y ordenado». La ordenación puede ser parcial o total.

Resumiendo: una magnitud, M, es un conjunto, S, sobre el que están definidas una operación, $+$, que da a S estructura de semigrupo (que puede ser grupo) y una relación de orden, R, compatible con la operación $+$, es decir, tal que:

$$\left.\begin{array}{l} a\,R\,b \\ c\,R\,d \end{array}\right\} \Longrightarrow (a+c)\,R\,(b+d)$$

donde a, b, c y d son cantidades cualesquiera, es decir, cualesquiera elemen-

tos del semigrupo. Abreviadamente escribiremos

$$M=(S, +, R)$$

y diremos que la magnitud M es absoluta si el semigrupo $(S, +)$ no es grupo, y relativa si lo es

2. Longitud

Consideremos dos puntos, A y B, del plano. Si son distintos, determinan una recta única. El punto A define, sobre esa recta, dos semirrectas, de origen el punto A. Consideremos, de ellas, la que contiene el punto B. Designaremos por A_B a esta semirrecta (marcada en rojo en la figura 2.1).

Figura 2.1

Sea B_A la semirrecta de origen B, que pasa por A (en negro en la figura 2.1). Consideremos a estas semirrectas como conjunto de puntos. La intersección de ambas semirrectas es, por definición, el *segmento fijo* $\overline{AB}$, es decir:

* DEFINICIÓN 2.1:

$$\overline{AB}=A_B \cap B_A$$

Sea S el conjunto de los segmentos fijos del plano. Vamos a establecer una relación entre los elementos de S, es decir, entre los segmentos fijos del plano. Para comparar dos segmentos fijos, $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, en esta relación operamos como se indica seguidamente: consideremos un extremo cualquiera, B, por ejemplo, del segmento fijo $\overline{AB}$, y otro extremo, C, por ejemplo, del segmento fijo $\overline{CD}$. Sea e la mediatriz del segmento fijo $\overline{BC}$ (figura 2.2). Consideremos la simetría axial (ejemplo 1.4 del § 4) respecto de la recta e. El punto B se trans-

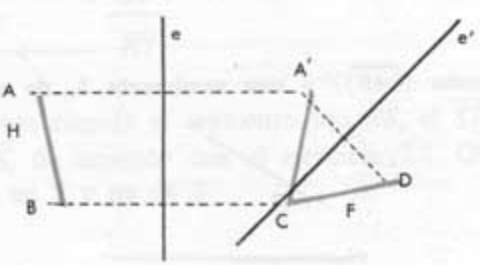


Figura 2.2

forma en el C, en esta simetría de eje e, y el A en el A', que, en general, será distinto del D. El segmento fijo $\overline{AB}$ se ha transformado, en esta simetría axial, en el segmento fijo $\overline{A'C}$. Consideremos ahora las semirrectas $C_{A'}$ y C_D. Sea e' la bisectriz del ángulo cuyas semirrectas extremos son $C_{A'}$ y C_D. En la simetría axial de eje e' el punto A' se transformará en un punto de la semirrecta C_D, que puede o no coincidir con D. Si coincide con D, el transformado del segmento fijo $\overline{A'C}$, en la simetría de eje e', será el segmento fijo $\overline{DC}$. De este modo se ha transformado el segmento fijo $\overline{AB}$ en el $\overline{CD}$ mediante dos simetrías. En cambio, el segmento fijo $\overline{HB}$, de la misma figura, no se transforma en $\overline{CD}$, sino en el $\overline{CF}$.

• DEFINICIÓN 2.2: *Diremos que el segmento fijo $\overline{AB}$ está relacionado con el $\overline{CD}$ y escribiremos*

$$\overline{AB} \equiv \overline{CD}$$

si mediante un número finito de simetrías axiales, se puede transformar $\overline{AB}$ en $\overline{CD}$.

EJERCICIO

2.1 Demostrar que la relación $\equiv$, entre los elementos de S, es de equivalencia.

A las clases así producidas se les llama *segmentos*. Al conjunto de los segmentos lo designaremos por Σ. Por tanto:

$$\Sigma = S/\equiv$$

Cada segmento fijo, $\overline{AB}$, define un segmento $\{\{\overline{AB}\}\}$, que es la clase formada por todos los segmentos fijos relacionados con $\overline{AB}$. Representaremos a los segmentos por minúsculas con una barra superior: $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, ..., es decir,

$$\Sigma = \{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \ldots\}$$

EJERCICIO

2.2 Dados un segmento $\{\{\overline{AB}\}\}$ y una semirrecta h, de origen O (figura 2.3).

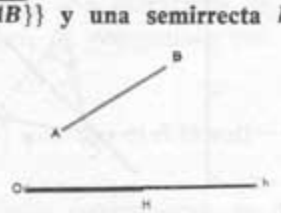


Figura 2.3

construya un segmento fijo $\overline{OH}$, tal que, verifique las dos condiciones siguientes:

$$\overline{OH} \subset h; \qquad \overline{OH} \in \{\{\overline{AB}\}\}$$

---

* DEFINICIÓN 2.3: *Dos segmentos fijos, $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, se dicen consecutivos si tienen un extremo común y ningún otro punto común y además ambos están contenidos en una misma recta* (figura 2.4).

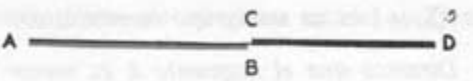


Figura 2.4

* DEFINICIÓN 2.4: *Dados dos segmentos, $\bar{r}$ y $\bar{n}$, sean $\overline{RS}$ y $\overline{ST}$ dos segmentos fijos consecutivos, tales que*

$$\overline{RS} \in \bar{r}; \qquad \overline{ST} \in \bar{n}$$

Entonces el segmento $\{\{\overline{RT}\}\}$ se llama suma de los segmentos $\bar{r}$ y $\bar{n}$ (figura 2.5).

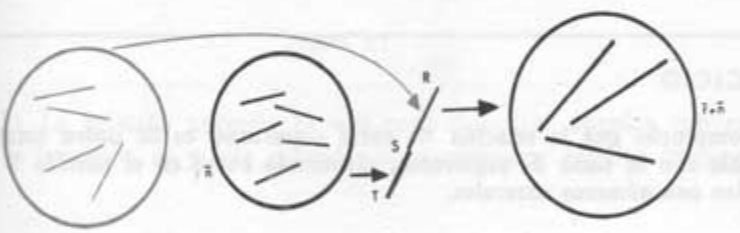


Figura 2.5

Esquemáticamente:

$$\left.\begin{array}{l} \bar{r} \longrightarrow \overline{RS} \\ \bar{n} \longrightarrow \overline{ST} \end{array}\right\} \overline{RS} \text{ y } \overline{ST} \text{ consecutivos}$$

$$\bar{r}+\bar{n} \longleftarrow \overline{RT}$$

Notemos que una vez elegido el segmento fijo $\overline{RS}$, el $\overline{ST}$ puede construirse consecutivo con el $\overline{RS}$, de acuerdo con el ejercicio 2.2. Observemos también que la suma se define en Σ y no en S.

EJERCICIOS

2.3 Comprobar que la suma de segmentos no depende del representante $\overline{RS}$ elegido.

2.4 Comprobar las propiedades conmutativas y asociativas de la suma de segmentos.

- PROPOSICIÓN 2.1: $(\Sigma, +)$ *es un semigrupo conmutativo.*

- DEFINICIÓN 2.5: *Diremos que el segmento* $\bar{a}$ *es menor o igual que el segmento* $\bar{b}$ *y escribiremos*

$$\bar{a} \leqslant \bar{b}$$

si existe un segmento, $\bar{h}$, *cuya suma con* $\bar{a}$ *sea igual a* $\bar{b}$.

Abreviadamente:

$$\boxed{\bar{a} \leqslant \bar{b}} \underset{\text{def}}{\iff} \boxed{\exists\, \bar{h} \in \Sigma;\ \bar{h} + \bar{a} = \bar{b}}$$

EJERCICIO

2.5 Compruebe que la relación $\leqslant$, entre segmentos, es de orden total y compatible con la suma de segmentos, razonando como en el párrafo 7 del § 9 se hizo con números naturales.

De la proposición 2.1 y del ejercicio anterior se deduce:

- TEOREMA 2.2: $(\Sigma, +, \leqslant)$ *es una magnitud.*
  Esta magnitud se llama LONGITUD.

EJERCICIOS

2.6 ¿Por qué se dice que $(\Sigma, +, \leqslant)$ es una magnitud absoluta?

2.7 ¿Cuáles son las cantidades de esta magnitud?

---

3. Amplitud

Vamos a realizar, para ángulos, un estudio paralelo al realizado para segmentos en el párrafo anterior. Sea A el conjunto de los ángulos fijos del plano.

* DEFINICIÓN 3.1: *Diremos que el ángulo fijo* $\widehat{A}$ *está relacionado con el ángulo fijo* $\widehat{B}$, *lo que expresaremos escribiendo*

$$\widehat{A} \equiv \widehat{B}$$

si mediante un número finito de simetrías axiales se puede transformar $\widehat{A}$ *en* $\widehat{B}$ (figura 3.1).

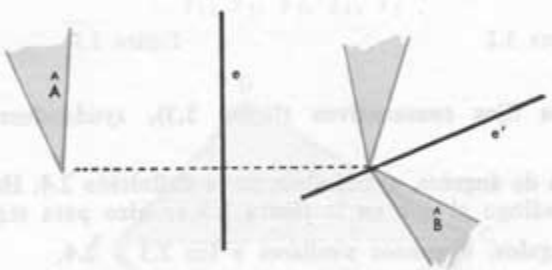


Figura 3.1

Nota 3.1: La relación anterior es útil para comparar ángulos convexos y, aunque no lo haremos, se puede extender para comparar ángulos cualesquiera.

EJERCICIOS

3.1 **Explique cómo se han elegido las rectas e y e' de la figura 3.1.**

3.2 **Demuestre que la relación $\equiv$, entre ángulos fijos, es de equivalencia.**

A las clases así producidas se les llama ángulos. El conjunto $\mathcal{A}$ de los ángulos será, pues, el conjunto cociente:

$$\mathcal{A} = A/\equiv$$

Representaremos a los ángulos en la forma: $\widehat{a}, \widehat{b}, \widehat{c}, \ldots$, es decir,

$$\mathcal{A} = \{\widehat{a}, \widehat{b}, \widehat{c}, \ldots\}$$

EJERCICIOS

3.3 Dado el ángulo $\{\{\hat{A}\}\}$, definido por el ángulo fijo $\hat{A}$, y dada una semirrecta h (figura 3.2), construya un ángulo fijo una de cuyas semirrectas extremos sea h y que pertenezca a la clase $\{\{\hat{A}\}\}$. ¿Cuántas soluciones existen?

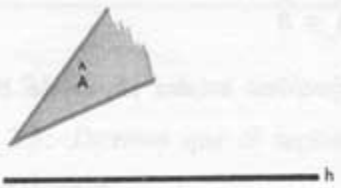


Figura 3.2

Figura 3.3

3.4 Defina ángulos fijos consecutivos (figura 3.3), ayudándose de la definición 2.3.

3.5 Defina la suma de ángulos, ayudándose de la definición 2.4. Haga para ángulos un esquema análogo al que en la figura 2.5 se hizo para segmentos.

3.6 Haga, para ángulos, ejercicios similares a los 2.3 y 2.4.

3.7 Defina la relación $\leqslant$, para ángulos, de modo análogo a la definición 2.5 y realice el ejercicio 2,5 cambiando la palabra «segmento» por «ángulo».

- TEOREMA 3.1: *$(\mathcal{A}, +, \leqslant)$ es una magnitud absoluta. Esta magnitud se llama amplitud.*

4. Extensión

Sea P el conjunto de los polígonos fijos del plano y tratemos de establecer una relación de equivalencia entre los elementos de P. Consideraremos a los polígonos como conjuntos de puntos, incluidos los de sus lados.

EJERCICIOS

4.1 Defina el triángulo fijo como intersección de tres semiplanos.

4.2 Defina polígono a partir de triángulos.

4.3 Defina polígono a partir de línea poligonal.

* DEFINICIÓN 4.1: *Diremos que los triángulos fijos*

$$T_1, T_2, \ldots, T_n$$

constituyen una descomposición del polígono fijo M, si recubren M y además dos cualesquiera de estos triángulos fijos tienen en común uno de los siguientes conjuntos:

a) *un segmento fijo;*
b) *un punto fijo;*
c) *el conjunto vacío.*

* EJEMPLO 4.1: Sea el polígono fijo M, de la figura 4.1. Los triángulos fijos

$$T_1, T_2, T_3, T_4, T_5$$

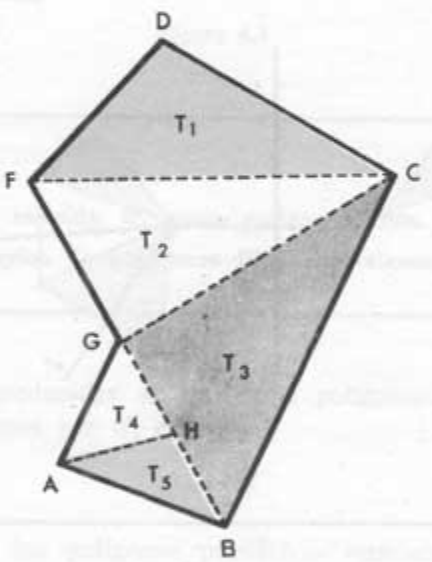


Figura 4.1

determinan una descomposición de M, pues

$$T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4 \cup T_5 = M$$

$$T_1 \cap T_2 = \overline{FC}; \quad T_1 \cap T_3 = C; \quad T_1 \cap T_4 = \varnothing; \quad T_1 \cap T_5 = \varnothing$$

$$T_2 \cap T_3 = \overline{GC}; \quad T_2 \cap T_4 = G; \quad T_2 \cap T_5 = \varnothing$$

$$T_3 \cap T_4 = \overline{GH}; \quad T_3 \cap T_5 = \overline{HB}$$

$$T_4 \cap T_5 = \overline{AH}$$

EJERCICIOS

4.4 Dibuje varios polígonos fijos y descompóngalos en triángulos fijos.

4.5 Recubra un polígono fijo con triángulos fijos, de modo que no obtenga una «descomposición».

4.6 ¿Por qué una descomposición no es una partición?

• DEFINICIÓN 4.2: (1.ª parte) *Diremos que el triángulo fijo T está relacionado con el triángulo fijo T', lo que expresaremos escribiendo:*

$$T \equiv T'$$

si mediante un número finito de simetrías axiales se puede transformar T en T' (figura 4.2).

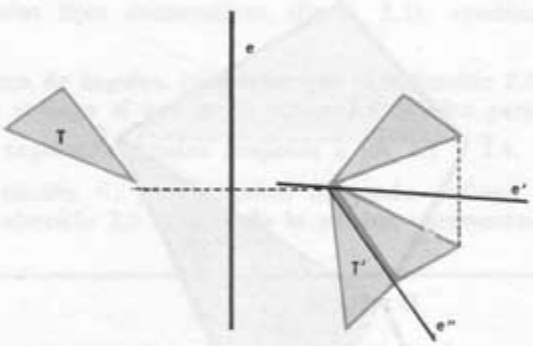


Figura 4.2

EJERCICIO

4.7 Explique cómo se han elegido las rectas *e*, *e'* y *e''* de la figura 4.2.

• DEFINICIÓN 4.2: (2.ª parte) *Diremos que el polígono fijo M está relacionado con el M', lo que expresaremos escribiendo*

$$M \equiv M'$$

si se puede efectuar una descomposición

$$T_1, T_2, \ldots, T_n$$

de M y una descomposición

$$T_1', T_2', \ldots, T_n'$$

de M', tales que

$$T_1 \equiv T_1'; \quad T_2 \equiv T_2'; \quad \ldots; \quad T_n \equiv T_n'$$

* EJEMPLO 4.2: El paralelogramo M está relacionado con el exágono M' (figura 4.3), según se comprueba inmediatamente.

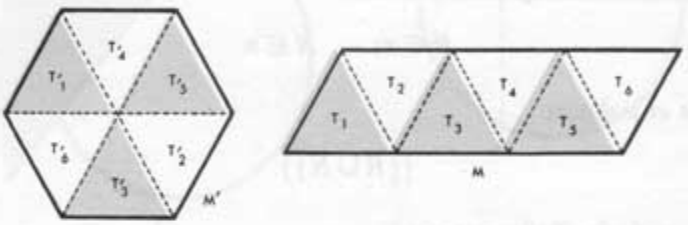


Figura 4.3

EJERCICIOS

4.8 Demuestre que la relación $\equiv$, entre polígonos fijos, es de equivalencia.

4.9 Ponga varios ejemplos de polígonos fijos equivalentes.

A las clases así producidas se les llama polígonos. Al conjunto de los polígonos lo designaremos por $\mathcal{P}$, es decir,

$$\mathcal{P} = P/\equiv$$

Representaremos a los polígonos por letras minúsculas: $p, q, r, \ldots$, es decir,

$$\mathcal{P} = \{p, q, r, \ldots\}$$

* DEFINICIÓN 4.3: *Diremos que dos polígonos, R y N, son consecutivos si su intersección es un segmento fijo* (figura 4.4).

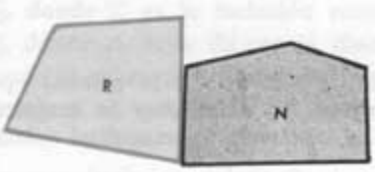


Figura 4.4

EJERCICIO

4.10 Comprobar que si R y N son dos polígonos fijos consecutivos, entonces $R \cup N$ es otro polígono fijo.

• DEFINICIÓN 4.4: *Dados dos polígonos, r y n, sean R y N dos polígonos fijos consecutivos, tales que*

$$R \in r; \qquad N \in n$$

Entonces el polígono

$$\{\{R \cup N\}\}$$

se llama suma de los polígonos r y n.

Esquemáticamente:

$$\left.\begin{array}{ccc} r & \longrightarrow & R \\ n & \longrightarrow & N \end{array}\right\} \text{consecutivos}$$

$$\begin{array}{ccc} r+n & \longleftarrow & R \cup N \end{array}$$

EJERCICIO

4.11 Realice ejercicios similares a los 3.6 y 3.7, pero ahora para polígonos.

• TEOREMA 4.1: $(\mathcal{P}, +, \leqslant)$ *es una magnitud absoluta.*
Esta magnitud se llama EXTENSIÓN *o* ÁREA.

Nota: El estudio anterior de la magnitud extensión de polígonos es susceptible de ampliarse a recintos cualesquiera.

EJERCICIO

4.12 Si en el estudio anterior sustituimos la palabra «polígono» por «poliedro» y «triángulo» por «triedro», obtenemos la magnitud «volumen», paralelamente a como se ha obtenido la magnitud «extensión». Desarrolle esta idea.

---

5. Otros ejemplos de magnitud

• EJEMPLO 5.1: Sean A y B dos puntos distintos pertenecientes a una circunferencia c de centro O (figura 5.1). La recta AB determina dos semiplanos. Consideremos el que no contiene al punto O. Su intersección con la circunferencia c es el arco fijo $\overset{\frown}{AB}$. En el conjunto C de los arcos fijos de la circunferencia c se establece una relación de equivalencia, diciendo que $\overset{\frown}{AB}$ está relacionado con $\overset{\frown}{CD}$ (figura 5.2), si mediante un número finito de simetrías axiales se puede transformar $\overset{\frown}{AB}$ en $\overset{\frown}{CD}$. A las clases así obtenidas se les llama *arcos*. Representaremos por $\mathcal{C}$ el conjunto de los arcos.

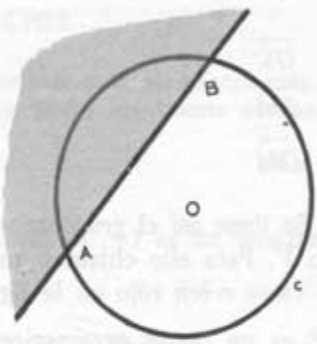


Figura 5.1

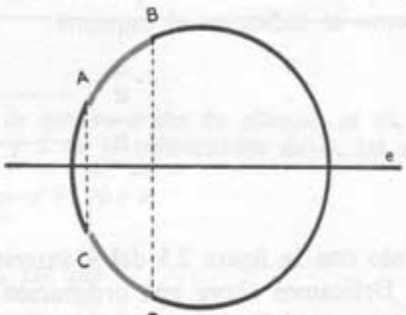


Figura 5.2

EJERCICIOS

5.1 Haga un estudio similar al del párrafo 3 hasta llegar a construir la magnitud «arco».

5.2 Compruebe si son magnitudes:

a) **$(N, +, \leqslant)$, donde N es el conjunto de los naturales;**
b) **$(Z, +, \leqslant)$ donde Z es el conjunto de los enteros;**
c) **$(Q, +, \leqslant)$, donde Q es el conjunto de los racionales;**
d) **$(R, +, \leqslant)$, donde R es el conjunto de los reales;**
e) **$(C, +, R)$, donde C es el conjunto de los complejos y R la relación del ejercicio 12.12 del § 12;**
f) **$[\mathcal{P}(E), \cup, \subset]$, donde $\subset$ es la inclusión conjuntista;**
g) **$[\mathcal{P}(E), \triangle, \subset]$, donde $\triangle$ es la diferencia simétrica;**
h) **$(N, \vee, |)$, donde $\vee$ es m.c.m. y $|$ la relación de divisibilidad;**
i) **$(\mathcal{N}, \cup, \subset)$, donde $\mathcal{N}=\{N, Z, Q, R, C\}$, siendo N el conjunto de los naturales, Z el de los enteros, etc.**

¿Alguna de estas magnitudes es relativa?

• EJEMPLO 5.2: En el párrafo 2 del § anterior se definió el conjunto V de los vectores de la recta r. Para sumar dos vectores, $\vec{a}$ y $\vec{b}$, se toma, por definición, un segmento orientado perteneciente a cada una de las clases $\vec{a}$ y $\vec{b}$, de modo que el extremo del primero coincida con el origen del segundo, operando como se indica en el esquema:

$$\begin{array}{ccc} \vec{a} & \longrightarrow & \overrightarrow{OS} \\ \vec{b} & \longrightarrow & \overrightarrow{SM} \\ \hline \vec{a}+\vec{b} & \longleftarrow & \overrightarrow{OM} \end{array}$$

de acuerdo con la figura 2.5 del § anterior. Se tiene así el grupo conmutativo $(V, +)$. Definamos ahora una ordenación en V. Para ello elijamos una de las semirrectas que define el punto O, sobre la recta r (en rojo en la figura 5.3). A los vectores de forma $\{\{\overrightarrow{OP}\}\}$, donde P es un punto perteneciente a tal

Figura 5.3

semirrecta, les llamaremos vectores positivos. Sea V_+ el conjunto de los vectores positivos. Notemos que $(V_+, +)$ es un semigrupo, tal que

$$\forall \vec{a} \in V; \quad \vec{a} \in V_+ \quad \text{o bien} \quad -\vec{a} \in V_+$$

Ahora definimos la ordenación en V así:

$$\boxed{\vec{a} \leqslant \vec{b}} \underset{\text{def}}{\iff} \boxed{\vec{b}-\vec{a} \in V_+}$$

Razonando como en el párrafo 5 del § 10, se demuestra que la relación así definida es de orden total y compatible con $+$. Por tanto, $(V, +, \leqslant)$ es una magnitud relativa.

Este procedimiento de definir una ordenación en el grupo conmutativo $(V, +)$ es inmediatamente generalizable: si $(G, +)$ es un grupo conmutativo y G_+ es un subconjunto de G, tal que:

$$\begin{cases} a) & (G_+, +) \text{ es un semigrupo} \\ b) & \forall g \in G; \quad g \in G_+, \quad \text{o bien} \quad -g \in G_+ \end{cases}$$

entonces la relación $\leqslant$, dada por:

$$g \leqslant g' \underset{\text{def}}{\iff} g'-g \in G_+$$

es de orden total y compatible con $+$, por lo que $(G, +, \leqslant)$ es una magnitud relativa. A G_+ se le llama *semigrupo de elementos positivos*, respecto de esa ordenación.

EJERCICIOS

5.3 Demostrar que, recíprocamente a lo que se acaba de afirmar, si $(G, +, \leqslant)$ es un grupo totalmente ordenado y S es el subconjunto de G, tal que

$$g \leqslant g' \underset{\text{def}}{\iff} g' - g \in S$$

entonces $(S, +)$ es un semigrupo, tal que

$$\forall\, g \in G; \qquad g \in S, \qquad \text{o bien} \qquad -g \in S$$

5.4 ¿Cuál es el semigrupo de elementos positivos en la magnitud del ejercicio 5.2 e)?

5.5 Si en vez de considerar ángulos, como en el párrafo 3, se consideran ahora ángulos orientados, con una semirrecta origen y una semirrecta extremo y se opera de modo análogo a como se ha hecho en el ejemplo 5.2, para segmentos orientados, se llega a una magnitud relativa. Desarrolle esta idea.

5.6 Construya la magnitud relativa «arco orientado», a partir del ejemplo 5.1 y operando como sugiere el ejercicio anterior.

5.7 Estudie la magnitud relativa «área orientada», considerando las dos posibles orientados de los polígonos planos (figura 5.4).

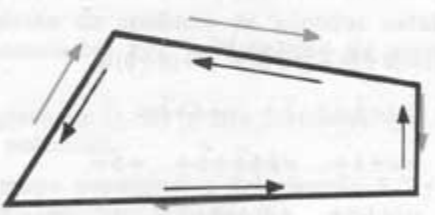


Figura 5.4

6. Operación externa

Consideremos el semigrupo conmutativo $(\Sigma, +)$ del párrafo 2. El producto de un número n por un segmento $\bar{a}$ se define así:

$$n\bar{a} = \bar{a} + \bar{a} + \overset{n)}{\ldots} + \bar{a} \qquad \text{si} \qquad n > 1$$
$$1\bar{a} = \bar{a}$$
$$0\bar{a} = \bar{0}$$

donde $\bar{O}$ es el segmento cero o elemento neutro del semigrupo $(\Sigma, +)$. De este modo, a cada número natural n y a cada segmento $\bar{a}$, podemos asociar otro segmento:

$$(n, \bar{a}) \longrightarrow n\bar{a}$$

Como

$$(n, \bar{a}) \in N \times \Sigma; \quad n\bar{a} \in \Sigma$$

estamos ante una aplicación

$$N \times \Sigma \longrightarrow \Sigma$$

que suele llamarse una *operación externa.*

Estudiemos las *propiedades del producto de números naturales por segmentos,* que acaba de definirse:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I)} & \boxed{n(\bar{a}+\bar{b})=n\bar{a}+n\bar{b}} \\ \text{II)} & \boxed{(n+m)\bar{a}=n\bar{a}+m\bar{a}} \\ \text{III)} & \boxed{n(m\bar{a})=(nm)\bar{a}} \end{array}\right\} \quad \forall\, n, m \in N; \quad \forall\, \bar{a}, \bar{b} \in \Sigma$$

Demostración de I):

Si $n > 1$,

$$\begin{aligned} n(\bar{a}+\bar{b}) &= (\bar{a}+\bar{b})+(\bar{a}+\bar{b})+\overset{n)}{\ldots}+(\bar{a}+\bar{b})= \\ &= \bar{a}+\bar{b}+\bar{a}+\bar{b}+\ldots+\bar{a}+\bar{b}= \\ &= \bar{a}+\bar{a}+\ldots+\bar{a}+\bar{b}+\bar{b}+\ldots+\bar{b}= \\ &= (\bar{a}+\bar{a}+\overset{n}{\ldots}+\bar{a})+(\bar{b}+\bar{b}+\overset{n)}{\ldots}+\bar{b})=n\bar{a}+n\bar{b} \end{aligned}$$

Si $n=1$,

$$1(\bar{a}+\bar{b})=\bar{a}+\bar{b}=1\bar{a}+1\bar{b}$$

Si $n=0$,

$$0(\bar{a}+\bar{b})=\bar{0}=\bar{0}+\bar{0}=0\bar{a}+0\bar{b}$$

EJERCICIOS

6.1 Razone cada uno de los pasos de la demostración anterior.

6.2 Demuestre la propiedad II).

6.3 **Demuestre la propiedad III), utilizando el teorema 9.2 del § 9.**

6.4 **Defina el producto de números naturales por ángulos. Para ello basta sustituir el semigrupo $(\Sigma, +)$, del párrafo 2, por el $(\mathcal{A}, +)$, del párrafo 3.**

Para expresar que

- $(\Sigma, +)$ es un semigrupo conmutativo, y
- la operación externa: $N \times \Sigma \longrightarrow \Sigma$ verifica:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I)} & n(\bar{a}+\bar{b}) = n\bar{a} + n\bar{b} \\ \text{II)} & (n+m)\bar{a} = n\bar{a} + m\bar{a} \\ \text{III)} & n(m\bar{a}) = (nm)\bar{a} \\ \text{IV)} & 1\bar{a} = \bar{a} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \forall\, m, n \in N \\ \forall\, \bar{a}, \bar{b} \in \Sigma \end{array}$$

diremos que

Σ es un semimódulo sobre N, o bien, *Σ es un N-semimódulo*

EJERCICIOS

6.5 **Compare la definición de producto de números naturales por elementos de un semigrupo conmutativo con la definición de potencia, dada en el ejercicio 2.6 del § 5.**

6.6 **Compare las propiedades I), II) y III) anteriores con las propiedades correspondientes de las potencias.**

6.7 **Si $(V, +)$ es el grupo conmutativo del ejemplo 5.2 y se define el producto de números enteros por vectores así:**

$$n\vec{a} = \vec{a} + \vec{a} + \overset{(n}{\ldots} + \vec{a} \quad \text{(si } n \in Z_+\text{)}$$

$$1\vec{a} = \vec{a}$$

$$0\vec{a} = \vec{0}$$

$$(-p)\vec{a} = -(p\vec{a}) = -(\vec{a} + \vec{a} + \overset{p)}{\ldots} + \vec{a}) \quad \text{(si } -p \text{ es un entero negativo)}$$

demuestre que esta operación externa:

$$Z \times V \longrightarrow V$$

posee las propiedades I), II) y III), estudiadas para la operación externa:

$$N \times \Sigma \longrightarrow \Sigma$$

• EJEMPLO 7.1: Consideremos de nuevo la magnitud longitud $(\Sigma, +, \leqslant)$ del párrafo 2, donde la ordenación $\leqslant$ es total. En la figura 7.1 se muestra es-

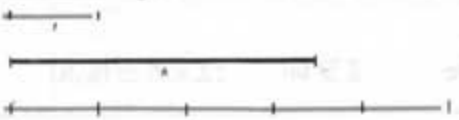


Figura 7.1

quemáticamente un ejemplo de la siguiente propiedad: *dados dos segmentos* $\bar{r}$ *y* $\bar{n}$ *y supuesto* $\bar{r} > 0$, *siempre existe un número natural* k, *tal que*

$$k\bar{r} > \bar{n}$$

es decir, tal que

$$\bar{r} + \bar{r} + \overset{(k}{\ldots} + \bar{r} > \bar{n}$$

o sea, tal que

$$\bar{n} < \bar{r} + \bar{r} + \overset{(k}{\ldots} + \bar{r}$$

$$\bar{n} \neq \bar{r} + \bar{r} + \overset{(k}{\ldots} + \bar{r}$$

Por ello se dice que *la ordenación* $\leqslant$ *es arquimediana* o que *el semigrupo* $(\Sigma, +)$ *es arquimediano* y que $(\Sigma, +, \leqslant)$ *es una magnitud escalar.*

En la definición 2.5 se construyó una ordenación a partir de la operación del semigrupo $(\Sigma, +)$. Este procedimiento se extiende inmediatamente a cualquier semigrupo conmutativo así:

• DEFINICIÓN 7.1: *Sea* $(S, +)$ *un semigrupo conmutativo. Diremos que* a *es menor o igual a* b, *lo que expresaremos escribiendo*

$$\boxed{a \leqslant b}$$

si existe un elemento $h \in S$, *tal que*

$$\boxed{h + a = b}$$

A esta ordenación la llamaremos *ordenación natural del semigrupo.*

• EJEMPLO 7.2: La ordenación producida por la relación de inclusión es la natural en el semigrupo $[\mathcal{P}(E), \cup]$, ya que

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(E); \quad \boxed{A \subset B} \iff \boxed{\exists H \in \mathcal{P}(E); \quad H \cup A = B}$$

pero esta ordenación es parcial.

EJERCICIOS

7.1 **Si designamos por C' al subconjunto de los complejos cuyas partes real e imaginaria son ambas positivas, la ordenación producida por la relación R, definida en el ejercicio 12.12 del § 12, es total, como se vio en el ejercicio 5.2 e). Compruebe que esta ordenación no es la natural del semigrupo $(C', +)$.**

7.2 **Demostrar que en todo grupo $(G, +)$ totalmente ordenado, esta ordenación es la natural del semigrupo de los elementos positivos (respecto de la ordenación) Tenga en cuenta el ejercicio 5.3.**

• DEFINICIÓN 7.2: *Un semigrupo conmutativo, $(S, +)$, totalmente ordenado por su relación natural de ordenación se dice arquimediano, si*

$$\forall\, a, b \in S; \quad a \neq 0; \quad \exists\, k \in N; \quad \boxed{ka > b}$$

• EJEMPLOS: Los semigrupos de los párrafos 2, 3 y 4 son arquimedianos. El semigrupo del ejemplo 7.2 no es arquimediano, pues la ordenación $\subset$ no es total. El del ejercicio 7.1 tampoco lo es respecto de R, pues aunque la ordenación es total no es la natural.

EJERCICIO

7.3 **Compruebe que en el caso del ejemplo 7.2 no se verifica la condición**

$$\boxed{ka > b}$$

enunciada anteriormente, pero sí en el caso del ejercicio 7.1.

• DEFINICIÓN 7.3: *Diremos que la magnitud absoluta*

$$(S, +, \leqslant)$$

es una magnitud escalar, si el semigrupo $(S, +)$ es arquimediano respecto de la ordenación total $\leqslant$.

Diremos que la magnitud relativa

$$(S, +, \leqslant)$$

es una magnitud escalar si el semigrupo S_+, de los elementos positivos, respecto de la ordenación total $\leqslant$, es arquimediano.

• EJEMPLO 7.3: En el ejercicio 5.2c) se vio que $(Q, +, \leqslant)$ es una magnitud, siendo $\leqslant$ la ordenación total natural. Además, en la proposición 5.3 del § 11 se vio que el semigrupo $(Q_+, +)$ era arquimediano. Por ello diremos que la magnitud $(Q, +, \leqslant)$ es escalar.

• EJEMPLO 7.4: En la magnitud relativa $(C, +, R)$ del ejercicio 5.2 e), la ordenación R es total. El semigrupo de elementos positivos, respecto de esta ordenación, es

$$C_+ = \{x \in C \mid 0+0i \, R \, x\}$$

según se vio en el ejercicio 5.4. Notemos que no es arquimediano, pues

$$0+i \in C_+; \qquad 1+i \in C_+$$

y no existe ningún natural k, tal que

$$k(0+i) > 1+i$$

luego $(C, +, R)$ no es una magnitud escalar.

EJERCICIOS

7.4 Estudiar qué magnitudes, de las consideradas en el párrafo 5, son escalares.

7.5 Comprobar que toda magnitud escalar $(S, +, \leqslant)$ es «cancelativa», es decir, que

$$\forall\, a, b, c \in S; \qquad a+c=b+c \Rightarrow a=b$$

Para ello tenga en cuenta que en toda magnitud escalar absoluta son ciertas las propiedades de la sustracción de naturales estudiadas en el párrafo 8 del § 9. Si la magnitud es relativa es trivial.

Se puede demostrar, aunque no lo haremos, que todo semigrupo (respectivamente grupo) totalmente ordenado y arquimediano es isomorfo a un subsemigrupo (respectivamente subgrupo) del semigrupo $(R_+, +)$ de los reales positivos (respectivamente del grupo aditivo de los reales), por lo que teniendo en cuenta la biyección existente entre puntos de la recta y números reales estudiada en el § anterior, podemos afirmar que *las magnitudes escalares son aquellas que se pueden representar mediante «escalas», es decir mediante un subconjunto de puntos de una recta.* Por ejemplo, la longitud y la amplitud son magnitudes escalares. En cambio, la magnitud del ejemplo 7.4, o los vectores del plano, que estudiaremos el próximo curso, no son magnitudes esca-

lares (no se pueden representar mediante puntos de una recta, sino mediante puntos de un plano o de otros espacios de mayor dimensión).

8. Medida de cantidades de una magnitud escalar

Con las cantidades de una magnitud escalar

$$(S, +, \leqslant)$$

o elementos del semigrupo, o grupo, $(S, +)$ sólo puede efectuarse la adición, o la adición y sustracción, si se trata de una magnitud relativa. Pero las cantidades de una magnitud no pueden multiplicarse, ni dividirse. Tampoco se puede operar con cantidades pertenecientes a distintas magnitudes. Para evitar estos inconvenientes se introduce el concepto de *medida* de magnitudes escalares.

• EJEMPLO 8.1: Consideremos la magnitud absoluta *longitud*. Por medir un segmento entendemos habitualmente dar un número real, resultado de la medida. En este caso, medir consiste, pues, en asociar a cada segmento un número real. Por tanto, en este caso, *la medida es una aplicación que asocia a cada segmento un número real positivo*, o sea, una aplicación

$$\Sigma \xrightarrow{\text{medida}} R_+$$

que es una biyección. Además, a la suma de dos segmentos ha de asociar la suma de sus medidas, es decir, ha de ser un homomorfismo de

$$(\Sigma, +) \xrightarrow{\text{medida}} (R_+, +)$$

y, por tanto, un isomorfismo, por ser una biyección.

• EJEMPLO 8.2: Consideremos ahora la magnitud escalar absoluta *amplitud*. *Medir la magnitud* $(\mathcal{A}, +, \leqslant)$ *es establecer un isomorfismo*

$$(\mathcal{A}, +) \xrightarrow{\text{medida}} (R_+, +)$$

que asocia a cada ángulo un número real positivo. Así, por ejemplo, como

ángulo llano = ángulo recto + ángulo recto

por ser la medida un isomorfismo, se tendrá:

med (ángulo llano) = *med* (ángulo recto) + *med* (ángulo recto)

donde *med* indica *medida*.

Notemos que R_+ es *multiplicativamente cerrado*, es decir, que el producto de dos reales positivos es otro real positivo. Esta es una de las ventajas de establecer la *medida: dos ángulos no pueden multiplicarse, pero sí sus medidas. Tampoco podría operarse una cantidad de* Σ *con otra de* $\mathcal{A}$, *pero sí sus medidas*, que son números reales.

Nota 8.1: Consideremos que $0 \in R_+$, por lo que a R_+ se le llama también conjunto de los números reales no negativos. Cuando queramos representar el conjunto de los reales estrictamente positivos (excluido el cero) escribiremos R_+^*.

• DEFINICIÓN 8.1: *Medir una magnitud escalar absoluta*

$$(S,\ +,\ \leqslant)$$

es establecer un isomorfismo

$$(S,\ +) \xrightarrow{\text{med}} (K_+,\ +)$$

donde K_+ *es un subconjunto de* R_+, *multiplicativamente cerrado y tal que* $1 \in K_+$.

• EJEMPLO 8.3: Sea D el conjunto de los días. Consideremos el conjunto $\mathcal{P}(D)$, de las partes de D. Establezcamos una relación R en $\mathcal{P}(D)$. Dos partes de D están relacionadas si entre ellas se puede establecer una biyección. Así, por ejemplo, si

$A = \{16\text{-junio-}1968,\ 12\text{-octubre-}1968,\ 8\text{-junio-}1968\}$
$B = \{15\text{-noviembre-}1968,\ 5\text{-octubre-}1961,\ 30\text{-septiembre-}1958\}$
$C = \{15\text{-junio-}1962,\ 25\text{-abril-}1968\}$

$$A\ R\ B \qquad \text{pero} \qquad B\ \not{R}\ C$$

Representamos por $\mathfrak{D}$ al conjunto cociente de $\mathcal{P}(D)$ respecto de la relación de equivalencia R; los elementos de $\mathfrak{D}$ se pueden designar así:

$$0d,\ 1d,\ 2d,\ 3d,\ 4d,\ 5d,\ \ldots$$

En $\mathfrak{D}$ puede definirse la adición en la forma habitual:

$$\left.\begin{array}{l} 2d \longrightarrow C \\ 3d \longrightarrow A \end{array}\right\} A \cap C = \varnothing$$
$$\overline{5d \leftarrow A \cup C}$$

resultando el semigrupo conmutativo $(\mathfrak{D},\ +)$, y si introducimos $\leqslant$ en la forma natural, se tiene la magnitud escalar absoluta

$$(\mathfrak{D},\ +,\ \leqslant)$$

La aplicación

$$\mathfrak{D} \longrightarrow N$$

que asocia a la cantidad $nd \in \mathfrak{D}$ el número natural n, es un isomorfismo de

$$(\mathfrak{D}, +) \longrightarrow (N, +)$$

Como $(N, +)$ es un subsemigrupo de $(R_+, +)$, tal que N es multiplicativamente cerrado, y $1 \in N$, la aplicación anterior establece una medida de la magnitud que estamos considerando.

- EJEMPLO 8.4: Consideremos la magnitud escalar relativa

$$(V, +, \leqslant)$$

del ejemplo 5.2. Consideremos la siguiente aplicación de

$$V \longrightarrow R$$

Dado un vector $\overrightarrow{v} \in V$, consideremos el punto P de la recta, tal que $\overrightarrow{OP} \in \overrightarrow{v}$ (figura 5.3). Ahora la biyección b^{-1}, del § anterior, asociará a P un número real. Del § anterior y del ejemplo 5.2 sigue que esta aplicación es un isomorfismo de grupos:

$$(V, +) \longrightarrow (R, +)$$

Generalizando:

- DEFINICIÓN 8.2: *Medir una magnitud escalar relativa*

$$(G. +, \leqslant)$$

es *establecer un isomorfismo*

$$(G, +) \xrightarrow{\text{medida}} (K, +)$$

donde K es un subconjunto de los reales, multiplicativamente cerrado y tal que contiene al elemento unidad.

Nota: El problema de la existencia de tal medida sale fuera de los límites de este estudio. Puede verse en el libro:

P. ABELLANAS, *Matemática para Físicos e Ingenieros*, Ed. Romo, Madrid, 1963, páginas 62-73.

EJERCICIOS

8.1 Para cada una de las magnitudes escalares del ejercicio 7.4 busque un subconjunto de R que sirva para medir esa magnitud.

8.2 Demostrar que, en las condiciones de la definición 8.1, $(K_+, +)$ es un semigrupo y en las condiciones de la definición 8.2 $(K, +)$ es un grupo.

8.3 Demostrar que la medida conserva la ordenación, es decir, que

$$a \leqslant b \implies \text{med}\,(a) \leqslant \text{med}\,(b)$$

donde $\leqslant$ en rojo representa la relación de ordenación natural de los reales.

8.4 Demostrar que, en las condiciones de la definición 8.1, $(K_+, \cdot)$ es un semigrupo conmutativo y con elemento unidad. Lo mismo para $(K, \cdot)$ de la definición 8.2.

En el ejemplo 8.1 se ha establecido la medida mediante el subconjunto R_+ de los reales. Notemos que el conjunto

$$R_+^* = R_+ - \{0\}$$

definido en la nota 8.1, es tal que

$$(R_+^*, \cdot)$$

es un grupo. En cambio, en el ejemplo 8.3, donde hemos establecido la medida mediante N el semigrupo

$$(N^*, \cdot)$$

no es grupo. La comparación de estos dos casos nos lleva a establecer la siguiente definición:

• DEFINICIÓN 8.3: *Dada una magnitud escalar absoluta o relativa*

$$(S, +, \leqslant)$$

en la que se ha establecido una medida

$$S \xrightarrow{\text{med}} K$$

diremos que se trata de una magnitud eudoxiana, si

$$(K^*, \cdot)$$

es un grupo, siendo

$$K^* = K - \{0\}$$

Observación: Aunque no lo haremos, puede probarse que esta definición es consistente, no dependiendo de la medida establecida.

Nota: La palabra *eudoxiana* se utiliza en memoria del matemático griego EUDOXO.

• EJEMPLOS: Las magnitudes escalares de los ejemplos 8.1, 8.2 y 8.4 son eudoxianas, pero la del ejemplo 8.3 no lo es.

EJERCICIOS

8.5 Diga qué magnitudes escalares, de las consideradas en el ejercicio 8.1, son eudoxianas.

8.6 Demostrar que si la magnitud escalar relativa de la definición 8.2 es eudoxiana, entonces $(K, +, \cdot)$ es un cuerpo conmutativo ordenado.

---

9. Operación externa sobre una magnitud escalar

• EJEMPLO 9.1: La medida indicada en el ejemplo 8.1, para la magnitud longitud:

$$\Sigma \xrightarrow{\text{med}} R_+$$

permite definir el producto de números reales positivos por segmentos, de la forma que indicamos a continuación. Sean:

$$\bar{s} \in \Sigma; \qquad k \in R_+$$

Sea

$$\text{med}\,(\bar{s}) = r \in R_+$$

es decir, sea el número real r la medida de la cantidad $\bar{s}$. Consideremos el producto

$$kr \in R_+$$

Como la aplicación *med* (medida) es un isomorfismo, y, por tanto, una biyección, existirá un segmento único cuya medida sea kr, el segmento

$$\text{med}^{-1}\,(kr)$$

donde med^{-1} es la biyección inversa de la biyección *med*. A este segmento se le designa abreviadamente por

$$k\bar{s}$$

y se le llama producto del número real r por el segmento $\bar{s}$. Hemos conseguido, de este modo, asociar al número real k y al segmento $\bar{s}$, el segmento $k\bar{s}$, es decir,

$$(k, \bar{s}) \longrightarrow k\bar{s}$$

con lo que se ha definido una operación externa:

$$R_+ \times \Sigma \longrightarrow \Sigma$$

EJERCICIOS

9.1 Demostrar que en el ejemplo 9.1

$$\boxed{\bar{ks} = \text{med}^{-1}\,[k \cdot \text{med}\,(\bar{s})]}$$

9.2 Demuestre que, si designamos por

$$R \xrightarrow{k} R$$

a la aplicación que asocia al número real r, el número real kr, el producto del número real k por el segmento $\bar{s}$ puede esquematizarse así:

$$\begin{array}{ccc} \bar{s} & \xrightarrow{\text{med}} & r \\ \downarrow{\scriptstyle k} & & \downarrow{\scriptstyle k} \\ \bar{ks} & \xleftarrow{\text{med}^{-1}} & kr \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \Sigma & \xrightarrow{\text{med}} & R_+ \\ \downarrow{\scriptstyle k} & & \downarrow{\scriptstyle k} \\ \Sigma & \xleftarrow{\text{med}^{-1}} & R_+ \end{array}$$

9.3 Pruebe que la aplicación

$$R_+ \xrightarrow{k} R_+ \quad k \neq 0$$

del ejercicio anterior es una biyección, por ser $(R_+^*, \cdot)$ un grupo.

• DEFINICIÓN 9.1: *Dada una magnitud escalar*

$$(S, +, \leqslant)$$

y una medida de ella

$$S \xrightarrow{\text{med}} K$$

se define la operación externa:

$$K \times S \longrightarrow S$$

como la aplicación que asocia al número real $k \in K$ y a la cantidad $s \in S$ la cantidad

$$\boxed{ks = \text{med}^{-1}\,[k \cdot \text{med}\,(s)]}$$

EJERCICIOS

9.4 Demostrar que en las condiciones de la definición anterior

$$\boxed{\text{med}\,(ks) = k \cdot \text{med}\,(s)}$$

9.5 Defina la operación externa sobre cada una de las magnitudes escalares del ejercicio 8.1.

9.6 Demuestre que la operación externa que estamos estudiando verifica las cuatro propiedades que tenía la operación externa del párrafo 6.

10. Unidad de medida

• DEFINICIÓN 10.1: *Dada una magnitud escalar* $(S, +, \leqslant)$ *y una medida de ella:*

$$S \xrightarrow{\text{med}} K$$

se llama unidad de esta medida a la cantidad $u \in S$, *tal que*

$$\text{med}\,(u) = 1$$

EJERCICIOS

10.1 En las condiciones de la definición anterior se verifica

$$\forall\, s \in S; \quad \exists\, k \in K; \quad \boxed{ku = s}$$

10.2 En las mismas condiciones

$$\boxed{ku = s} \iff \boxed{\text{med}\,(s) = k}$$

10.3 Si en las condiciones de la definición 10.1, consideramos una segunda medida

$$S \xrightarrow{\text{med}'} K'$$

de la misma magnitud, se verifica

$$\boxed{\text{med}'\,(s) = \text{med}\,(s) \cdot \text{med}'\,(u)}$$

Demostrar que esta afirmación sigue del ejercicio anterior y del 9.3.

10.4 Demuestre que para la magnitud eudoxiana de la definición 8.3 se verifica:

$$\forall\, s, s' \in S; \quad s \neq 0; \quad \exists\, k \in K; \quad ks = s'$$

10.5 Compruebe que la afirmación del ejercicio anterior no es cierta para la magnitud escalar del ejemplo 8.3, por no ser eudoxiana. Busque ejemplos en que sí sea cierta.

De los ejercicios 9.4 y 10.4 se deduce que la medida de una magnitud escalar eudoxiana queda determinada si fijamos K y damos la medida de una cantidad no nula.

• EJEMPLO 10.1: Consideremos dos medidas de la magnitud amplitud, la sexagesimal y la centesimal:

$$S \xrightarrow{\text{med sex}} R_+$$

tal que

$$med\ sex\ (\text{ángulo recto}) = 90$$

luego:

$$med\ sex \left(\frac{1}{90}\ \text{ángulo recto} \right) = \frac{1}{90} \times 90 = 1$$

Por tanto

$$unidad\ sex = \frac{1}{90}\ \text{ángulo recto} = \text{grado sexagesimal}$$

$$S \xrightarrow{\text{med cen}} R_+$$

tales que

$$med\ cen\ (\text{ángulo recto}) = 100$$

luego:

$$med\ cen \left(\frac{1}{100}\ \text{ángulo recto} \right) = \frac{1}{100} 100 = 1$$

Por tanto:

$$unidad\ cen = \frac{1}{100}\ \text{ángulo recto} = \text{grado centesimal}$$

• EJEMPLO 10.2: Consideremos dos medidas de la magnitud área:

$$\mathcal{P} \xrightarrow{\text{med}} R_+ \qquad \mathcal{P} \xrightarrow{\text{med}'} R_+$$

de la forma siguiente: Sea C un cuadrado fijo y T uno de los triángulos rectángulo-isósceles fijo de hipotenusa un lado del cuadrado C (figura 10.1).

Sea

$$\text{med}\,(\{\{C\}\}) = 1; \qquad \text{med}'\,(\{\{T\}\}) = 1$$

es decir, sean las respectivas unidades de medida

$$u = \{\{C\}\} \qquad u' = \{\{T\}\}$$

La figura 10.1 muestra que

$$\text{med}'(u) = 4$$

luego

$$u = 4u'$$

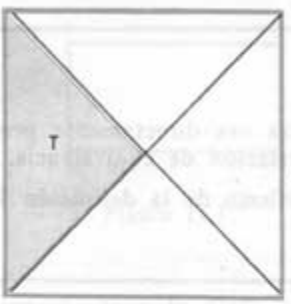


Figura 10.1

Por tanto,

$$\forall\, p \in \mathcal{P};\quad p = ku = k4u' = 4ku'$$

luego

$$\text{med}'(p) = 4 \cdot \text{med}(p)$$

de acuerdo con el ejercicio 10.3.

EJERCICIO

10.6 Razone como en el ejemplo anterior, pero ahora tomando como unidades de medida las clases de polígonos definidas por el exágono de la figura 10.2 y el rectángulo de la figura 10.4, cuyo lado mayor es doble del menor y el menor igual al lado de exágono. La figura 10.3 ayuda a obtener med'(u).

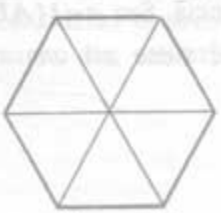


Figura 10.2

Figura 10.3

Figura 10.4

11. Magnitudes directamente proporcionales

• DEFINICIÓN 11.1: *Diremos que la magnitud escalar* $(S', +, \leqslant)$ *es directamente proporcional a la magnitud escalar* $(S, +, \leqslant)$ *si existe un isomorfismo:*

$$(S, +) \longrightarrow (S', +)$$

EJERCICIOS

11.1 Demostrar que la relación «es directamente proporcional a», entre magnitudes escalares, es una relación de equivalencia.

11.2 Demuestre que el isomorfismo de la definición 11.1 conserva la ordenación en las magnitudes.

• EJEMPLO 11.1: Veamos que la magnitud *arco* es directamente proporcional a la *amplitud*. En efecto: sea $\widehat{a}$ una cantidad cualquiera, perteneciente a la magnitud amplitud. Construyamos un ángulo fijo cuyo vértice coincida con

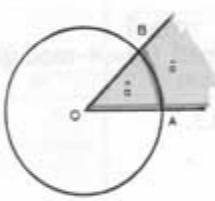


Figura 11.1

el centro O de la circunferencia cuyos arcos consideramos, y perteneciente a la cantidad $\widehat{a}$ (rayado en la figura 11.1), es decir, un ángulo fijo central respecto de esa circunferencia y perteneciente a la clase $\widehat{a}$. Sea el arco fijo $\widehat{AB}$ la intersección de ese ángulo central fijo con la circunferencia. Sea $\widehat{a}=\{\{\widehat{AB}\}\}$. De este modo hemos asociado el arco $\widehat{a}$ al ángulo $\widehat{a}$. Se tiene así una aplicación:

$$\mathcal{A} \xrightarrow{p} \mathcal{C}$$

Figura 11.2

que es una biyección que asocia a la suma de cada dos ángulos la suma de sus arcos correspondientes, como se esquematiza en la figura 11.2. Se trata, por tanto, de un isomorfismo de $(\mathcal{A}, +)$ en $(\mathcal{C}, +)$.

• EJEMPLO 11.2: La magnitud *longitud* es directamente proporcional a la magnitud *extensión* o *área*. En efecto: sea a una cantidad perteneciente a la magnitud extensión y elijamos un segmento $\bar{u} \in \Sigma$. Consideremos un rectán-

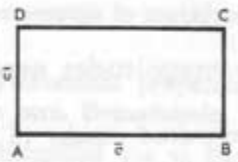


Figura 11.3

gulo fijo (figura 11.3) perteneciente a la clase a y tal que uno de sus lados $\overline{AD} \in \bar{u}$, sea $\bar{a}=\{\{\overline{AB}\}\}$. De este modo hemos asociado al polígono a el segmento $\bar{a}$. Tenemos así una aplicación de $\mathcal{P}$ en Σ, que es una biyección que asocia a la suma de cada dos polígonos la suma de sus correspondientes segmen-

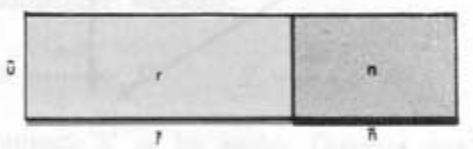


Figura 11.4

tos, como se esquematiza en la figura 11.4. Se trata, pues, de isomorfismo de $(\mathcal{P}, +)$ en $(\Sigma, +)$, una vez elegido un segmento $\bar{u} \in \Sigma$.

• EJEMPLO 11.3: La magnitud *longitud* es directamente proporcional a la magnitud *arco*. En efecto, basta asociar a cada arco fijo $\overset{\frown}{AB}$ (figura 11.5) el segmento $\overline{A'B'}$ que resulta al *rectificarlo*, lo que corresponde a la idea intuitiva de considerar el arco $\overset{\frown}{AB}$ materializado, hecho de una sustancia flexible, y deformarlo, sin estirarlo ni romperlo, transformándolo en un segmento.

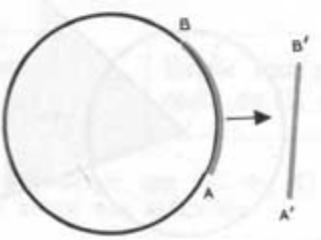


Figura 11.5

EJERCICIO

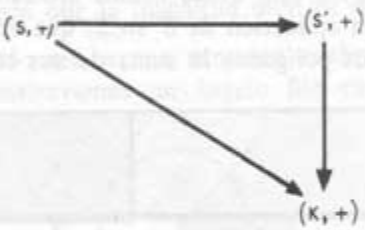
11.3 Comprobar que la magnitud del ejemplo 5.2 es directamente proporcional a la magnitud «área orientada», del ejercicio 5.7.

11.4 Busque otros ejemplos de magnitudes directamente proporcionales.

12. Medida indirecta de magnitudes escalares

• PROPOSICIÓN 12.1: *Si la magnitud escalar* $(S', +, \leqslant)$ *es directamente proporcional a la* $(S, +, \leqslant)$, *toda medida de la primera determina una medida de la segunda.*

Demostración: Basta tener en cuenta las definiciones de medida y de magnitudes directamente proporcionales y que la aplicación compuesta de dos isomorfismos es otro isomorfismo. Esquemáticamente:



• EJEMPLO 12.1: La magnitud *longitud* es directamente proporcional a la magnitud *arco* (ejemplo 11.3) y ésta lo es a la magnitud *ángulo* (ejemplo 11.1), luego (ejercicio 11.1) la magnitud *longitud* es directamente proporcional a la magnitud *amplitud*. Luego toda medida de segmentos determina indirectamente una medida de ángulos. Si tomamos el radio de la circunferencia, cuyos arcos estamos considerando, como unidad de longitud, obtenemos indirectamente una medida de arcos y de ángulos. A la unidad de ángulos así obtenida se le llama *radián*. Por tanto, el radián es el ángulo tal que la medida de su arco rectificado, cuando tomamos el radio como segmento unidad, es 1 (figura 12.1).

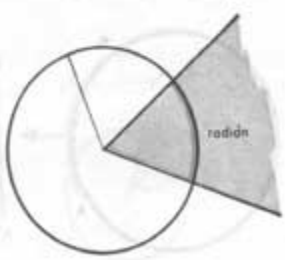


Figura 12.1

EJERCICIOS

12.1 **Teniendo en cuenta que la medida de la semicircunferencia rectificada, cuando el segmento unidad es el radio, es el número real $\pi(\pi \simeq 3{,}14)$, establezca la expresión que permita pasar de la medida de un ángulo en radianes a su medida en grados sexagesimales, razonando como en el ejemplo 10.2.**

12.2 **¿Cómo puede medir indirectamente la magnitud extensión teniendo en cuenta el ejemplo 11.2?**

12.3 **Si dos magnitudes son directamente proporcionales, una de ellas es eudoxiana si, y sólo si, lo es la otra. Demuéstrelo.**

12.4 **Busque otros ejemplos de magnitud que se pueda medir indirectamente, mediante otra directamente proporcional.**

13. Proporcionalidades

• DEFINICIÓN 13.1: Sean $(S, +, \leqslant)$ *y* $(S', +, \leqslant)$ *dos magnitudes escalares tales que se puedan establecer medidas:*

$$S \xrightarrow{\text{med}} K \qquad S' \xrightarrow{\text{med}'} K$$

sobre un mismo subconjunto K de los reales. Diremos que la aplicación

$$S \xrightarrow{p} S'$$

es una proporcionalidad directa de $(S, +, \leqslant)$ *en* $(S', +, \leqslant)$ *si se verifican las dos condiciones siguientes:*

1.ª) *p es una biyección*

2.ª) $\forall k \in K; \quad \forall s \in S; \quad \boxed{p(ks) = kp(s)}$

• TEOREMA 13.1:

$\boxed{(S', +, \leqslant) \text{ es directamente proporcional a } (S, +, \leqslant)} \iff \boxed{\text{Existe una proporcionalidad directa de } (S, +, \leqslant) \text{ en } (S', +, \leqslant)}$

Demostración: Comencemos suponiendo que $(S', +, \leqslant)$ es directamente proporcional a $(S, +, \leqslant)$, es decir, que existe una aplicación

$$S \xrightarrow{p} S'$$

que es un isomorfismo de $(S, +)$ en $(S', +)$. Entonces una medida

$$S' \xrightarrow{\text{med}'} K$$

de la magnitud $(S', +, \leqslant)$, induce otra medida

$$S \xrightarrow{\text{med}} K$$

de la magnitud $(S, +, \leqslant)$, como se ha indicado en el párrafo 12, es decir, de modo que *med* sea la aplicación compuesta de p y *med'*, como indica el esquema de la figura 13.1.

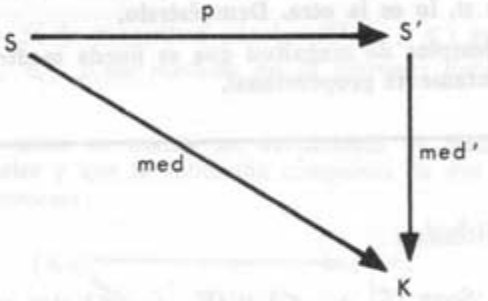


Figura 13.1

Sea s una cantidad cualquiera de S y s' su imagen en la aplicación p. Se tiene:

$$p(s)=s' \Longrightarrow kp(s)=ks' \Longrightarrow \text{med}'\,[kp(s)]=\text{med}'\,(ks')=k\cdot\text{med}'\,(s')=$$

(ejercicio 9.4)

$$=k\cdot\text{med}'\,[p(s)]=k\,\text{med}\,(s)=\text{med}\,(ks)=\text{med}'\,[p(ks)]$$

Por tanto,

$$\text{med}'\,[kp(s)]=\text{med}'\,[p(ks)] \Longrightarrow \boxed{kp(s)=p(ks)}$$

(med' es una biyección)

Recíprocamente: Supongamos ahora que existe una proporcionalidad directa:

$$p: S \longrightarrow S'$$

Sean a y b dos cantidades cualesquiera de S. Sea $u \in S$, tal que $\text{med}\,(u)=1$. Según se vio en el ejercicio 10.1

$$\exists\, h, q \in K; \qquad a=hu; \qquad b=qu$$

Luego si designamos por k a la suma $h+q$

(ejercicio 9.6)

$$p(a+b)=p(hu+qu)=p[(h+q)u]=p(ku)=kp(u)=(h+q)p(u)=hp(u)+qp(u)=$$

(ejercicio 9.4)

$$=p(hu)+p(qu)=p(a)+q(b)$$

• PROPOSICIÓN 13.2: *Si la aplicación*

$$S \xrightarrow{p} S'$$

es una proporcionalidad directa de la magnitud $(S, +, \leqslant)$ *en la magnitud* $(S', +, \leqslant)$, *entonces existe un número real* r *tal que*

$$\boxed{\text{med}'\,[p(s)] = r \cdot \text{med}\,(s)} \qquad \forall\, s \in S$$

Demostración: Sea $\text{med}\,(u)=1$, luego (ejercicio 10.1):

$\forall\, s \in S; \quad \forall\, k \in K; \quad s=ku \Longrightarrow p(s)=p(ku)=kp(u)$

$\Downarrow$

$\text{med}'\,[p(s)]=\text{med}'\,[kp(u)]=k\ \text{med}'\,[p(u)]$

ejercicio 10.2 $\Downarrow$ si designamos por r a la $\text{med}'\,[p(u)]$

$\text{med}'\,[p(s)]=kr=rk$

$k=\text{med}\,(s) \rightarrow \quad \Downarrow$

$\text{med}'\,[p(s)]=r \cdot \text{med}\,(s)$

• DEFINICIÓN 13.2: *Al número real* r *de la proposición anterior se le llama constante o razón de la proporcionalidad directa* p.

EJERCICIOS

13.1 Demostrar que dadas dos magnitudes $(S, +, \leqslant)$ y $(S', +, \leqslant)$, sobre las que se han establecido sendas medidas, y una aplicación

$$p : S \rightarrow S'$$

si existe un número real k, tal que

$$\forall\, s \in S; \qquad \boxed{\text{med}'\,[p(s)] = r \cdot \text{med}\,(s)}$$

entonces p es una proporcionalidad directa. (Recíproca de la proposición 13.2.)

13.2 Demostrar que si las magnitudes escalares S y S' de la definición 13.1 son eudoxianas, se verifica:

$$\forall\, s_1, s_2 \in S; \quad s_2 \neq 0 \qquad \frac{\text{med}'\,[p(s_1)]}{\text{med}'\,[p(s_2)]} = \frac{\text{med}\,(s_1)}{\text{med}\,(s_2)}$$

Relacione lo que acaba de afirmarse con la «regla de tres».

Nota 13.1: Si en las condiciones de la proposición anterior designamos por x a la medida de la cantidad s y por y a la medida de la cantidad correspondiente $p(s)$, la condición de proporcionalidad directa se expresa abreviadamente así:

$$\boxed{y = rx}$$

donde r es un número real fijo.

• EJEMPLO 13.1: Del ejemplo 11.1 se deduce que la aplicación

$$\mathcal{A} \xrightarrow{p} \mathcal{C}$$

allí considerada es una proporcionalidad directa, tal que

$$p\,(\textit{ángulo recto}) = \textit{semicircunferencia}$$

Si tomamos como unidad de ángulos el grado sexagesimal (ejemplo 10.1):

$$\textit{med sex}\,(\textit{ángulo llano}) = 180$$

Si tomamos como unidad de arco aquel que rectificado da el radio

$$\textit{med}'\,(\textit{semicircunferencia}) = \pi$$

Por la proporción anterior se tiene:

$$\textit{med sex}\,(\textit{ángulo llano}) = r \cdot \text{med}'\,[p(\text{ángulo llano})] = r \cdot \text{med}'\,(\text{semicircunferencia})$$

luego la razón de la proporcionalidad r será

$$r = \frac{\text{med sex (ángulo llano)}}{\text{med}'\text{ (semicircunferencia)}} = \frac{180}{\pi} \simeq \frac{180}{3{,}14}$$

EJERCICIO

13.3 Del ejemplo 11.2 se deduce que la aplicación

$$\mathcal{P} \xrightarrow{p} \Sigma$$

allí considerada es una proporcionalidad directa. Si tomamos como unidad de área la clase de figuras determinada por el círculo, cuyo diámetro es la unidad de longitud adoptada y teniendo en cuenta que el círculo y el rectángulo de la figura 13.2 son equivalentes, en el sentido del párrafo 4, y

que la medida del segmento $\overline{AB}$ de la citada figura es $\frac{4}{\pi}$, calcular la razón de la proporcionalidad p.

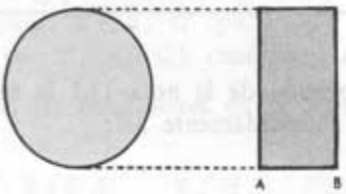


Figura 13.2

• DEFINICIÓN 13.3: Sean $(S, +, \leqslant)$ *y* $(S', +, \leqslant)$ *dos magnitudes escalares eudoxianas, tales que se pueden establecer medidas:*

$$S \xrightarrow{\text{med}} K; \qquad S' \xrightarrow{\text{med}'} K$$

sobre un mismo subconjunto K de los reales. Diremos que la aplicación

$$S \xrightarrow{i} S'$$

es una proporcionalidad inversa de $(S, +, \leqslant)$ *en* $(S', +, \leqslant)$, *si se verifican las dos condiciones siguientes:*

1.ª i *es una biyección*

2.ª $\forall k \in K; \quad \forall s \in S \qquad \boxed{i(ks) = \frac{1}{k}\, i(s)}$

• PROPOSICIÓN 13.3: *Si la aplicación*

$$S \xrightarrow{i} S'$$

es una proporcionalidad inversa de la magnitud $(S, +, \leqslant)$ *en la* $(S', +, \leqslant)$, *entonces existe un número real r, tal que*

$$\boxed{\text{med}\,[i(s)] \cdot \text{med}\,(s) = r} \qquad \forall s \in S$$

EJERCICIOS

13.4 Demuestre la proposición anterior, paralelamente a como se hizo para la proposición 13.2. Enuncie y demuestre la proposición recíproca de la 13.3, como en el ejercicio 13.1 se hizo respecto de la proposición 13.2.

13.5 Compare la definición 13.1 con la 13.3. ¿Por qué en esta última hemos impuesto la condición de ser eudoxianas las magnitudes?

13.6 Busque ejemplos de proporcionalidades inversas, distintas del ejemplo 13.2.

Nota 13.2: Con la notación de la nota 13.1 la condición de proporcionalidad inversa se expresa abreviadamente así:

$$x \cdot y = r$$

donde r es un número real fijo.

• EJEMPLO 13.2: Consideremos la aplicación

$$\Sigma \xrightarrow{i} \Sigma$$

que asocia a cada segmento $\bar{s} \in \Sigma$ el segmento $i(\bar{s}) \in \Sigma$, definido de la forma siguiente: construyamos un rectángulo fijo, uno de cuyos lados sea un segmento fijo perteneciente a la clase $\bar{s}$ y otro de los lados contiguos sea tal que

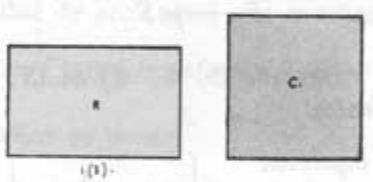


Figura 13.2

$R \equiv C$, siendo C un cuadrado dado (figura 13.3). Por razonamiento geométrico se prueba que en estas condiciones

$$\text{med}\,(s) \cdot \text{med}\,[i(s)] = r$$

donde r es un número real fijo, luego i es una proporcionalidad inversa, según el ejercicio 13.4.

• DEFINICIÓN 13.4: *Sean* $(S, +, \leqslant)$, $(S', +, \leqslant)$ *y* $(S'', +, \leqslant)$ *tres magnitudes escalares, tales que se pueden establecer medidas:*

$$S \xrightarrow{\text{med}} K; \qquad S' \xrightarrow{\text{med}'} K; \qquad S'' \xrightarrow{\text{med}''} K$$

sobre el mismo subconjunto K *de los reales. Diremos que la aplicación*

$$S \times S' \xrightarrow{f} S''$$

establece una proporcionalidad directa de las magnitudes $(S, +, \leqslant)$ *y* $(S', +, \leqslant)$ *en la* $(S'', +, \leqslant)$, *si se verifican las condiciones siguientes:*

1.ª) *Fijada una cantidad* $s \in S$, *la aplicación* f *es una proporcionalidad directa de* $(S', +, \leqslant)$ *en* $(S'', +, \leqslant)$, *cualquiera que sea* $s \in S$.

2.ª) *Fijada una cantidad* $s' \in S'$, *la aplicación* f *es una proporcionalidad directa de* $(S, +, \leqslant)$, *en* $(S'', +, \leqslant)$, *cualquiera que sea* $s' \in S'$.

• PROPOSICIÓN 13.4: En las condiciones de la definición anterior

$$\forall\, k, k' \in K; \qquad \forall\, s \in S; \qquad \forall\, s' \in S' \qquad \boxed{f(ks, k's') = kk' f(s, s')}$$

• PROPOSICIÓN 13.5: En las condiciones de la definición 13.4 existe un número real fijo r, tal que

$$\forall\, s \in S; \qquad \forall s' \in S'; \qquad \boxed{\text{med}''\,[f(s, s')] = r \cdot \text{med}\,(s) \cdot \text{med}'\,(s')}$$

EJERCICIOS

13.7 Demuestre la proposición 13.4, empleando sucesivamente la primera y la segunda condiciones de la definición 13.4.

13.8 Demuestre la proposición 13.5, análogamente a como se hizo para la 13.2.

13.9 Enuncie y demuestre la proposición recíproca de la 13.5.

13.10 Defina una aplicación:

$$S \times S' \longrightarrow S''$$

que sea una proporcionalidad directa de S, e inversa de S' en S''.

13.11 Busque otros ejemplos de proporcionalidad de varias magnitudes en otra, distintos del ejemplo 13.3.

• EJEMPLO 13.3: Consideremos la aplicación:

$$\mathcal{P} \times \Sigma \xrightarrow{f} Vol$$

donde $\mathcal{P}$ designa a la magnitud extensión, Σ a la longitud y Vol al volumen del ejercicio 4.12, definida así: dados

$$q \in \mathcal{P}; \qquad \bar{s} \in \Sigma$$

construyamos una pirámide fija cuya base sea un polígono fijo perteneciente

a la clase q y cuya altura sea un segmento fijo perteneciente a la clase $\bar{s}$. La pirámide así obtenida define una clase v de poliedros, tal que

$$\text{med}\,(v)=r\cdot\text{med}\,(q)\cdot\text{med}\,(s)$$

donde r es un número real fijo, según se prueba geométricamente. Por tanto, por el ejercicio 13.9, f verifica las condiciones de la definición 13.4.

EJERCICIO

13.12 ¿Cómo se han de elegir las unidades de $\mathcal{P}$, Σ y Vol, para que, como es habitual, sea, en el ejemplo 13.3,

$$r=\frac{1}{3}$$

---

14. Didáctica y aplicaciones de las magnitudes, su proporcionalidad y su medida

En opinión de muchos historiadores de la Matemática, esta Ciencia surgió cuando la Humanidad se enfrentó con dos problemas: *contar* y *medir*. Sin embargo, el estudio riguroso de los conceptos de magnitud y su medida no ha sido realizado hasta fecha muy reciente, con la ayuda de las estructuras de la Matemática actual, como se ha indicado en los párrafos anteriores.

Las magnitudes escalares absolutas, en las cuales sólo interviene la estructura de semigrupo, pueden ser introducidas, a nivel escolar, mucho antes que las relativas, que requieren manejar la estructura de grupo. Las magnitudes longitud y amplitud y otras similares pueden ser construidas por el niño, que así se acostumbra a manejar otros semigrupos aditivos distintos del $(N, +)$. El concepto de ordenación total natural es muy simple y se puede introducir simultáneamente.

Una vez que el niño maneja el semianillo N de los naturales, puede introducirse la medida de algunas *magnitudes discretas*, es decir, de magnitudes que pueden medirse mediante el conjunto N de los naturales, como la magnitud *día* del ejemplo 8.3, la magnitud *peseta*, etc.

Notemos que el estudio de una magnitud es más simple que el estudio de su medida. Las magnitudes de los párrafos 2, 3 y 4, por ejemplo, pueden ser manejadas por niños, materializándolas adecuadamente. Así, los segmentos pueden sustituirse por regletas, las simetrías por doblado del papel, los ángulos y polígonos pueden recortarse y colorearse, etc.

Una vez que se han introducido los racionales, puede estudiarse la medida de magnitudes eudoxianas, como las magnitudes ángulo, arco, área, etc. Como

dado un número real siempre existe un racional tan próximo a él como queramos, el cuerpo racional permite medir aproximadamente estas magnitudes.

Interesa hacer ver al alumno cómo una misma cantidad puede tener distintas medidas, según cuál sea la unidad de medida elegida.

Las magnitudes escalares absolutas directamente proporcionales pueden estudiarse cuando el niño maneja isomorfismos de semigrupos, haciendo ver que conservan la ordenación total natural.

Las proporcionalidades directas más simples y, por tanto, por las que debe comenzarse, son aquéllas en que el conjunto de definición de la magnitud coincide con el subconjunto de R utilizado para medirlo. Así ocurre con la magnitud $(N, +, \leqslant)$, donde un ejemplo muy simple de proporcionalidad es el que asocia a cada número natural su triplo.

La aplicación

$$\text{caramelo} \xrightarrow{\text{precio}} \text{peseta}$$

es un ejemplo de proporcionalidad directa.

El estudio de proporcionalidades inversas requiere que la magnitud sea eudoxiana y, por tanto, el conocimiento de los racionales. Un ejemplo muy simple de proporcionalidad inversa, de $(Q, +, \leqslant)$ en sí mismo, es la aplicación que asocia a cada racional su inverso.

La aplicación

$$\text{Velocidad} \xrightarrow{\text{Ha tardado en recorrer una longitud fija}} \text{Tiempo}$$

es una proporcionalidad inversa.

Citemos algunos errores habituales en la introducción del concepto de proporcionalidad.

Se dice a veces que se está ante una proporcionalidad directa de S en S' si las cantidades de S' se obtienen multiplicando las correspondientes cantidades de S por un número fijo, llamado razón de la proporcionalidad, pero por el párrafo 9 sabemos que al multiplicar un número por una cantidad de S se obtiene otra cantidad de S y no S', que, en general, será distinta de S. Por ejemplo, S puede ser la magnitud extensión y S' la longitud.

También se dice a veces que «una aplicación es proporcionalidad directa si al aumentar una cantidad de la primera aumenta la correspondiente de la segunda». En realidad esto no es una proporcionalidad, sino una aplicación o función creciente. Así, la aplicación

$$\Sigma \longrightarrow \wp$$

que asocia a cada segmento $\bar{s}$ la extensión del cuadrado cuyo lado pertenece al segmento $\bar{s}$ es «creciente», pero no es una proporcionalidad directa. Las proporcionalidades directas son aplicaciones crecientes, pues conservan la ordenación, pero no todas las aplicaciones crecientes entre magnitudes son proporcionalidades.

Opinamos que no debe intentarse llegar lo más rápidamente posible a la «regla de tres», es decir, a la determinación de la cantidad correspondiente, en la proporcionalidad, a una cantidad dada de una de las magnitudes, conocida la constante de proporcionalidad mediante un par de cantidades correspondientes, hasta que los conceptos estén suficientemente maduros. Por cometer este error observamos cómo muchos alumnos toman a menudo por proporcionalidades aplicaciones que no lo son.

Las magnitudes desempeñan un importante papel en todas las ciencias. Una ciencia se considera desarrollada cuando ha sido elaborada una teoría de sus correspondientes magnitudes.

La importancia de las proporcionalidades en las ciencias experimentales es enorme debido a que son las aplicaciones más simples entre magnitudes.

Por ello frecuentemente una aplicación entre magnitudes se sustituye por otra que se aproxime a aquélla y sea una proporcionalidad. Por ejemplo, si se designa por x la medida de una cantidad arbitraria de la magnitud de partida de la aplicación y por y la de la correspondiente de llegada, la aplicación

$$y = rx + \alpha x^2 + \beta x^3 + \dots$$

no corresponde a una proporcionalidad directa, pero si α, β, ..., son muy pequeños, para valores no muy grandes de x pueden despreciarse los términos αx^2, βx^3, ..., quedando

$$\boxed{y = rx}$$

que corresponde a una proporcionalidad directa, según se indicó en el párrafo 13. Este caso se presenta en Física al estudiar la dilatación y en otras muchas cuestiones.

Si se desea conocer otros puntos de vista actuales sobre este tema se puede consultar:

ARREGUI, *Concepto de Magnitud Escalar*, «Revista de Enseñanza Media», núm. 153.
LAPLAZA, *Proporcionalidad en Aritmética*, Revista «Gaceta Matemática», núms. 1 y 2. 1967.

Ambas exposiciones son elementales. En la primera de ellas se compara la exposición clásica de magnitud con la actual.

14 TOPOLOGIA

1. La recta racional como espacio topológico

En el § 12 hemos estudiado la biyección

$$R \xrightarrow{b} r$$

existente entre números reales y puntos de la recta. Por otra parte, en el conjunto R de los números reales se estableció una partición:

$$R = Q + I$$

en racionales e irracionales. Hemos designado por I al conjunto de los irracionales.

• DEFINICIÓN 1.1: *Se llama recta racional al conjunto de los puntos de la recta que son imagen de números racionales en la biyección b.*

La recta racional resulta, por tanto, al suprimir en la recta los puntos que son imagen de números irracionales en la biyección b.

Notemos que los puntos suprimidos dependen de cómo se haya establecido la biyección b, es decir de cuál haya sido el punto unidad elegido.

La recta racional tiene, por tanto, «huecos» respecto de la recta real, pero aunque se han suprimido infinitos puntos, estos «agujeros» son imperceptibles, ya que entre dos números racionales siempre hay otro.

Por tanto, dado un punto de la recta, imagen de un número irracional en la biyección b, siempre existe otro punto de la recta imagen de un número racional en la biyección b, tan próximo al primero como queramos (proposición 5.2 del § 11), y, por tanto, infinitos (ejercicio 5.14 del mismo §).

Consideraremos en este párrafo a la recta, limitándonos a sus puntos racionales.

• DEFINICIÓN 1.2: *Se llama intervalo abierto de extremos los puntos M y H al conjunto de los puntos del segmento $\overline{MH}$, excluidos sus extremos.*

Teniendo en cuenta la biyección *b*, *llamaremos intervalo abierto de extremos los números racionales m y h* (supuesto $m \leqslant h$) *al conjunto*

$$\{x \in Q \mid m < x < h\}$$

El intervalo abierto de extremos los números m y h, tales que $m \leqslant h$, se designa por

$$(m, h)$$

Por tanto,

$$\boxed{(m, h) = \{x \in Q \mid m < x < h\}}$$

• EJEMPLO:

$$\left(\frac{2}{3}, 4\right) = \left\{x \in Q \;\middle|\; \frac{2}{3} < x < 4\right\}$$

$$2 \in \left(\frac{2}{3}, 4\right); \quad -\frac{1}{2} \notin \left(\frac{2}{3}, 4\right); \quad 4 \notin \left(\frac{2}{3}, 4\right)$$

• DEFINICIÓN 1.3: *Se llama intervalo cerrado de extremos los puntos M y H al conjunto de los puntos del segmento $\overline{MH}$, incluidos sus extremos.*

EJERCICIOS

1.1 Teniendo en cuenta la biyección *b*, defina el concepto de intervalo cerrado de extremos los números racionales *m* y *h*. Este conjunto se designa por

$$[m, h]$$

1.2 Decida para cada uno de los números racionales

$$2, \; -1, \; \frac{3}{5}, \; 4, \; 0$$

si pertenecen al intervalo cerrado

$$[-1, 1]$$

1.3 Ponga varios ejemplos de intervalos abiertos y cerrados y para cada uno de ellos indique un número que pertenezca y otro que no pertenezca al intervalo.

1.4 Repita el ejercicio anterior, sustituyendo la palabra «número racional» por «punto de la recta racional».

1.5 Diga si el intervalo

$$S=\{x \in Q \mid m < x \leqslant h\}$$

es abierto o cerrado.

1.6 Diga cuál de las siguientes formas de designar el intervalo del ejercicio anterior le parece más apropiada:

$$(m, h); \quad [m, h]; \quad (m, h]; \quad [m, h)$$

1.7 Ordene los cuatro intervalos indicados en el ejercicio anterior por la relación de inclusión.

1.8 ¿Cuáles son los intervalos abierto y cerrado de extremos los puntos M y H, cuando M coincide con H?

1.9 Deduzca del ejercicio anterior si al conjunto $\varnothing$ debe considerarlo como intervalo abierto o cerrado. ¿Y a los conjuntos unitarios formados por un único punto?

1.10 Demuestre que la intersección de dos intervalos abiertos es otro intervalo abierto.

• DEFINICIÓN 1.4: *Se llama conjunto abierto a la unión de intervalos abiertos* (en número finito o infinito).

• EJEMPLO: El conjunto unión

$$(-2, 3) \cup (5, 7) \cup (6, 10)$$

es un conjunto abierto.

EJERCICIOS

1.11 Elija dos conjuntos abiertos y compruebe que su intersección es otro conjunto abierto.

1.12 Si

$$I_1, \quad I_2, \quad I_3, \quad J_1, \quad J_2$$

son intervalos abiertos, demostrar que la intersección de los dos conjuntos abiertos

$$A=I_1 \cup I_2 \cup I_3; \qquad B=J_1 \cap J_2$$

es otro conjunto abierto. Tenga en cuenta la distributividad de la $\cap$ respecto de la $\cup$ conjuntista.

1.13 Elija tres conjuntos abiertos y compruebe que su unión es otro conjunto abierto.

1.14 Demuestre que la unión de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.

1.15 Construya un intervalo abierto I, tal que

$$-\frac{3}{7} \in I$$

1.16 Demuestre que el conjunto Q de todos los números racionales es un conjunto abierto. Tenga en cuenta que para cada número racional puede construirse un intervalo abierto que lo contiene.

1.17 Demuestre que el conjunto

$$(3, \rightarrow) = \{x \in Q \mid 3 < x\}$$

es un conjunto abierto.

1.18 Demuestre que el conjunto

$$(\leftarrow, 2] = \{x \in Q \mid x \leqslant 2\}$$

no es un conjunto abierto.

1.19 Ponga otros ejemplos de subconjuntos de Q que no sean abiertos.

Los subconjuntos de Q que son conjuntos abiertos tienen las siguientes propiedades:

I) *La unión de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.*

II) *La intersección de dos conjuntos abiertos es otro conjunto abierto.*

III) *El conjunto vacío y Q son conjuntos abiertos.*

Para expresar que los subconjuntos de Q, que son conjuntos abiertos, verifican estas tres propiedades se dice que *estos subconjuntos definen una topología* en Q.

2. Espacio métrico

Sea Π el conjunto de los puntos del plano. Sean A y B dos puntos del plano. Cuando decimos habitualmente que la *distancia* del punto A al punto B es 3,5, queremos expresar que al medir el segmento $\{\{\overline{AB}\}\}$, con el segmento unidad elegido, se ha obtenido el número real 3,5. Para cada pareja (A, B) de puntos, la distancia del primero al segundo es un número real no negativo. Como

$$(A, B) \in \Pi \times \Pi$$

podemos decir que la distancia es una aplicación que asocia a cada pareja de puntos del plano un número real r perteneciente a R_+:

$$(A, B) \xrightarrow{d} r$$

o sea, una aplicación de

$$\Pi \times \Pi \xrightarrow{d} R_+$$

Por tanto, designaremos por

$$\boxed{d(A, B)}$$

a la distancia del punto A al punto B.

EJERCICIOS

2.1 **¿Cuál será el número real $d(A, A)$?**

2.2 **Si $d(A, B)=0$, ¿qué puede decir de los puntos A y B?**

2.3 **Compare los números reales:**

$$d(A, B) \quad \text{y} \quad d(B, A)$$

2.4 **Demuestre que**

$$\boxed{\begin{array}{l}\bullet\ A,\ B \text{ y } C \text{ son tres puntos alineados} \\ \bullet\ B \in \overline{AC}\end{array}} \Longrightarrow \boxed{\text{dist}\,(A, B)+\text{dist}\,(B, C)=\text{dist}\,(A, C)}$$

Haga una figura apropiada al caso.

2.5 **¿Cómo ha de ser el punto B respecto del segmento $\overline{AC}$, para que se verifique**

$$\text{dist}\,(A, B)+\text{dist}\,(B, C) > \text{dist}\,(A, C)$$

2.6 **Demuestre que si los puntos A, B y C no están alineados, entonces**

$$\text{dist}\,(A, B)+\text{dist}\,(B, C) > \text{dist}\,(A, C)$$

Tenga en cuenta cierta propiedad relativa a los lados de un triángulo.

De los ejercicios anteriores se deduce que la aplicación *distancia* de $\Pi \times \Pi$ en R_+ verifica las siguientes propiedades:

I') $\boxed{d(A, B)=0 \iff A=B}$

II') $\boxed{d(A, B)=d(B, A)}$ (Propiedad simétrica)

III') $\boxed{d(A, B)+d(B, C) \geq d(A, C)}$ (Propiedad triangular)

Para expresar que la distancia es una aplicación de $\Pi \times \Pi$ en R_+ que verifica las tres propiedades anteriores se dice que esta aplicación define una *métrica* sobre el conjunto Π. El conjunto Π junto con esta métrica diremos que es un *espacio métrico.*

EJERCICIO

2.7 Compruebe que también en el conjunto q, de puntos de la recta racional, se puede definir una distancia:

$$q \times q \to Q$$

que da estructura de espacio métrico a la recta racional.

---

3. Espacio métrico y espacio topológico

Veamos un ejemplo de cómo en un espacio métrico se puede definir una topología. Consideremos para ello el espacio métrico del párrafo 2.

• DEFINICIÓN 3.1: *Dado un punto $P \in \Pi$ y un número $\epsilon \in R_+$, se llama entorno de P de radio ϵ al conjunto de los puntos $X \in \Pi$, tales que $d(P, X) < \epsilon$.*

• EJEMPLO 3.1: En la figura 3.1 se ha rayado en rojo el entorno de centro P y radio ϵ, que coincide con el conjunto de puntos del círculo de centro P

Figura 3.1

y radio el segmento cuya medida es el número real ϵ, que no pertenecen a la circunferencia borde de ese círculo.

Notación: El entorno de P de radio ϵ se designa por

$$E_\epsilon(P)$$

Por tanto,

$$E_\epsilon(P) = \{X \in \Pi \mid d(P, X) < \epsilon\}$$

EJERCICIOS

3.1 Supuesto que sobre el plano se ha establecido un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares, construya el entorno del punto de coordenadas (4, 1) y radio 2. Diga si los puntos siguientes pertenecen a ese entorno:

$$(0, 1), \quad (1, 1), \quad (3, 1), \quad (6, 1), \quad (9, 1)$$

3.2 Ponga otros ejemplos de entornos y señale puntos que pertenezcan y otros que no pertenezcan a esos entornos.

3.3 Demuestre que la unión y la intersección de dos entornos del mismo punto P es otro entorno de P. Ponga ejemplos.

Nota: En los libros actuales de Topología superior se utiliza otra definición de entorno distinta de la que hemos dado.

• DEFINICIÓN 3.2: *Llamaremos conjuntos abiertos a los conjuntos de puntos del plano que puedan obtenerse de uno de los modos siguientes:*

a) *Como unión de entornos.*

b) *Como intersección de un número finito de entornos.*

c) *Como unión de conjuntos de los indicados en los dos apartados anteriores.*

EJERCICIOS

3.4 Ponga ejemplos de conjuntos abiertos de cada uno de los tipos anteriores.

3.5 Repita los ejercicios 1.11 a 1.19 cambiando:

	por	
Q	$\longrightarrow$	Π
intervalo	$\longrightarrow$	entorno
semirrecta	$\longrightarrow$	semiplano

comprobando que se verifican las propiedades I), II) y III), indicadas al final del párrafo 1.

Del ejercicio anterior se deduce que *los subconjuntos de* Π *que son conjuntos abiertos definen una topológica sobre* Π.

Este resultado no es difícil de generalizar. Siempre que se tiene un espacio métrico, es decir, un conjunto sobre el que se ha definido una distancia, es

decir, una aplicación que asocia a cada pareja de elementos del conjunto un número, perteneciente a R_+, y verifique las propiedades I'), II') y III') del párrafo 2, basta definir los entornos y conjuntos abiertos como acaba de hacerse para II, resultando que estos conjuntos abiertos verifican las propiedades I), II) y III) del párrafo 1, es decir, definen una topología.

A los elementos del conjunto sobre el que se ha definido la topología se les llama *puntos del espacio topológico.*

EJERCICIO

3.6 Busque dos conjuntos abiertos A y B tales que dados los puntos M y H de coordenadas cartesianas respectivas

$$(2, 1) \quad \text{y} \quad (2, 2)$$

se verifique

$$M \in A; \quad H \in B; \quad A \cap B = \varnothing$$

Esta propiedad es general, es decir, dados dos puntos distintos cualesquiera del plano, se pueden encontrar dos conjuntos abiertos, cada uno de ellos conteniendo a uno de estos puntos y tales que sean disjuntos. No todos los espacios topológicos tienen esta propiedad, pero sí los que se han construido a partir de una métrica, como en el ejemplo que hemos tratado.

EJERCICIOS

3.7 ¿Cómo se pueden definir los entornos en el caso de la recta real, es decir, de la recta en que se consideran todos sus puntos?

3.8 Relacione los conceptos de «entorno» e «intervalo abierto» para el caso de la recta racional del párrafo 1.

---

4. Topología

Etimológicamente, Topología deriva del griego y significa «Tratado del lugar».

La Topología es la parte de la Matemática que estudia la noción de *proximidad.*

El concepto de *proximidad* está íntimamente ligado al de *distancia* y éste al de *entorno.* Los puntos A y B se consideran más próximos entre sí que los

puntos A y C, si hay un entorno de A que contiene a B y no contiene a C (figura 4.1).

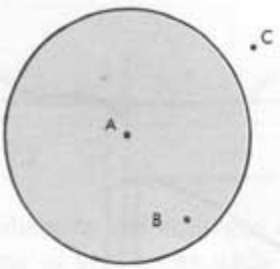


Figura 4.1

Hemos visto cómo el concepto de *entorno* nos ha conducido a establecer el de *conjuntos abiertos*. De modo que el concepto de *abierto* está ligado al de *proximidad*. Sin embargo, la *Topología* está hoy muy elaborada y *se puede definir directamente el concepto de proximidad a partir de los conjuntos abiertos, sin necesidad de utilizar el concepto de distancia*, para establecer dichos conjuntos abiertos, pero este estudio cae fuera de los límites de estas breves ideas.

EJERCICIO

4.1 Considere el conjunto V de las vocales. Elija algunos subconjuntos de V de modo que verifiquen las propiedades I), II) y III) de los conjuntos abiertos al final del párrafo 1. Haga el diagrama de Venn apropiado. ¿Cómo se le ocurre definir el concepto de proximidad entre dos vocales a partir de los subconjuntos elegidos?

El padre de la Topología, tal como se entiende actualmente, fue el gran matemático alemán RIEMANN (1826-1866).

5. Homeomorfismos

Consideremos ahora aplicaciones de un espacio topológico en otro espacio topológico. El concepto de *aplicación continua* corresponde a la idea intuitiva de aplicación que transforma puntos «muy próximos» en puntos «muy próximos».

• EJEMPLO 5.1: La curva de la figura 9.1 del § 3 estableció una aplicación del conjunto de puntos de la recta x en el de puntos de la recta y. Ambas

rectas reales pueden considerarse como espacios topológicos (ejercicio 3.7). La aplicación indicada es continua, pues transforma puntos próximos en puntos próximos.

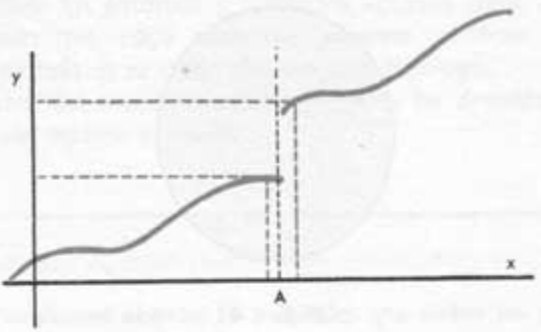


Figura 5.1

• EJEMPLO 5.2: La aplicación dada por la curva de la figura 5.1 no es continua, pues dados dos puntos de la recta x, muy próxima al A, los puntos de la recta y, transformados de aquélla, no son tan próximos como queramos.

La idea de aplicación continua puede matematizarse diciendo que *una aplicación*

$$X \xrightarrow{f} Y$$

es continua en el punto $x \in X$, tal que

$$f(x)=y \in Y$$

si para todo entorno $E(y)$, del punto y, se puede elegir un entorno $E(x)$, del punto x, tal que los puntos pertenecientes a $E(x)$ se transformen en puntos pertenecientes a $E(y)$ en la aplicación f. Observe que esto no se consigue para el punto A de la figura 5.1.

La biyección f se dice continua si es continua $\forall x \in X$.

• DEFINICIÓN 5.1: *Una biyección*

$$X \xrightarrow{f} Y$$

donde X e Y son espacios topológicos, se dice que es un homeomorfismo si f y f^{-1} son ambas continuas.

• EJEMPLO 5.3: Las simetrías asiales son homeomorfismos del plano en sí mismo.

• EJEMPLO 5.4: Una materialización del concepto de homeomorfismo se consigue del siguiente modo: supongamos un alambre (figura 5.2), si se deforma sin romperlo hasta llegar a la forma indicada en la figura 5.3, dos pun-

tos próximos antes de la transformación siguen siendo próximos después de la transformación.

Figura 5.2

Figura 5.3

• EJEMPLO 5.5: Otra materialización del concepto de homeomorfismo se consigue con un trozo de plastilina al cual se ha dado forma esférica (figura 5.4).

Figura 5.4

Figura 5.5

Si ahora se deforma aplastándola un poco, sin romper (figura 5.5), dos puntos próximos cualesquiera siguen siendo próximos.

6. Algunos conceptos topológicos en el plano

Consideremos de nuevo el plano como espacio topológico (párrafo 2).

• DEFINICIÓN 6.1: *Llamaremos figura plana a todo subconjunto de puntos del plano.*

• DEFINICIÓN 6.2: *Dada una figura F, diremos que el punto P es un punto de adherencia de F si en todo entorno de P, de radio no nulo, hay puntos de F.*

• EJEMPLO 6.1: Consideremos el círculo F de la figura 6.1. Los puntos A

Figura 6.1

y B son puntos adherentes de la figura F, pero el punto C no lo es, pues puede construirse un entorno de C que no contiene ningún punto de F.

• DEFINICIÓN 6.3: *Dada una figura F, se llama cierre de F al conjunto de los puntos adherentes de F.*

Notación: El cierre de F se representa por $\overline{F}$.

• EJEMPLO 6.2: Si F es el conjunto de los puntos de un círculo, excluidos los de su circunferencia borde, $\overline{F}$ será el conjunto de puntos del círculo, incluidos los de su circunferencia.

EJERCICIOS

6.1 Compruebe con un ejemplo que, cualquiera que sea F

$$F \subset \overline{F}$$

y después demuéstrelo.

6.2 ¿Cuál es el conjunto $\overline{\overline{F}}$, es decir, el cierre del cierre de F?

6.3 Compruebe con un ejemplo y después demuestre que cualesquiera que sean las figuras F y G, se verifica:

a) $F \subset G \Rightarrow \overline{F} \subset \overline{G}$

b) $\overline{F \cup G} = \overline{F} \cup \overline{G}$

c) $\overline{F \cap G} \subset \overline{F} \cap \overline{G}$

6.4 Defina cierre de un intervalo, para el caso de la recta racional del párrafo 1. ¿Cuál es el cierre de (2, 1/3)?

• DEFINICIÓN 6.4: *Se dice que una figura F es cerrada, si*

$$\overline{F} = F$$

EJERCICIO

6.5 Ponga un ejemplo de figura cerrada y otra que no lo sea.

• DEFINICIÓN 6.5: *Diremos que el punto B pertenece a la frontera de la figura F si en todo entorno de B, de radio no nulo, existen puntos de F y puntos que no pertenecen a F. Al conjunto de estos puntos se les llama conjunto frontera de F.*

Notación: Al conjunto frontera del conjunto F lo representaremos por F^*.

• EJEMPLO 6.3: El punto B, en la figura 6.1, pertenece a la frontera de aquel círculo. El conjunto frontera es su circunferencia borde.

EJERCICIO

6.6 Compruebe en varios ejemplos que

$$\overline{F}=F\cup F^*$$

• DEFINICIÓN 6.6: *Se llama interior,* $\overset{\circ}{F}$, *de la figura* F, *al conjunto diferencia*

$$\boxed{\overset{\circ}{F}=F-F^*}$$

EJERCICIOS

6.7 Dibuje un triángulo T y diga cuáles son los conjuntos

$$\overset{\circ}{T},\ T^* \text{ y } \overline{T}$$

6.8 Compruebe que

$$\overset{\circ}{F}\subset\overline{F}$$

6.9 Diga qué relación existe entre los conjuntos

$$F^*,\ \overline{F},\ \overset{\circ}{F}$$

Ponga ejemplos.

• DEFINICIÓN 6.7: *Se dice que la figura* F *es abierta si*

$$\overset{\circ}{F}=F$$

EJERCICIOS

6.10 Describa la diferencia existente entre círculo abierto y círculo cerrado.

6.11 Lo mismo para triángulo cerrado y abierto.

6.12 Ponga otros ejemplos.

6.13 ¿Encuentra alguna relación entre la definición anterior de figura abierta y la definición de conjunto abierto dada en el párrafo 2?

7. Convexidad

• EJEMPLO 7.1: Consideremos los polígonos fijos M y H, representados en la figura 7.1. Consideremos dos puntos, A y B, pertenecientes a M. Observamos que todo el segmento fijo $\overline{AB}$ está contenido en M. Esto es cierto, cua-

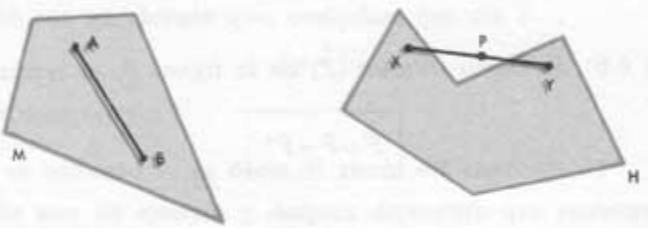


Figura 7.1

lesquiera que sean los puntos A y B, pertenecientes a M. Por ello decimos que M es una figura *convexa.* En cambio, en el polígono H existen puntos, como X e Y, pertenecientes ambos a H, pero tales que el segmento $\overline{XY}$ no está contenido en H. Así, en la figura se tiene que

$$P \in \overline{XY} \quad \text{pero} \quad P \notin H$$

Por ello diremos que la figura H *no es convexa.*

• DEFINICIÓN 7.1: *Diremos que la figura F es convexa, si*

$$\left.\begin{array}{l} A \in F \\ B \in F \end{array}\right\} \Longrightarrow \overline{AB} \subset F \qquad \forall\, A, B \in F$$

EJERCICIOS

7.1 Diga qué figuras, de las representadas en la figura 7.2, son convexas:

Figura 7.2

7.2 Ponga varios ejemplos de figuras que sean convexas y otras que no lo sean.

7.3 Repita el ejercicio anterior, para figuras que sean polígonos.

7.4 En la figura 7.3 se representa un polígono convexo y otro no convexo. Observe, en cada uno, la recta roja, que le sugerirá otra posible definición de «polígono convexo». Desarróllela y extiéndala a «figuras convexas cualesquiera».

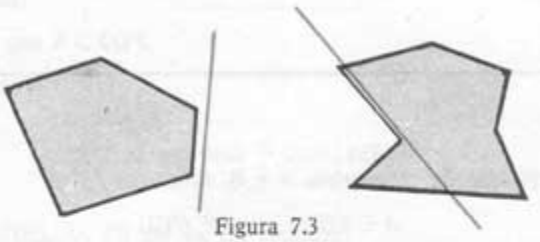


Figura 7.3

7.5 En la figura 7.4 se representan dos «figuras no convexas» y dos «convexas». En cada una de ellas pueden tomarse puntos interiores y trazar semirrectas de origen estos puntos. El número de puntos en que dichas semirrectas cortan al borde sugiere otra definición de «convexidad». Hágala.

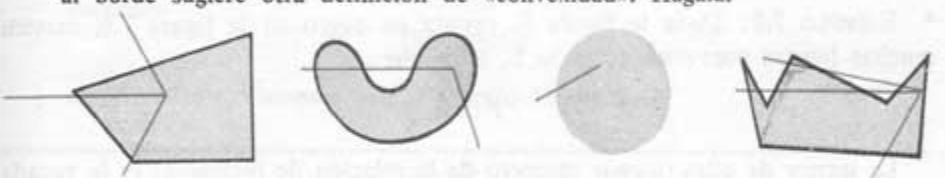


Figura 7.4

7.6 En la figura 7.5 se representa un polígono no convexo, en que el punto exterior E equidista de los dos lados más próximos del borde. Construya un polígono convexo e intente buscar un punto exterior que equidiste de los dos lados más próximos al punto E de la poligonal borde.

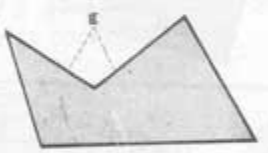


Figura 7.5

7.7 Ponga un ejemplo para comprobar que «la intersección de dos figuras convexas es otra figura convexa». Demuéstrelo en general.

7.8 Teniendo en cuenta que el semiplano es una figura convexa, demuestre, teniendo en cuenta el ejercicio anterior, que las siguientes figuras son convexas:

a) «ángulo», como se define en el ejercicio 4.2 del § 2.
b) «triángulo».
c) «paralelogramo».
d) «trapecio».

7.9 ¿Es convexa la figura unión de dos figuras convexas?

Sea $\mathcal{P}(\Pi)$ el conjunto de partes del plano Π. Los elementos del conjunto $\mathcal{P}(\Pi)$ se llaman *figuras* (definición 6.1). Sea $\mathcal{C}(\Pi)$ el conjunto de partes de Π que son figuras convexas. Por tanto,

$$\mathcal{C}(\Pi) \subset \mathcal{P}(\Pi)$$

EJERCICIO

7.10 Ponga un ejemplo de elementos, A y B, tales que

$$A \in \mathcal{P}(\Pi); \quad A \notin \mathcal{C}(\Pi)$$
$$B \in \mathcal{P}(\Pi); \quad B \in \mathcal{C}(\Pi)$$

• EJEMPLO 7.2: Dada la figura F, rayada en negro en la figura 7.6, existen muchas figuras convexas, como la E, tales que

$$F \subset E$$

La menor de ellas (menor respecto de la relación de inclusión) es la rayada en rojo, que pertenecerá a $\mathcal{C}(E)$.

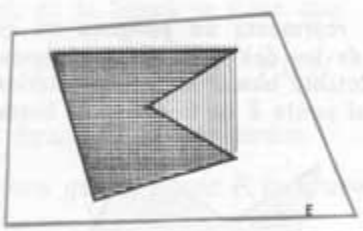


Figura 7.6

Representaremos por $C(F)$ a la mínima figura convexa que contiene a la figura F. Se tiene así que a cada figura $F \in \mathcal{P}(\Pi)$ se puede asociar una figura $C(F) \in \mathcal{C}(\Pi)$. Esta aplicación de $\mathcal{P}(\Pi)$ en $\mathcal{C}(\Pi)$ se llama *convexización.*

• DEFINICIÓN 7.2: *Se llama convexización a la aplicación*

$$\mathcal{P}(\Pi) \xrightarrow{C} \mathcal{C}(\Pi)$$

que asocia a cada $F \in \mathcal{P}(\Pi)$ *la mínima figura convexa* $C(F)$ *que la contiene* (mínima respecto de $\subset$).

EJERCICIOS

7.11 **Defina elemento mínimo respecto de la relación $\subset$.**

7.12 **Construya la convexizada de cada una de las figuras no convexas vistas anteriormente.**

7.13 **Compruebe que $F \subset C(F)$.**

7.14 **Demuestre que**

$$\boxed{F \text{ es convexa}} \iff \boxed{C(F)=F}$$

7.15 **¿Por qué $[\mathcal{C}(\Pi), \cup, \cap]$ no es un retículo?**

7.16 **Compruebe que si se define la operación γ, entre elementos de $\mathcal{C}(\Pi)$, en la forma**

$$E \gamma F = C(E \cup F)$$

entonces

$$[\mathcal{C}(\Pi), \gamma, \cap]$$

es un retículo. Compare con el párrafo 12 del § 10.

8. Conexión

• EJEMPLO 8.1: Sean A y B dos puntos cualesquiera de la *figura F*, representada en la figura 8.1. Observemos que se puede construir una línea poligonal cuyos extremos sean A y B y que no contenga a ningún punto frontera. Por ello decimos que esta figura es *conexa*.

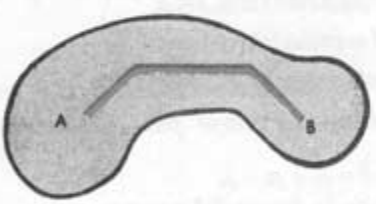


Figura 8.1

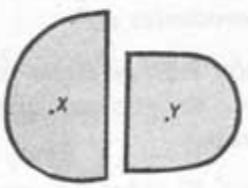


Figura 8.2

• EJEMPLO 8.2: En la figura 8.2 se representa rayada en negro una *figura G*, o parte de Π. Notemos que

$$X \in G; \qquad Y \in G$$

pero no existe ninguna poligonal que no contenga a ningún punto frontera cuyos extremos sean X e Y. Por ello diremos que G no es una figura conexa.

EJERCICIO

8.1 Construya figuras conexas y otras no conexas.

• EJEMPLO 8.3: Consideremos la *figura* rayada en negro de la figura 8.3. Consideremos una poligonal (en rojo en la figura) cuyos extremos sean dos puntos, *A* y *B*, del borde. Si suponemos, materializando, de papel la figura 8.3 y cortamos con una tijera por donde indica la poligonal en rojo, la figura queda dividida en dos trozos no conexos. Esta poligonal ha dividido a la figura en dos partes no conexas.

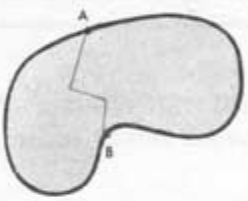


Figura 8.3

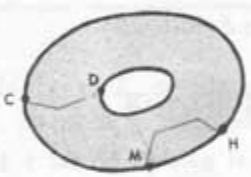


Figura 8.4

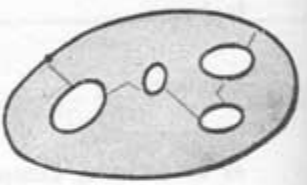


Figura 8.5

• EJEMPLO 8.4: En el caso de la figura 8.4 podemos considerar la poligonal de extremos *M* y *H*, que divide a la figura en dos partes no conexas, pero después de trazar la poligonal de extremos *C* y *D*, la figura resultante sigue siendo conexa.

• DEFINICIÓN 8.1: *Dada una figura conexa F, llamaremos sección a una poligonal cuyos extremos sean dos puntos pertenecientes a* F^* *y sus restantes puntos pertenecientes a* $\overset{\circ}{F}$.

• DEFINICIÓN 8.2: *Se llama orden de conexión de una figura conexa al máximo número de secciones que pueden efectuarse para dividirla en dos figuras no conexas.*

• EJEMPLOS: El orden de conexión de la figura 8.3 es uno.
El orden de conexión de la figura 8.4 es dos.
El orden de conexión de la figura 8.5 es cinco.

EJERCICIO

8.2 Construya figuras conexas cuyos órdenes de conexión respectivos sean

3, 4, 7

comprobando que:

orden de conexión = número de agujeros + 1

9. Característica de Euler-Poincaré

• EJEMPLO 9.1: En la figura 9.1 se muestra una descomposición en triángu-

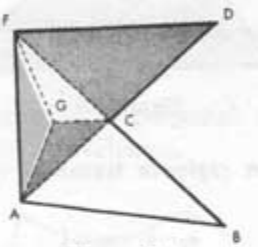


Figura 9.1

los (párrafo 4 del § anterior) de un polígono. Como resultado de esta descomposición se obtiene:

$$\text{Vértices} = \{A,\ B,\ C,\ D,\ F,\ G\}$$

$$\text{Lados} = \{\overline{AB},\ \overline{AC},\ \overline{AF},\ \overline{AG},\ \overline{BC},\ \overline{CD},\ \overline{CF},\ \overline{CG},\ \overline{DF},\ \overline{FG}\}$$

$$\text{Triángulos} = \{\overset{\frown}{ABC},\ \overset{\frown}{ACG},\ \overset{\frown}{AGF},\ \overset{\frown}{CDF},\ \overset{\frown}{CFG}\}$$

Si designamos por

$$a_0 = Card\ (\text{vértices}) = 6$$
$$a_1 = Card\ (\text{lados}) = 10$$
$$a_2 = Card\ (\text{triángulos}) = 5$$

obtenemos

$$a_0 - a_1 + a_2 = 6 - 10 + 5 = 1$$

EJERCICIOS

9.1 Haga otras triangulaciones del mismo polígono fijo y observe que siempre

$$a_0 - a_1 + a_2 = 1$$

9.2 Intente probar el resultado anterior, razonando por inducción.

9.3 Considere ahora la descomposición del polígono de la figura 9.2 en otros

polígonos que ya no son triángulos, en general, y compruebe que sigue verificándose

$$a_0 - a_1 + a_2 = 1$$

donde ahora a_2 es el número de polígonos en que se ha dividido.

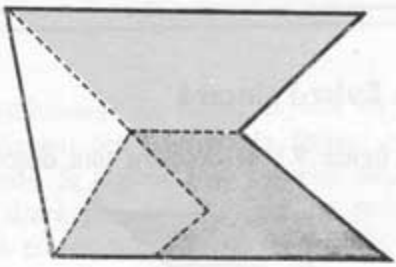


Figura 9.2

9.4 Divida ahora el plano en regiones trazando varias rectas y compruebe que sigue verificándose

$$a_0 - a_1 + a_2 = 1$$

Tenga en cuenta que ahora algunos lados se han de sustituir por semirrectas.

9.5 Considere ahora la figura 9.3, que posee dos agujeros. Compruebe que si la divide en regiones, obtiene

$$a_0 - a_1 + a_2 = 1 - \text{número de agujeros}$$

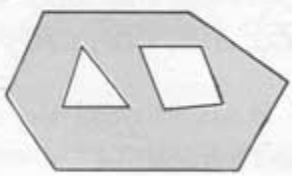


Figura 9.3

9.6 Considere la superficie de un poliedro. Considere sus caras como regiones y calcule

$$a_0 - a_1 + a_2$$

siendo

a_0 = número de vértices
a_1 = número de aristas
a_2 = número de caras

9.7 Repita la misma operación con otros poliedros (tetraedros, cubos, pirámides, etcétera). Observe que siempre obtiene el mismo número al calcular

$$a_0 - a_1 + a_2$$

• DEFINICIÓN 9.1: *Al número*

$$a_0 - a_1 + a_2$$

considerado anteriormente, se le llama «característica de Euler-Poincaré» o bien «característica euleriana».

El gran matemático francés POINCARÉ (1854-1912) desarrolló esta cuestión.

10. Propiedades topológicas

• DEFINICIÓN 10.1: *Dos figuras se dicen topológicamente equivalentes si una se obtiene de otra mediante un homeomorfismo.*

• EJEMPLO 10.1: La circunferencia, la poligonal cerrada y la curva de la figura 10.1 son topológicamente equivalentes.

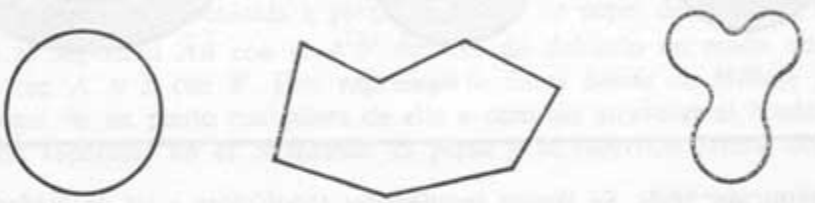


Figura 10.1

A las figuras topológicamente equivalentes a una circunferencia se les llama *curvas de Jordan.*

• EJEMPLO 10.2: Una superficie esférica y la superficie borde de un cubo son topológicamente equivalentes.

Nota: La relación de *equivalencia topológica* es una relación de equivalencia. Los *homeomorfismos* desempeñan *en la Topología* un papel similar al que juegan los *isomorfismos en Algebra.*

EJERCICIOS

10.1 Ponga varios ejemplos de figuras topológicamente equivalentes.

10.2 Observe la figura 10.2. Se han trazado varias semirrectas de origen el pun-

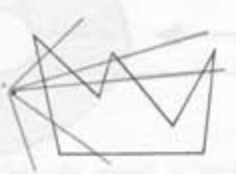


Figura 10.2

Figura 10.3

to P y que no pasan por ningún vértice de la poligonal. Cada una de estas semirrectas corta a la poligonal en un cierto número de puntos. De este modo, a cada semirrecta de origen P que no pase por ningún vértice de la poligonal puede asociarse un número natural. Observe la paridad de los números obtenidos. Repita lo mismo para la figura 10.3. ¿Llega a alguna conclusión?

10.3 Las curvas de Jordan del ejemplo 10.1 dividen al plano en dos regiones que pueden llamarse interior y exterior. ¿Cómo se le ocurre definir los puntos interiores y exteriores, ayudándose del ejercicio anterior?

10.4 En la figura 10.4 se representan una esfera, una esfera con un asa y un toro (figura ésta con forma de neumático de rueda macizo). ¿Cuáles le parecen topológicamente equivalentes?

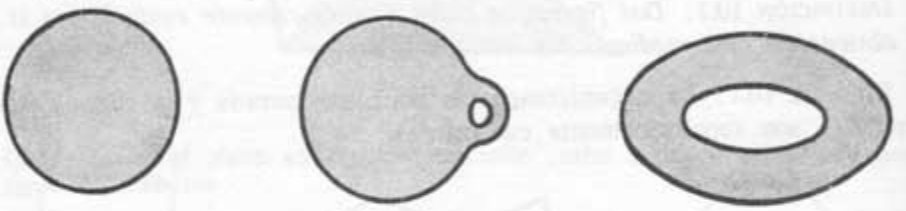


Figura 10.4

• DEFINICIÓN 10.2: *Se llaman propiedades topológicas a las propiedades que se conservan en los homeomorfismos.*

• EJEMPLO 10.3: *La conexión es una propiedad topológica,* es decir, si una figura es conexa, toda figura topológicamente equivalente a ella también será conexa, pues los homeomorfismos transforman puntos próximos en puntos próximos. Los homeomorfismos también conservan el orden de conexión.

• EJEMPLO 10.4: *La convexidad no es una propiedad topológica,* pues una figura puede ser convexa y otra, topológicamente equivalente a ella, no ser convexa.

• EJEMPLO 10.5: *La característica de Euler-Poincaré también se conserva en los homeomorfismos* (figura 10.5). Basta sustituir los segmentos por arcos de curva continua.

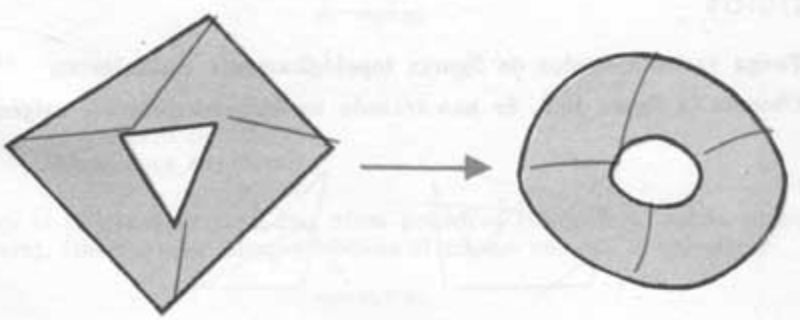


Figura 10.5

• EJEMPLO 10.6: Consideremos una cuartilla de papel que naturalmente tiene dos caras. Este concepto experimental se matematiza considerando en el plano dos orientaciones, correspondiendo cada orientación a una cara de la cuartilla. Una orientación en una superficie viene determinada por tres puntos no alineados (figura 10.6). Para ir en la cuartilla de un punto de una cara a un punto de la otra cara hay que atravesar el borde. Lo mismo ocurre en la

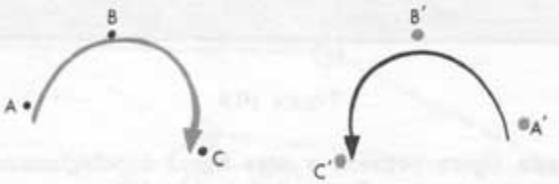


Figura 10.6

superficie lateral de un cilindro. Consideremos ahora la superficie representada en la figura 10.8, obtenida a partir de la tira de papel de la figura 10.7, pegando el segmento $\overline{AB}$ con el $\overline{A'B'}$ después de doblarlo de modo que A coincida con A' y B con B'. Esta superficie se llama *banda de Möbius* y se puede llegar de un punto cualquiera de ella a otro sin atravesar el borde. Es decir, esta superficie no es orientable. El plano y la superficie lateral del ci-

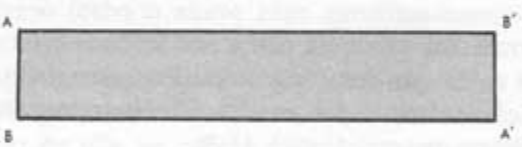


Figura 10.7

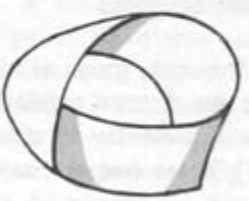


Figura 10.8

lindro, obtenida a partir de la tira de la figura 10.7 pero pegando de modo que coincida A con B' y B con A' sí son orientables. El toro también es orientable. *La orientabilidad también es una propiedad topológica.*

• EJEMPLO 10.7: Supongamos un mapa de un país dividido en regiones (o de un continente dividido en países) y coloreado de modo que dos regiones (o países, respectivamente) limítrofes aparezcan con distintos colores. En estas condiciones, el problema de calcular el mínimo número de colores (número cromático) necesario es un problema topológico. *Este número es otro invariante topológico.*

EJERCICIOS

10.5 Recorte dos tiras de papel o rectángulos alargados como el indicado en la figura 10.9 y dibuje una línea, como la punteada en rojo, sobre cada tira.

Péguelas de modo que obtenga una banda de Möbius a partir de una tira, y la superficie lateral de un cilindro, a partir de la otra. Corte ahora con unas tijeras a ambas superficies por la línea punteada en rojo. ¿Qué observa?

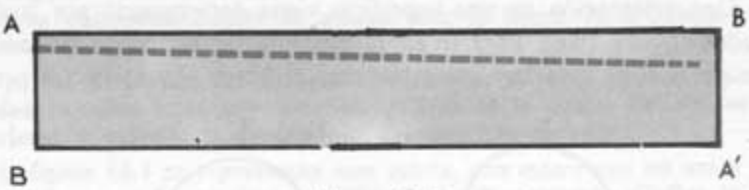


Figura 10.9

10.6 Considere una figura convexa y otra figura topológicamente equivalente a ella y que no sea convexa. Ponga varios ejemplos.

10.7 Calcule la característica de Euler-Poincaré para las dos figuras topológicamente equivalentes indicadas en la figura 10.5.

10.8 Ejemplifique las afirmaciones hechas en los ejemplos 10.3 y 10.7.

11. Actividades del niño basadas en conceptos topológicos

Es frecuente guiar al niño en sus primeros pasos por la Geometría presentándole las figuras regulares antes que las irregulares. Por ejemplo, se acostumbra a presentar al niño el cuadrado, que es el cuadrilátero regular (figura 11.1), antes que el cuadrilátero general (figura 11.2).

Figura 11.1

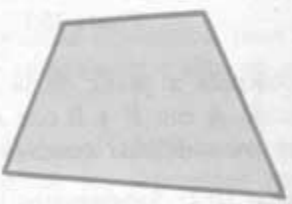


Figura 11.2

Hoy se aconseja *estudiar las figuras más generales antes que las regulares*, pues las propiedades comunes a todos los cuadriláteros son más simples que las propiedades específicas del cuadrado, por ejemplo. Además, siguiendo con el mismo ejemplo, el cuadrado se define como un tipo particular de cuadrilátero, aquel que es equilátero y equiángulo.

Las propiedades más sencillas son verificadas por más figuras. *Las propiedades más simples de las figuras* y, por tanto, aquellas que se han de presentar antes al niño, *son las topológicas.*

El concepto de *poligonal abierta* es uno de los primeros que se pueden in-

troducir al niño de la Escuela Maternal, mediante situaciones adecuadas, como la esquematizada en la figura 11.3.

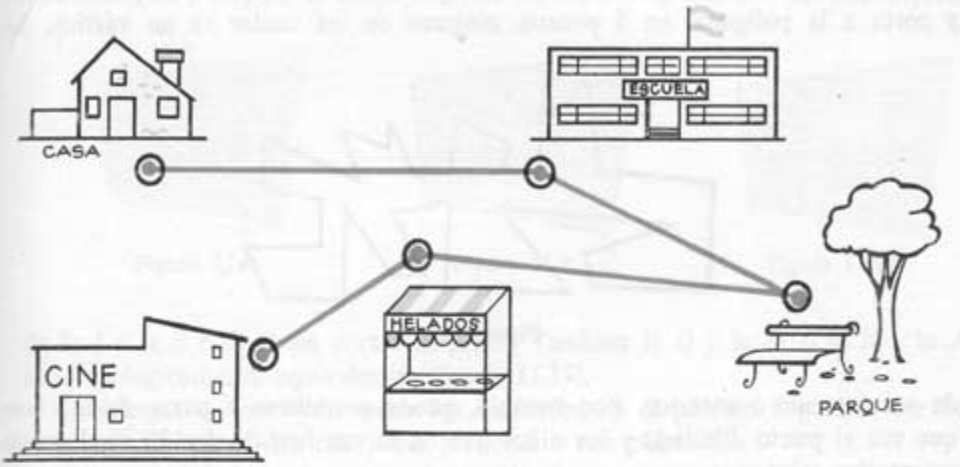


Figura 11.3

A partir del concepto de poligonal cerrada se llega al de polígono como conjunto de *puntos interiores a la poligonal cerrada.* A los niños de tercer o cuarto curso (ocho o nueve años aproximadamente) puede intentarse guiarles para que definan los conceptos de punto interior y exterior a una poligonal cerrada plana homeomorfa a una circunferencia, es decir, como la de la figura 11.4, pues la de la figura 11.5 no es homeomorfa a una circunferencia, y respecto de ella no cabe hablar de puntos interiores y exteriores. En cambio, la poligonal de la figura 11.4 divide al conjunto de puntos del plano en tres partes: puntos interiores, exteriores y de la poligonal.

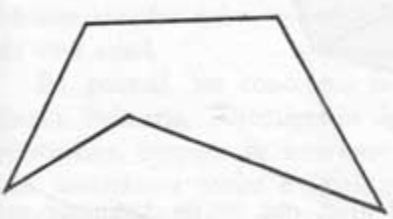


Figura 11.4

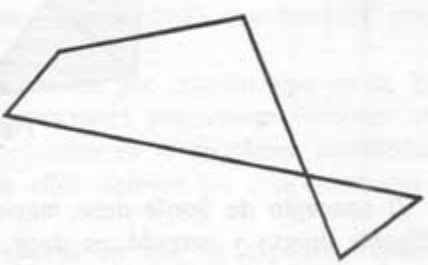


Figura 11.5

Un niño no siente la necesidad de definir punto interior o exterior a una poligonal como la de la figura 11.4, ya que estos conceptos son para él intuitivos, por estar de acuerdo con lo que en el lenguaje habitual se entiende por interior y exterior. Por ello hay que provocar situaciones que obliguen a encontrar un criterio que caracterice a tales puntos. Una forma de conseguirlo

es presentando poligonales muy complicadas, como la de la figura 11.6. Después de sugerir situaciones similares a la del ejercicio 10.2, puede pedirse a los niños que decidan si un punto tal que una semirrecta que parte de él y corta a la poligonal en 5 puntos, ninguno de los cuales es un vértice, ha

Figura 11.6

de ser interior o exterior. Por ejemplo, puede permitirse a parte de la clase que vea el punto dibujado y los niños que no lo ven han de decidir si el punto es exterior o interior.

Al concepto de *polígono* puede llegarse *a partir de los puntos interiores a la poligonal* o bien *a partir de triángulos consecutivos* (definición 4.3 del § anterior), poniendo condiciones para tratar de evitar que aparezcan polígonos como el de la figura 11.7, de difícil estudio topológico.

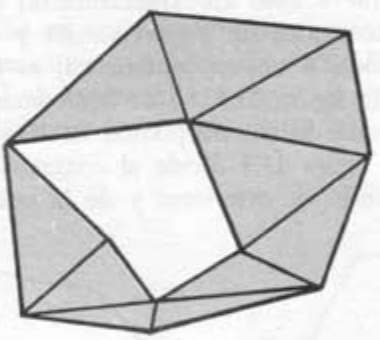


Figura 11.7

El concepto de *borde* debe manejarlo el niño, que ha de distinguir entre polígono abierto y cerrado, es decir, sin borde o con borde, respectivamente. En el párrafo 6 se ha introducido el concepto de *frontera,* sinónimo de borde. Sin embargo, el término *borde suele utilizarse para polígonos cerrados,* reservando el de *frontera para polígonos abiertos.* Por ejemplo, la figura 11.8 representa un cuadrilátero abierto (es decir, sin su frontera) y la figura 11.9 uno cerrado (con su borde). El de la figura 11.10 no es abierto ni cerrado.

Los homeomorfismos entre figuras del espacio ordinario pueden materializarse mediante manipulaciones con *plastilina,* pudiéndose aplastar y estirar sin cortar ni pegar.

Un problema interesante para niños que conocen las *letras* consiste en *clasificarlas,* considerando de la misma clase las que son *topológicamente equivalentes.* Por ejemplo, si se dispone de *alambre muy flexible,* se puede pasar

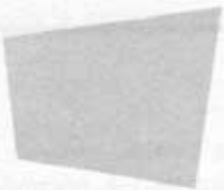


Figura 11.8

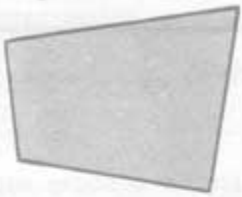


Figura 11.9

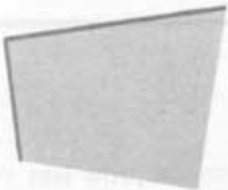


Figura 11.10

de la *J* a la *S* o la *N* sin cortar ni pegar. También la *O* y la *D,* o la *R* y la *A,* son topológicamente equivalentes (figura 11.11).

Problemas de *conexión* como los indicados en el párrafo 8 pueden ser llevados a cabo por niños con *papel y tijeras* o con plastilina.

La *convexidad,* iniciada en el párrafo 7, es una parte de la Matemática hoy en pleno desarrollo, de la que están apareciendo múltiples aplicaciones, y de sumo interés en la enseñanza elemental actual.

Figura 11.11.

Una iniciación al estudio de la *característica de Euler-Poincaré* puede presentarse hacia el 4.° y 5.° grado, de modo completamente experimental. Problemas simples sobre *número cromático* (ejemplo 10.7) son también propios de esta edad.

En general, los conceptos indicados pueden ser introducidos en la Enseñanza Primaria, *sustituyendo las demostraciones por comprobaciones experimentales,* después de *interesar a los pequeños en el problema, justificándolo con situaciones reales* e intentando que *ellos definan los conceptos una vez captadas las ideas.*

Terminemos recomendando algunos libros en que se exponen cuestiones topológicas simples aprovechables en la enseñanza elemental:

T. J. FLETCHER, *L'Aprentissage de la mathématique aujourd'hui,* O.C.D.L., págs. 241-274.
M. FRÉCHET-KY FAN, *Introducción a la Topología Combinatoria,* Eudeba.

15 FUNCIONES ELEMENTALES

1. Funciones de una variable

Como ya indicamos en el párrafo 9 del § 2, a las *correspondencias* se les llama también *funciones*.

Es frecuente reservar el nombre de función para aquellas correspondencias en que tanto el conjunto de partida como el de llegada son conjuntos de números, o conjuntos productos de conjuntos de números.

• EJEMPLO 1.1. La correspondencia f que asocia a cada número real, x, su cuadrado, es una función. Su conjunto de partida es el conjunto R, de los números reales, y su conjunto de llegada es el mismo cuerpo real. Esta función de

$$R \xrightarrow{f} R$$

que asocia a cada número real, su cuadrado:

$$x \xrightarrow{f} x^2$$

es una *aplicación*, es decir, es una *función uniforme*.

En lo sucesivo nos limitaremos a funciones uniformes, es decir, a funciones que sean aplicaciones.

• EJEMPLO 1.2. Consideremos la correspondencia que asocia a cada pareja (x, y), de números reales, el número real x^2+y^2. Como la pareja (x, y) es un elemento del conjunto producto $R \times R$ y el número real $x^2+y^2 \in R$, estamos ante una aplicación de

$$R \times R \longrightarrow R$$

y como esta función asocia a cada pareja

$$(x, y) \longrightarrow x^2+y^2$$

diremos que se trata de una *función de dos variables*.

• EJEMPLO 1.3. La función

$$R \times R \times R \longrightarrow R$$

que asocia a cada terna de números reales

$$(x, y, z) \longrightarrow x+y+z \in R$$

es una *función de tres variables.*

La función del ejemplo 1.1, que asociaba a cada número real otro número real, su cuadrado, era una *función de una variable.*

Al conjunto de partida de una función se le llama también *campo de variabilidad de la variable independiente,* y al conjunto imagen de la aplicación (o función uniforme) se le llama entonces *campo de variabilidad de la función.*

• EJEMPLO 1.4. En la función que asocia a cada número real no negativo, x, el número real negativo $-\sqrt{x}$ (cuyo cuadrado es x), el campo de variabilidad de la variable independiente es el conjunto R_+ de los números reales no negativos, pues se trata de una aplicación de

$$R_+ \longrightarrow R$$

y el campo de variabilidad de la función es el conjunto R_- de los números reales no positivos.

EJERCICIOS

1.1 **¿Cuál es el número real $f(3)$, imagen de 3, en la función del ejemplo 1.1?**

1.2 **¿Cuál es la imagen de $(-2, 3)$ en la función del ejemplo 1.2?**

1.3 **¿Cuál es la imagen de $(-3, 0, 1)$ en la función del ejemplo 1.3?**

1.4 **Ponga un ejemplo de correspondencia cuyos conjuntos de partida y de llegada no sean conjuntos de números.**

1.5 **De las funciones siguientes, indique cuáles son funciones de una variable:**

a) **la que asocia a cada número natural n el número natural $n+n$;**

b) **la que asocia a cada pareja (h, k), de enteros, su diferencia $h-k$;**

c) **la que asocia a cada número racional positivo $\frac{a}{b}$ el mayor número natural n, tal que**

$$nb \leqslant a$$

d) **la que asocia a cada terna (h, k, j), de naturales, su m.c.d.**

1.6 **Señale los campos de variabilidad de la variable independiente y de la función**

para la función de una variable del ejemplo 1.1 y para cada una de las funciones de una variable del ejercicio anterior.

1.7 Ponga otros ejemplos de funciones de una variable, indicando el campo de variabilidad de la variable independiente y el de la función.

---

2. Representación gráfica de funciones de una variable

• EJEMPLO 2.1. Consideremos la función que asocia a cada número real x el número real $5+2\cdot x$, que, de acuerdo con la notación utilizada el curso pasado, puede expresarse escribiendo:

$$x \longrightarrow 5+2x$$

y si, como es habitual, designamos por y al número real imagen de x, la función que estamos considerando puede expresarse en la forma:

$$y=5+2\cdot x$$

Para expresar que la imagen del número real 3, en esta función, es el número real

$$5+2\cdot 3=5+6=11$$

se acostumbra a decir que

para x igual a 3 es y igual a 11

o bien que

cuando a la variable independiente se da el valor 3, la función toma el valor 11

Generalicemos este ejemplo:

La función

$$R \xrightarrow{f} R$$

que asocia a cada número real x el número real $f(x)$, suele expresarse en la forma

$$y=f(x)$$

es decir, suele designarse por y la imagen de x en la función f.

• EJEMPLO 2.2. La función que asocia a cada número real x el número real $2x^2+1$, se expresará en la forma

$$y=2x^2+1$$

EJERCICIOS

2.1 Hallar el valor que toma la función del ejemplo 2.2, cuando a la variable independiente se dan los sucesivos valores:

0, 1, 3, −5

2.2 Exprese la función que asocia a cada número real x el número real $x+1$, como se ha indicado anteriormente, es decir, designando por y el valor de la función que corresponde al valor x de la variable independiente.

2.3 Ponga otro ejemplo de función y haga lo indicado en el ejercicio anterior.

Nota: En este párrafo, y en los siguientes de este capítulo, consideraremos únicamente *funciones de variable real,* es decir, funciones cuyo campo de variabilidad de la variable independiente sea un subconjunto del conjunto R, de los números reales. También el campo de variabilidad de la función será un subconjunto de R, en las funciones que consideremos.

• EJEMPLO 2.3. Consideremos la función de variable real

$$y=x^2-1$$

En la tabla de la figura 2.1 se indican los valores de la función correspondientes a varios valores de la variable:

x	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
y	$\frac{5}{4}$	0	$-\frac{3}{4}$	-1	$-\frac{3}{4}$	0	$\frac{5}{4}$	3

Figura 2.1

A partir de esta tabla se pueden construir parejas, cuyas primeras componentes sean cada uno de los valores dados a la variable independiente y cu-

yas segundas componentes sean los respectivos valores de la función:

$$\left(-\frac{3}{2}, \frac{5}{4}\right); \quad (-1, 0); \quad \left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right); \quad (0, -1)$$

$$\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right); \quad (1, 0); \quad \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{4}\right); \quad (2, 3)$$

Consideremos un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares y representemos los puntos correspondientes a cada una de las parejas anteriores, interpretando como abscisa la primera componente y como ordenada la segunda componente de cada pareja. Se obtienen así los puntos indicados en la figura 2.2.

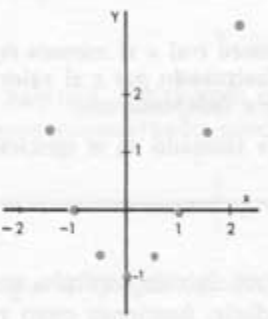


Figura 2.2

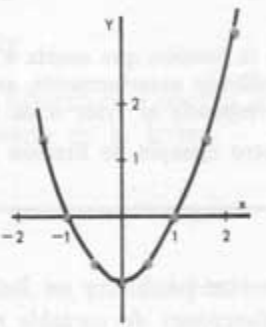


Figura 2.3

La tabla de la figura 2.1 podría ampliarse indefinidamente, ya que a cada valor real de la variable independiente corresponde un valor de la función. Si representáramos sobre nuestro sistema de coordenadas cartesianas rectangulares los puntos correspondientes a todos los posibles valores de la variable independiente, obtendríamos la curva indicada en la figura 2.3. Esta curva constituye la *representación gráfica* de la función

$$y = x^2 - 1$$

que estamos considerando. Se comprende que, como existen infinitos números reales, es imposible representar todos los puntos. Por ello se recurre a técnicas, en cuyo estudio no entraremos, que permiten representar gráficamente estas funciones de variable real. Nos conformamos con la representación aproximada, obtenida considerando unos cuantos puntos, como se ha hecho en la figura 2.2, y dibujando después una curva que pase por esos puntos, como se ha hecho en la figura 2.3. Naturalmente, cuanto mayor sea el número de puntos considerados, mejor será la aproximación conseguida.

EJERCICIO

2.4 Representar gráficamente, sobre papel cuadriculado y en la forma que acaba de indicarse, las funciones de los ejemplos 1.1, 1.4, 2.1 y 2.2.

Nota: Observemos que al representar gráficamente las funciones de forma

$$y=bx+a$$

donde a y b son dos números reales fijos, se obtienen rectas, como ya se hizo notar el pasado curso.

3. Función de proporcionalidad directa

Sean dos magnitudes, entre las que se ha establecido una proporcionalidad directa. Si designamos por x a la medida de una cantidad de una de ellas y por y a la medida de la cantidad correspondiente de la otra, la proporcionalidad directa se expresa en la forma

$$y=rx$$

donde r es un número real fijo, no nulo, llamado *constante* o *razón* de proporcionalidad directa, según se vio en el § 13.

En la mayor parte de los casos interesantes, x podía tomar valores pertenecientes al conjunto R_+, de los números reales positivos, o al conjunto R de los números reales, si se trata de una magnitud relativa, y análogamente para y (véanse ejemplos de proporcionalidad directa en el párrafo 11 del § 13).

Por tanto, *definimos la función de proporcionalidad directa como la aplicación de*

$$R_+ \longrightarrow R_+$$

o bien de

$$R \longrightarrow R$$

que asocia a cada valor $x \in R$, de la variable independiente, el valor

$$y=rx$$

de la función, donde r es un número real fijo, no nulo.

Si representamos gráficamente la función de proporcionalidad directa

$$y=rx$$

obtenemos una semirrecta de origen el origen de coordenadas (fig. 3.1), si se trata de magnitudes absolutas, y una recta que pasa por el origen de coordenadas (fig. 3.2), si se trata de magnitudes relativas.

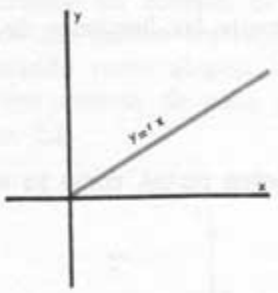


Figura 3.1

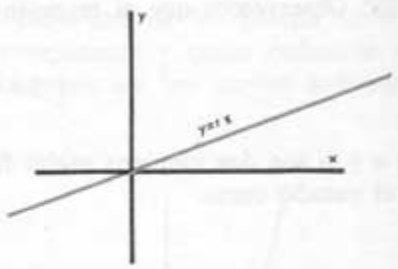


Figura 3.2

EJERCICIOS

3.1 **Representar gráficamente, sobre papel cuadriculado, la función de proporcionalidad directa, cuando la constante de proporcionalidad r es igual a $\frac{2}{3}$ y el campo de variabilidad de la variable independiente y de la función es R_+, es decir, si se trata de magnitudes absolutas.**

3.2 **Repita el ejercicio anterior, sustituyendo R_+ por R, es decir, si se trata de magnitudes relativas.**

3.3 **Interprete gráficamente la constante de proporcionalidad, r, sobre la figura del ejercicio anterior.**

4. Función de proporcionalidad inversa

Sean dos magnitudes entre las que se ha establecido una proporcionalidad inversa. Si se designa por x a la medida de una cantidad de una de ellas y se designa por y a la medida de la cantidad correspondiente de la otra, la proporcionalidad inversa se expresa en la forma

$$\boxed{y=\frac{k}{x}}$$

donde k es un número real fijo, no nulo.

En la mayor parte de los casos interesantes, x e y podían tomar valores pertenecientes a R_+, o bien a R, si se trata de magnitudes relativas.

Por tanto, *definimos la función de proporcionalidad inversa como la aplicación de*

$$R_+ \longrightarrow R_+$$

o de

$$R \longrightarrow R$$

que asocia a cada valor, x, de la variable independiente, el valor

$$y=\frac{k}{x}$$

de la función, siendo k un número real fijo, no nulo.

Si representamos gráficamente la función de proporcionalidad inversa

$$y=\frac{k}{x}$$

obtenemos una curva, llamada *hipérbola equilátera* (fig. 4.1), si se trata de magnitudes relativas, es decir, si el campo de variabilidad de la variable independiente y de la función es R y una de las dos ramas de la hipérbola equilátera (fig. 4.2), si se trata de magnitudes absolutas, es decir, si sustituimos R por R_+.

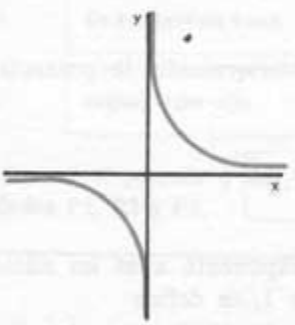


Figura 4.1

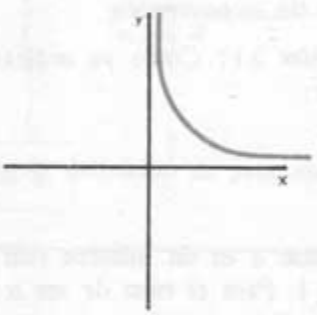


Figura 4.2

EJERCICIOS

4.1 Representar gráficamente, sobre papel cuadriculado, la función de proporcionalidad inversa

$$y=\frac{4}{x}$$

considerada como aplicación de R_+ en R_+.

4.2 Repita el ejercicio anterior, sustituyendo R_+ por R.

4.3 En la figura 4.3 se representa la hipérbola equilátera de ecuación

$$x \cdot y = k$$

Cada punto P, de la hipérbola, es vértice de un rectángulo, otro de cuyos

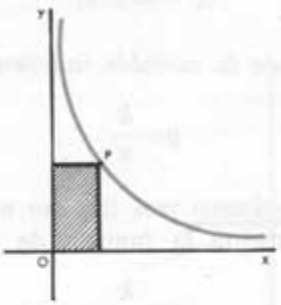


Figura 4.3

vértices es el origen O y dos de cuyos lados están contenidos en los ejes de coordenadas. Cuando el punto P recorre la hipérbola, el rectángulo indicado varía, pero, ¿qué le ocurre a su área?

5. Leyes de exponentes

• DEFINICIÓN 5.1: Como ya indicamos anteriormente, la potencia se define en la forma:

$$a^n = a \cdot a \cdot \overset{(n}{\ldots} \cdot a$$

donde la base a es un número real y el exponente n es un número natural mayor que 1. Para el caso de ser n igual a 1, se define

$$a^1 = a$$

De esta definición se obtienen, inmediatamente, las tres propiedades siguientes:

$P1$: $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

$P2$: $a^{n+m} = a^n \cdot a^m$

$P3$: $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

$a, b \in R$

$n, m \in N^*$

es decir, donde a y b son números reales y n y m son números naturales no nulos.

EJERCICIOS

5.1 **Comprobar las tres propiedades anteriores, para**

$$a=10; \quad b=4; \quad n=2; \quad m=3$$

5.2 **Demostrar las tres propiedades anteriores, teniendo en cuenta la conmutatividad y asociatividad del producto.**

5.3 **Demuestre que**

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n} \qquad a, b \in R; \quad n \in N^*$$

Ponga ejemplos.

5.4 **Compare la expresión**

$$na=a+a+\overset{(n}{\ldots}+a; \qquad n \in N^*; \qquad a \in R$$

y las siguientes propiedades que se deducen de ella:

E1:	$n(a+b)=na+nb$	$n, m \in N^*$ $a, b \in R$
E2:	$(n+m)a=na+ma$	
E3:	$m(na)=(m \cdot n)a$	

estudiadas en el párrafo 6 del § 13 con la definición de potencia y las tres propiedades P1, P2 y P3.

• DEFINICIÓN 5.2: Cualquiera que sea el número real a, se define

$$a^0=1$$

EJERCICIO

5.5 **Compruebe que la definición anterior se justifica haciendo m igual a cero en P2, es decir, si deseamos que la propiedad P2 siga siendo cierta para el caso de ser m igual a cero, entonces hemos de definir la potencia de exponente cero como acaba de hacerse.**

• DEFINICIÓN 5.3: Cualquiera que sea el número real a, se define

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n}$$

donde $n \in N^*$.

EJERCICIOS

5.6 Compruebe que la definición anterior se justifica sustituyendo m por $-n$ en P2 y teniendo en cuenta la definición 5.2.

5.7 Calcule

$$3^{-2}$$

5.8 Demuestre que

$$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$$

donde $m, n \in N$. Ponga ejemplos.

• DEFINICIÓN 5.4: Dado el número racional $\frac{p}{q}$, se define

$$a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^p}$$

EJERCICIOS

5.9 Justifique la definición anterior, sustituyendo n por $\frac{p}{q}$ y m por q en P3.

5.10 Calcule

$$4^{3/2}$$

5.11 Demuestre que

$$\frac{p}{q}=\frac{r}{s} \Longrightarrow a^{p/q}=a^{r/s}$$

5.12 Demuestre que las propiedades P1, P2 y P3 son también ciertas si m y n son números racionales cualesquiera.

Nota: Las propiedades *P1*, *P2* y *P3* son también válidas cuando n y m son números reales. Si se desea estudiar las demostraciones de lo que se acaba de afirmar puede consultarse cualquiera de los libros siguientes:

ABELLANAS: *Elementos de Matemáticas*. Madrid, 1967, pág. 431.

REY PASTOR: *Elementos de Análisis Algebraico*. Madrid, 1961, capítulo VIII, § 6.

5.13 Demuestre que las expresiones de los ejercicios 5.3 y 5.8 son ciertas si m y n son números racionales, después de poner ejemplos de cada una.

6. Función exponencial

• EJEMPLO 6.1: Consideremos la función

$$\boxed{y=2^x}$$

a partir de la cual construimos la tabla de valores siguiente:

x	y
2	$2^2=2\cdot 2=4$
3/2	$2^{3/2}=2^{1+1/2}=2^1\cdot 2^{1/2}=2\sqrt{2}\simeq 2{,}8$
1	$2^1=2$
1/2	$2^{1/2}=\sqrt{2}\simeq 1{,}4$
0	$2^0=1$
−1/2	$2^{-1/2}=\sqrt{2}^{-1}=\sqrt{\frac{1}{2}}\simeq 0{,}7$
−1	$2^{-1}=\frac{1}{2}=0{,}5$
−3/2	$2^{-3/2}=\sqrt{2^{-3}}=\sqrt{\frac{1}{2^3}}=\sqrt{\frac{1}{8}}\simeq 0{,}36$
−2	$2^{-2}=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}=0{,}25$

siendo su representación gráfica la indicada en la figura 6.1.

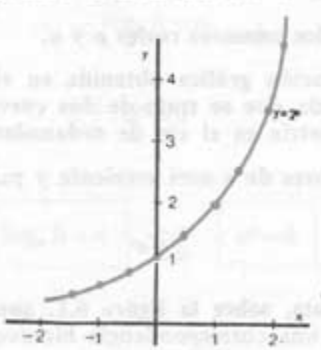


Figura 6.1

Notemos que el campo de variabilidad de la variable independiente es R, mientras que el campo de variabilidad de la función es R_+. Como

$$p > q \Longrightarrow 2^p > 2^q$$

cualesquiera que sean los números reales p y q, es decir, como al aumentar la variable independiente aumenta la función, diremos que esta función es *creciente.*

• DEFINICIÓN 6.1: *Se llama función exponencial, de base a, a la aplicación*

$$x \longrightarrow a^x$$

donde x representa un número real arbitrario, es decir, a la función

$$\boxed{y = a^x}$$

en que a es un número real positivo.

EJERCICIOS

6.1 Representar gráficamente la función exponencial

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

6.2 Estudie los campos de variabilidad de la variable independiente y de la función en el ejercicio anterior.

6.3 Compruebe que la función exponencial del ejercicio 6.1 es decreciente, es decir, que

$$p > q \Longrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^p < \left(\frac{1}{2}\right)^q$$

cualesquiera que sean los números reales p y q.

6.4 Compare la representación gráfica obtenida en el ejercicio 6.1 con la de la figura 6.1, comprobando que se trata de dos curvas simétricas, en la simetría axial cuyo eje de simetría es el eje de ordenadas.

6.5 Estudiar para qué valores de a será creciente y para cuáles será decreciente la función exponencial

$$y = a^x$$

6.6 Compruebe gráficamente, sobre la figura 6.1, que la función exponencial del ejemplo 6.1 establece una correspondencia biunívoca entre los números reales y los números reales positivos. Generalice este resultado para cualquier valor de a.

6.7 Compruebe que si a es negativo, la función exponencial

$$y=a^x$$

no asocia a cada número real un número real. Para ello haga que x tome valores inversos naturales pares.

---

7. Logaritmación

• EJEMPLO 7.1: Como el número real h, tal que

$$\boxed{2^h=8}$$

es 3, decimos que *el logaritmo en base* 2 *de* 8 *es* 3 y escribimos

$$\boxed{\log_2 8=3}$$

• EJEMPLO 7.2: Como

$$3^2=9$$

decimos que *el logaritmo en base* 3 *de* 9 *es* 2 y escribimos

$$\log_3 9=2$$

Abreviadamente:

$$\boxed{\log_3 9=2} \underset{\text{def}}{\iff} \boxed{3^2=9}$$

• DEFINICIÓN 7.1: *Decimos que el logaritmo en base a de h es igual a n y escribimos*

$$\log_a h=n$$

si

$$a^n=h$$

Abreviadamente:

$$\boxed{\log_a h=n} \underset{\text{def}}{\iff} \boxed{a^n=h}$$

EJERCICIO

7.1 Calcular

$$\log_2 4; \quad \log_3 81; \quad \log_4 16; \quad \log_5 125; \quad \log_{10} 1000$$
$$\log_a a^3; \quad \log_{a^2}(a^3); \quad \log_4 8; \quad \log_{25} 125; \quad \log_{100} 1000$$
$$\log_2 1; \quad \log_3 1; \quad \log_2 \left(\frac{1}{2}\right); \quad \log_2 \left(\frac{1}{4}\right)$$

Observemos que en la expresión

$$a^n = h$$

intervienen tres números reales. La operación consistente en calcular h, dados a y n, se llama *potenciación*. La consistente en calcular a, dados h y n, *radicación*. Y la consistente en calcular el exponente n, dados a y h, *logaritmación*. Por tanto, la potenciación tiene dos operaciones inversas, la radicación y la logaritmación:

$$\boxed{\sqrt[n]{h} = a} \underset{\text{def}}{\iff} \boxed{a^n = h} \underset{\text{def}}{\iff} \boxed{\log_a h = n}$$

• PROPOSICIÓN 7.1: *El logaritmo del producto de dos números es igual a la suma de los logaritmos de los factores*, es decir,

$$\boxed{\log_a (hk) = \log_a h + \log_a k}$$

Demostración:

$$\left.\begin{array}{l} \log_a h = n \underset{\text{def}}{\iff} a^n = h \\ \log_a k = m \underset{\text{def}}{\iff} a^m = k \end{array}\right\} \Longrightarrow a^n \cdot a^m = h \cdot k$$

$$\Downarrow \text{ P2 del párrafo 5}$$

$$\log_a (hk) = n + m \underset{\text{def}}{\iff} a^{n+m} = hk$$

$$\Downarrow$$

$$\log_a (hk) = \log_a h + \log_a k$$

EJERCICIOS

7.2 Comprobar la expresión anterior para

$$a = 2; \quad h = 4; \quad k = 8$$

7.3 Demostrar que

$$\log_a\left(\frac{h}{k}\right)=\log_a h-\log_a k$$

después de comprobar esta expresión con un ejemplo.

7.4 Demostrar que

$$\log_a (h^s)=s\cdot\log_a h \qquad s\in R$$

Ponga ejemplos.

7.5 Busque una expresión que permita calcular el logaritmo de una raíz, en función del radicando y del índice de la raíz. Ponga ejemplos.

7.6 Después de poner ejemplos, demuestre que

$$\log_b a=\frac{1}{\log_a b}$$

7.7 Lo mismo para

$$\log_a h=(\log_a b)\cdot(\log_b h)$$

7.8 A partir de los dos ejercicios anteriores, pruebe que

$$\log_a h=\frac{\log_b h}{\log_b a}$$

donde b es un número real no nulo.

---

8. Función logarítmica

• DEFINICIÓN 8.1: *Se llama función logarítmica, de base a, a la aplicación*

$$x \longrightarrow \log_a x$$

que asocia a cada número real, x, el número real $\log_a x$, *es decir, a la función*

$$\boxed{y=\log_a x}$$

• EJEMPLO 8.1: Dada la función logarítmica de base 2:

$$y=\log_2 x$$

construyamos, a partir de ella, la tabla de valores:

x	8	4	2	1	1/2	1/4
y	3	2	1	0	−1	−2

y representémosla gráficamente (Fig. 8.1).

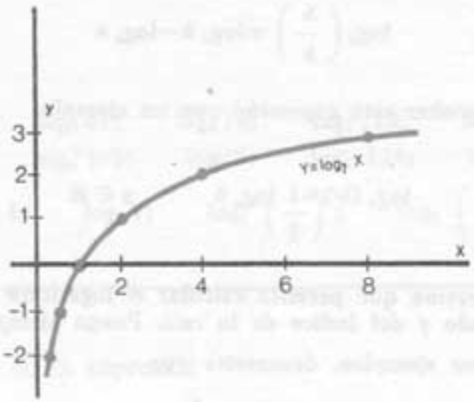


Figura 8.1

Si comparamos esta curva con la de la figura 6.1, o lo que es igual, si comparamos la tabla de valores del ejemplo 8.1 con la del ejemplo 6.1, observamos que esta curva se obtiene de aquélla, cambiando entre sí los valores x e y. Este resultado no debe sorprender, ya que

$$y=\log_2 x \iff 2^y=x$$

y, evidentemente,

$$2^y=x$$

se obtiene a partir de la función exponencial

$$y=2^x$$

cambiando entre sí x e y.

EJERCICIOS

8.1 **Comprobar que si r es negativo, entonces $\log_2 r$ no es un número real.**

8.2 **Compruebe que en la función logarítmica**

$$y=\log_2 x$$

el campo de variabilidad de la variable independiente es R_+ y el campo de variabilidad de la función es R.

8.3 **Compruebe que la función del ejemplo 8.1 es creciente.**

8.4 **Represente gráficamente la función**

$$y=\log_{\frac{1}{2}} x$$

comparando con la gráfica obtenida en el ejercicio 6.1. ¿Es creciente esta función?

En general, *la función logarítmica es una biyección, cuya correspondencia inversa es la función exponencial.*

Lo mismo que la exponencial, la función logarítmica sólo está definida si la base, a, es un número positivo.

EJERCICIOS

8.5 Calcule aproximadamente los logaritmos en base 2 de los números 3, 5 y 7, ayudándose de la gráfica de la figura 8.1.

8.6 Calcule el número natural n tal que

$$n \leqslant \log_{10} 3672 < n+1$$

8.7 Compruebe que el logaritmo en base 2 de x es proporcional al logaritmo en base 10 de x, cualquiera que sea x. ¿Cuál es la constante de proporcionalidad? Ayúdese del ejercicio 7.8.

El ejercicio anterior muestra que, conocidos los logaritmos decimales, pueden calcularse inmediatamente los logaritmos en otra base, distinta de diez, sin más que multiplicar por una constante. Por ello, basta construir *tablas de logaritmos* en una sola base, habiéndose elegido la base decimal. En dichas tablas sólo se encuentran las cifras decimales del número buscado, ya que su parte entera es inmediata de calcular, como sugiere el ejercicio 8.6.

• PROPOSICIÓN 8.1: *La función logarítmica es un isomorfismo del grupo multiplicativo de los números reales positivos, no nulos, en el grupo aditivo de los números reales.* En otras palabras, *la aplicación*

$$R_+^* \xrightarrow{\log_a} R$$

es un isomorfismo del grupo $(R_+^*, \cdot)$ *en el grupo* $(R, +)$.

Demostración: Basta tener en cuenta la proposición 7.1 y que la función logarítmica establece una biyección de R_+^* en R.

Una aplicación interesante de este isomorfismo es la REGLA DE CÁLCULO. Esencialmente, este instrumento consiste en dos reglitas graduadas a escala logarítmica (fig. 8.2), esto es, dos reglitas con escalas en las que se ha sustituido cada número n por el número h, tal que

$$\log_a h = n$$

con lo cual la operación de multiplicar se ha sustituido por la de sumar. Por ejemplo, para multiplicar 2 por 3, se disponen las reglitas como indica

la figura 8.2, haciendo que el 1 de la reglita superior quede frente al 2 (uno de los factores) de la reglita inferior, con lo cual frente al 3 (el otro factor) de la reglita superior, aparece el 6 (producto de 2 y 3) en la reglita inferior.

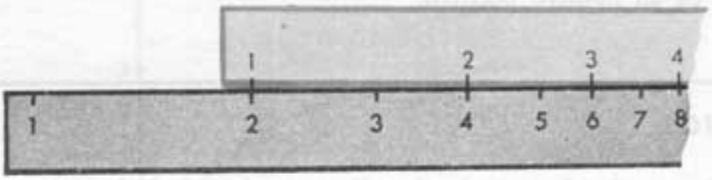


Figura 8.2

EJERCICIOS

8.8 Construya dos reglitas de cartulina, graduadas a escala logarítmica, tomando para a el valor 2, que es muy cómodo. Para ello ayúdese de la gráfica de la figura 8.1, sustituyendo cada número, y, de la semirrecta de las ordenadas positivas, por el correspondiente valor, x, obtenido mediante la curva.

8.9 Utilice la regla de cálculo así construida para efectuar multiplicaciones y divisiones sencillas.

9. Las funciones y su representación gráfica en la Escuela Primaria

Cuando el niño sólo conoce el concepto de número natural, ya puede manejar funciones cuyo campo de variabilidad de la variable independiente y de la función sean subconjuntos del semianillo N, de los naturales.

Así, por ejemplo, la gráfica de la figura 9.1 representa una de estas funciones.

Figura 9.1

En abscisas se han representado años y en ordenadas el número de alumnos matriculados en 2.° Curso de Magisterio, a principio de curso de cada uno de los años indicados, en una cierta Escuela.

Estas funciones experimentales son las que más interesan al niño.

Cuando el niño ya maneja números decimales, pueden introducirse funciones, como la de la figura 9.2, donde se ha representado en ordenadas la tem-

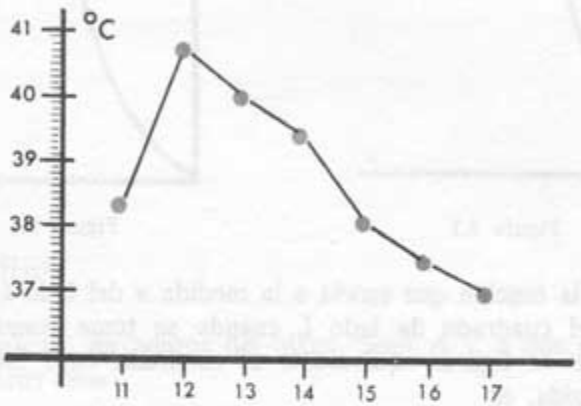


Figura 9.2

peratura, en grados centígrados, de un enfermo, tomada a la misma hora cada uno de los días indicados en abscisas.

En este ejemplo se ha pasado de los puntos, representados en rojo, a la poligonal cuyos vértices son esos puntos. Aunque no se conoce la forma de la curva entre cada dos puntos rojos, pues no se ha tomado la temperatura en cada instante, sino una vez al día, al pasar de los puntos a la poligonal, se ha pasado de una función de variable natural a un función de variable real.

Se ha obtenido así una función cuya representación gráfica es una poligonal abierta formada por varios segmentos concatenados. A tales funciones se les suele llamar *funciones segmentarias.*

En la función

$$x \longrightarrow x^2$$

y en otras similares, el campo de variabilidad de la variable independiente puede ser N, Z, Q, etc., pudiendo estudiarse estas funciones cuando el niño maneja los naturales, los enteros, los racionales, etc.

Las representaciones gráficas pueden ayudar a distinguir entre función creciente y función de proporcionalidad directa, que son confundidas frecuentemente.

La función que asocia a la medida x del radio r, la media y de la longitud de la circunferencia de radio r, cuando se toma la misma unidad para medir el radio y la circunferencia rectificada, es

$$y = 2\pi x$$

Como se trata de una función de proporcionalidad directa, su gráfica es una recta, como lo muestra la figura 9.3.

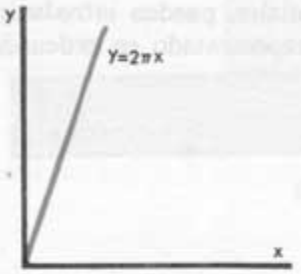


Figura 9.3

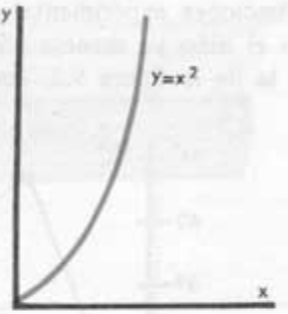


Figura 9.4

En cambio, la función que asocia a la medida x del lado l, la medida y de la extensión del cuadrado de lado l, cuando se toma como unidad de extensión la clase de figuras equivalente al cuadrado cuyo lado es la unidad de longitud elegida, es

$$y=x^2$$

Esta función, representada en la figura 9.4, es creciente pero no de proporcionalidad directa, lo que se refleja en que su gráfica no es una recta. Lo mismo podría decirse para función decreciente y función de proporcionalidad inversa.

ESPACIOS VECTORIALES 16

1. Vectores fijos

Sea Π el conjunto de puntos del plano. Sean A y B dos puntos distintos del plano, es decir, sean

$$A \in \Pi; \qquad B \in \Pi$$

Designemos por A_B a la semirrecta de origen el punto A y que contiene al punto B. Análogamente, sea B_A la semirrecta de origen B, que contiene al punto A. Consideremos el segmento fijo

$$\overline{AB} = A_B \cap B_A$$

de extremos los puntos A y B (fig. 1.1). En el segmento fijo $\overline{AB}$ podemos considerar dos orientaciones, correspondientes a la idea intuitiva de recorrer $\overline{AB}$

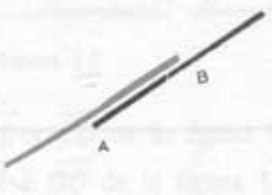


Figura 1.1

Figura 1.2

Figura 1.3

yendo desde A hasta B, o bien desde B hasta A, lo que se matematiza dando sus extremos en un cierto orden. Al segmento fijo $\overline{AB}$, junto con una de estas dos orientaciones, le llamaremos *segmento fijo orientado* o *vector fijo*. El segmento fijo $\overline{AB}$ da lugar, pues, a dos posibles vectores fijos, según el orden en que se den sus extremos. El primero de los dos puntos dados se llama

origen del vector fijo. Así, la pareja ordenada de puntos (A, B) define el vector fijo de origen A y extremo B, que representaremos por $\overrightarrow{AB}$ (Fig. 1.3). Por el contrario, la pareja ordenada de puntos (B, A) define el vector fijo $\overrightarrow{BA}$, de origen B y extremo A (Fig. 1.2).

Como $A \in \Pi$ y $B \in \Pi$, por tanto $(A, B) \in \Pi \times \Pi$. Por tanto, si designamos por V al conjunto de los vectores fijos del plano, la aplicación

$$\Pi \times \Pi \longrightarrow V$$

que asocia a cada pareja ordenada de puntos $(A, B) \in \Pi \times \Pi$ el vector fijo $\overrightarrow{AB} \in V$, es una biyección.

Los vectores fijos, como el $\overrightarrow{AA}$, cuyo origen coincide con su extremo, se llaman *vectores fijos nulos*.

Dos vectores fijos, como $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$, tales que el extremo del primero coincida con el origen del segundo, se dicen *consecutivos* (fig. 1.4).

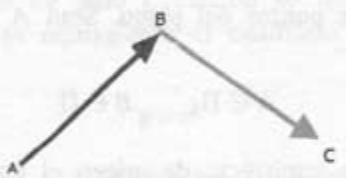


Figura 1.4

Dado un vector fijo $\overrightarrow{AB}$, consideremos el segmento fijo $\overline{AB}$, cuyos extremos son el origen y el extremo del vector. Este segmento fijo determina un segmento $\{\{\overline{AB}\}\}$, formado por todos los segmentos iguales al $\overline{AB}$. A la media del segmento $\{\{\overline{AB}\}\}$, con un segmento unidad $\vec{u}$, se le llama *módulo* del vector fijo $\overrightarrow{AB}$. El módulo del vector fijo $\overrightarrow{AB}$ se representa por

$$|\overrightarrow{AB}|$$

EJERCICIOS

1.1 ¿Son iguales los módulos de los vectores fijos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BA}$?

1.2 ¿Cuál será el módulo de un vector fijo nulo?

Se llama *dirección* del vector fijo no nulo $\overrightarrow{AB}$ a la dirección de la recta que contiene al segmento $\overline{AB}$.

EJERCICIO

1.3 Si dos vectores fijos tienen la misma dirección, ¿han de estar contenidos en la misma recta?

Para expresar que el vector fijo $\overrightarrow{AB}$ tiene la misma dirección que el $\overrightarrow{CD}$, escribiremos

$$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$$

Dos vectores fijos que tienen la misma dirección pueden tener el mismo *sentido* o sentidos contrarios. La idea de sentido es conocida, pues pertenece al lenguaje habitual. Así,

a) $\overrightarrow{RP}$ y $\overrightarrow{TS}$ de la figura 1.5 tienen el mismo sentido.

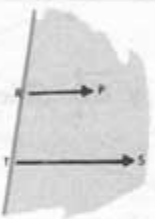


Figura 1.5

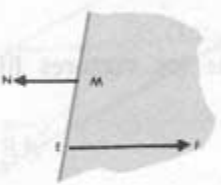


Figura 1.6

b) $\overrightarrow{GH}$ y $\overrightarrow{XY}$ de la figura 1.7 tienen el mismo sentido.

c) $\overrightarrow{MN}$ y $\overrightarrow{EF}$ de la figura 1.6 tienen sentidos contrarios.

Figura 1.7

Figura 1.8

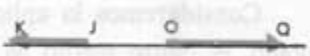


Figura 1.9

d) $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ de la figura 1.8 tienen sentidos contrarios.

e) $\overrightarrow{JK}$ y $\overrightarrow{OQ}$ de la figura 1.9 tienen sentidos contrarios.

Precisemos matemáticamente esta idea intuitiva: Para el caso de los vectores fijos $\overrightarrow{RP}$ y $\overrightarrow{TS}$ de la figura 1.5, observemos que la recta definida por los puntos R y T, orígenes respectivos de esos dos vectores fijos, divide al plano en dos semiplanos, perteneciendo los puntos P y S, extremos respectivos de esos vectores fijos, al mismo semiplano. En cambio, para el caso de los vectores fijos $\overrightarrow{MN}$ y $\overrightarrow{EF}$ de la figura 1.6, sus extremos respectivos N y F pertenecen a dis-

tintos semiplanos respecto de la recta que pasa por los puntos M y E, orígenes respectivos de esos vectores fijos. Para los vectores fijos $\overrightarrow{GH}$ y $\overrightarrow{XY}$, de la figura 1.7, contenidos en la misma recta, observemos que la semirrecta X_Y está contenida en la G_H. En cambio, para los vectores fijos $\overrightarrow{JK}$ y $\overrightarrow{OQ}$, de la figura 1.9, la semirrecta J_K ni contiene, ni está contenida, en la O_Q. Lo mismo ocurre para los vectores fijos de la figura 1.8.

EJERCICIOS

1.4 ¿Tendrán el mismo sentido dos vectores fijos $\overrightarrow{AX}$ y $\overrightarrow{BY}$ de la misma dirección, situados en distintas rectas, tales que los puntos X e Y pertenecen al mismo semiplano de borde la recta que pasa por los puntos A y B?

1.5 ¿Tendrán el mismo sentido dos vectores fijos $\overrightarrow{AX}$ y $\overrightarrow{BY}$, situados en la misma recta y tales que la semirrecta A_X no contiene ni está contenida en la B_Y?

Para expresar que los vectores fijos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ tienen el mismo sentido, escribiremos

$$\overrightarrow{AB} \uparrow \overrightarrow{CD}$$

y para expresar que tienen sentidos contrarios, escribiremos

$$\overrightarrow{AB} \downarrow \overrightarrow{CD}$$

2. Equipolencia de vectores fijos

Consideremos la aplicación que asocia a cada pareja (P, Q) de puntos del plano, el punto medio M del segmento $\overline{PQ}$ (figura 2.1). Tenemos así una aplicación

$$\Pi \times \Pi \longrightarrow \Pi$$

Figura 2.1

es decir, una operación interna en el conjunto II, como ya se indicó en el ejemplo 3.1 del § 5. Utilizaremos $*$ como signo convencional de esta operación interna, es decir, escribiremos

$$P * Q$$

para designar al punto medio del segmento de extremos P y Q. De acuerdo con la figura 2.1, se tiene, pues,

$$P * Q = M$$

Consideremos dos vectores fijos, $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ (figura 2.2) y sean

$$B * C = H; \qquad A * D = K$$

es decir, sea K el punto medio del segmento cuyos extremos son el origen, A,

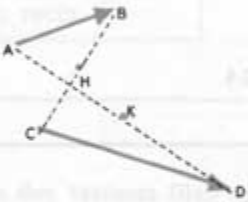


Figura 2.2

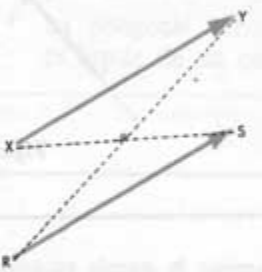


Figura 2.3

de $\overrightarrow{AB}$ y el extremo, D, de $\overrightarrow{CD}$ y sea H el punto medio del segmento cuyos extremos son el origen, C, de $\overrightarrow{CD}$ y el extremo, B, de $\overrightarrow{AB}$. En general, los puntos H y K serán distintos, como ocurre en la figura 2.2. Pero habrá vectores fijos, como el $\overrightarrow{RS}$ y el $\overrightarrow{XY}$, de la figura 2.3, tales que

$$X * S = R * Y$$

Por ello diremos que $\overrightarrow{RS}$ y $\overrightarrow{XY}$ son *equipolentes.*

• DEFINICIÓN 2.1 *Diremos que un vector fijo es equipolente a otro, si el punto medio del segmento cuyos extremos son el origen del primer vector fijo y el extremo del segundo, coincide con el punto medio del segmento cuyos extremos son el origen del segundo y el extremo del primero.*

Dados dos vectores fijos, la definición anterior permite decidir si son, o no son, equipolentes. Se ha establecido, pues, una relación entre vectores fijos, la relación de *equipolencia.*

Para expresar que $\overrightarrow{AB}$ es equipolente a $\overrightarrow{CD}$, escribiremos

$$\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$$

Por tanto,

$$\boxed{\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}} \underset{\text{def}}{\iff} \boxed{A * D = B * C}$$

- OTRO EJEMPLO: Para los vectores fijos $\overrightarrow{JK}$ y $\overrightarrow{HI}$, de la figura 2.4, se tiene:

$$K * H = F = J * I \Longrightarrow \overrightarrow{JK} \sim \overrightarrow{HI}$$

Figura 2.4

EJERCICIOS

2.1 Dados tres puntos, *A*, *B* y *C*, describa un procedimiento que permita encontrar un punto *X*, tal que

$$\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CX}$$

Haga la figura correspondiente.

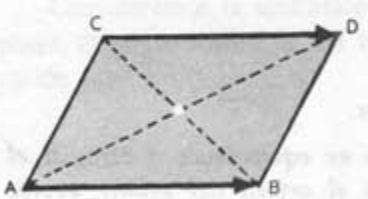


Figura 2.5

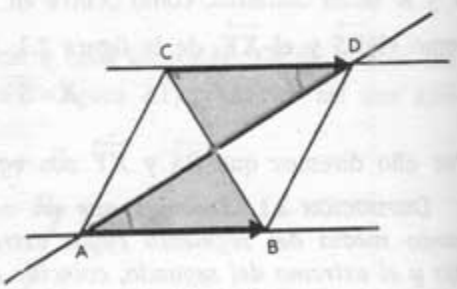


Figura 2.6

2.2 Si en el ejercicio anterior *A*, *B* y *C* están alineados, probar que entonces también *X* está alineado con ellos. Haga una figura apropiada.

2.3 Demostrar que dos vectores fijos nulos cualesquiera son equipolentes. Construya una figura.

2.4 Demostrar que si dos vectores fijos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ son tales que la poligonal cerra-

da *ABDCA* es borde de un paralelogramo, entonces

$$\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$$

Ayúdese de la figura 2.5.

2.5 Demuestre que si

$$\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$$

no estando ambos vectores contenidos en la misma recta, entonces la poligonal cerrada *ABDCA* es borde de un paralelogramo. Ayúdese de la figura 2.6.

Los dos últimos ejercicios permiten establecer:

PROPOSICIÓN 2.1:

- $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$
- $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ no están contenidos en la misma recta.

$\Longleftrightarrow$

- La poligonal cerrada *ABDCA* es borde de un paralelogramo.

EJERCICIOS

2.6 Demuestre que dos vectores fijos equipolentes tienen el mismo módulo.

2.7 Dibuje dos vectores fijos que tengan el mismo módulo y no sean equipolentes.

2.8 Demuestre que dos vectores fijos equipolentes y no nulos tienen la misma dirección.

2.9 Dibuje dos vectores fijos que tengan la misma dirección y no sean equipolentes.

2.10 Dibuje dos vectores fijos que tengan el mismo módulo y la misma dirección y no sean equipolentes.

2.11 Compruebe que dos vectores fijos equipolentes tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido.

2.12 Demuestre que si dos vectores fijos tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido son equipolentes.

Los dos últimos ejercicios permiten afirmar:

- PROPOSICIÓN 2.2:

$$\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD} \iff \begin{cases} |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}| \\ \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD} \\ \overrightarrow{AB} \uparrow \overrightarrow{CD} \end{cases}$$

• PROPOSICIÓN 2.3:

• $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$ • $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ están contenidos en la misma recta r	$\Leftrightarrow$	• Existe un vector $\overrightarrow{XY}$, no contenido en la recta r, tal que: • la poligonal cerrada $ABYXA$ es borde de un paralelogramo. • la poligonal cerrada $CDYXC$ es borde de un paralelogramo.

EJERCICIOS

2.13 Probar la proposición anterior y construir la figura apropiada.

2.14 La proposición 2.2 sugiere otra definición de equipolencia, distinta de la definición 2.1. Explíquela.

2.15 Las proposiciones 2.1 y 2.3 sugieren una tercera definición de equipolencia. Desarróllela.

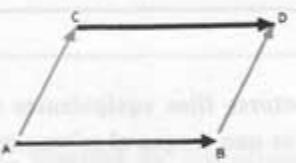


Figura 2.7

2.16 Demostrar que

$$\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} \sim \overrightarrow{BD}$$

ayudándose de la figura 2.7.

3. Vector libre

En el conjunto V, de los vectores fijos del plano, hemos definido la relación de equipolencia. Vamos a demostrar que la equipolencia es una relación de equivalencia. Las clases de equivalencia engendradas por esta relación se llaman *vectores libres*.

EJERCICIOS

3.1 Demostrar que todo vector fijo es equipolente consigo mismo, tanto si es nulo como si no lo es.

3.2 Demostrar que

$$\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{AB}$$

• PROPOSICIÓN 3.1:

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD} \\ \overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{EF} \end{array}\right\} \Longrightarrow \overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{EF}$$

PRIMERA DEMOSTRACIÓN:

1.er Caso: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{EF}$ están situados en rectas distintas.

a) Comencemos suponiendo que $FD \neq BD$, donde FD representa a la recta que pasa por F y D.

$$\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$$

$$\Downarrow$$

Sea $A * F = X$; $A * D = C * B = M$; Sea $Y = B * E$

$\overline{XM}$ paralela media de $\overset{\triangle}{AFD}$; $\overline{YM}$ paralela media de $\overset{\triangle}{BEC}$

$$\Downarrow \qquad \overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{EF} \qquad \Downarrow$$

$$\overline{XM} \,||\, \overline{FD} \qquad \overline{FD} \,||\, \overline{EC} \quad \text{(proposición 2.1)} \qquad \overline{EC} \,||\, \overline{YM}$$

$$XM \,||\, YM$$

$$\downarrow$$

los puntos Y, M y X están alineados

$$\downarrow$$

$$X \in YM$$

De modo análogo, pero razonando ahora con las paralelas medias de los triángulos $\overset{\triangle}{EDB}$ y $\overset{\triangle}{FCA}$ (Fig. 3.1), se prueba que

$$XH \,||\, YH$$

$$\downarrow$$

los puntos X, H e Y están alineados

$$\downarrow$$

$$X \in YH$$

Por hipótesis:

$$FD \nparallel BD \Longrightarrow YM \nparallel YH$$

$$\left.\begin{matrix} X \in YM \\ X \in YH \end{matrix}\right\} \Longrightarrow X \in YM \cap YH = Y \Longrightarrow X = Y \Longrightarrow A * F = B * E \Longrightarrow \overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{EF}$$

b) Si $FD \| BD$, la demostración es consecuencia inmediata de la proposición 2.1.

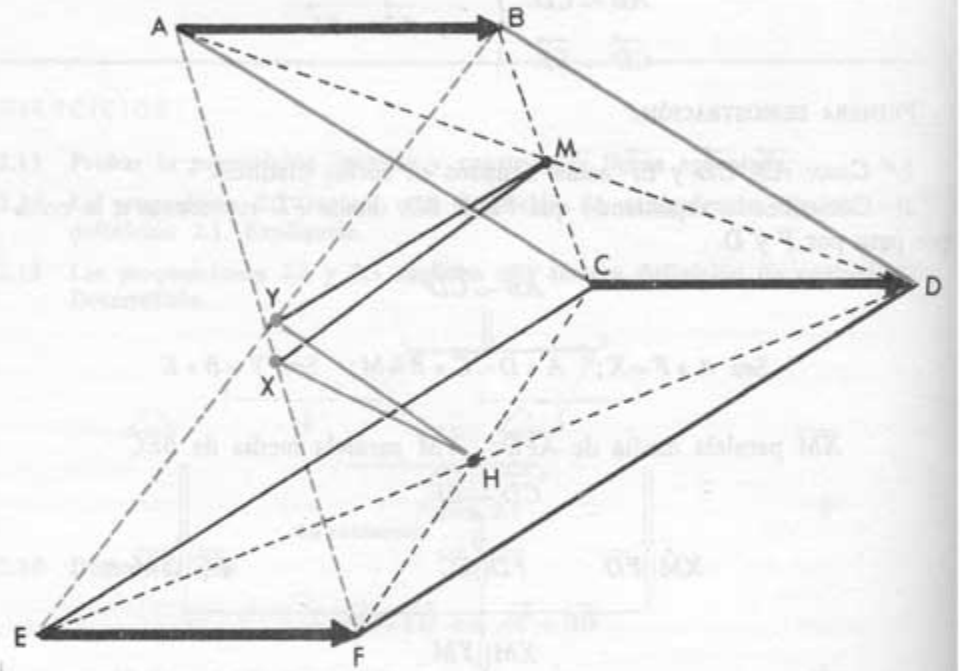


Figura 3.1

2.º Caso: Dos de los tres vectores fijos $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{EF}$ están situados en la misma recta y el otro en una recta distinta.

En este caso, el razonamiento es el mismo, cambiando sólo la figura.

3.er Caso: Los tres vectores fijos están situados en la misma recta.

En este caso, la proposición 2.3 sugiere la demostración

SEGUNDA DEMOSTRACIÓN: Es consecuencia inmediata de la proposición 2.2.

Esta segunda demostración, aunque es más cómoda, requiere tener en cuenta el concepto de módulo y, por tanto, el de medida.

De los ejercicios 3.1 y 3.2 y de la proposición anterior sigue:

• PROPOSICIÓN 3.2. *La equipolencia es una relación de equivalencia.* Los elementos del conjunto cociente

$$\mathfrak{V} = V/\sim$$

se llaman *vectores libres*, o simplemente *vectores*.

Cada vector fijo $\overrightarrow{AB}$ define un vector libre, que representaremos por

$$\{\{\overrightarrow{AB}\}\}$$

Designaremos también a los vectores por letras minúsculas con una flecha encima: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, ...

EJERCICIOS

3.3 De las afirmaciones siguientes, indique cuáles son correctas:

$$\overrightarrow{AB} \in \{\{\overrightarrow{AB}\}\}; \quad \overrightarrow{AB} = \{\{\overrightarrow{AB}\}\}; \quad \overrightarrow{AB} \subset \{\{\overrightarrow{AB}\}\};$$

3.4 Diga si es correcto escribir

$$\boxed{\overrightarrow{AB} \in \vec{a}} \iff \boxed{\{\{\overrightarrow{AB}\}\} = \vec{a}}$$

3.5 Demostrar que

$$\boxed{\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}} \iff \boxed{\{\{\overrightarrow{AB}\}\} = \{\{\overrightarrow{CD}\}\}}$$

3.6 Demostrar que dados un vector libre $\vec{a}$ y un punto P del plano, existe un único vector fijo perteneciente al vector $\vec{a}$ y cuyo origen sea P.

Se llama *módulo*, *dirección* y *sentido* de un vector libre al módulo, la dirección y el sentido respectivos de uno cualquiera de los vectores fijos que forman el vector libre.

4. Adición de vectores

Sean $\vec{n}$ y $\vec{r}$ dos vectores. Sea O un punto cualquiera del plano. Sea $\overrightarrow{ON}$ el representante del vector $\vec{n}$ con origen en O, es decir, sea

$$\overrightarrow{ON} \in \vec{n}$$

Ya vimos que siempre existe tal vector fijo $\overrightarrow{ON}$ (ejercicio 3.6). Sea $\overrightarrow{NR}$ el representante del vector $\vec{r}$ con origen en el punto N, es decir, sea

$$\overrightarrow{NR} \in \vec{r}$$

El vector fijo $\overrightarrow{OR}$ define un vector libre, $\{\{\overrightarrow{OR}\}\}$, al cual llamaremos, por definición, *vector suma* de los vectores $\vec{n}$ y $\vec{r}$, de acuerdo con la figura 4.1.

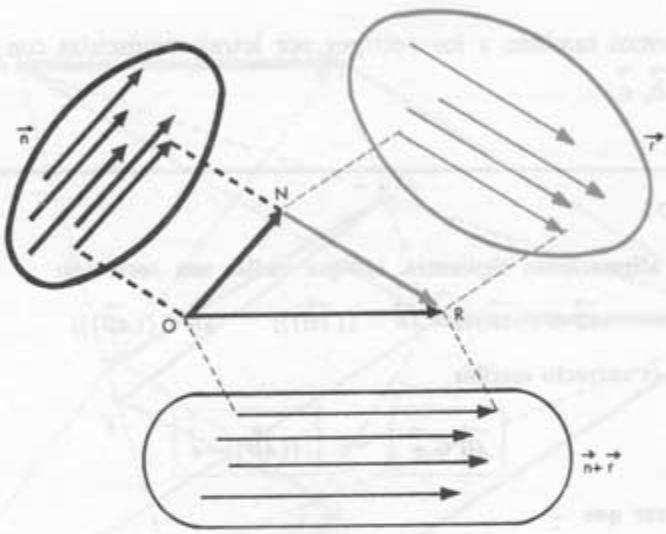


Figura 4.1

Esquemáticamente:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{n} \longrightarrow \overrightarrow{ON} \\ \vec{r} \longrightarrow \overrightarrow{NR} \end{array}\right\} \text{consecutivos}$$

$$\vec{n}+\vec{r} \longleftarrow \overrightarrow{OR}$$

• PROPOSICIÓN 4.1 *La suma de vectores, que acaba de definirse, no depende del punto O elegido.*

Demostración. Se trata de probar que si se elige otro punto O', en vez de O, se obtiene el mismo vector suma. Es decir, teniendo en cuenta el ejercicio 3.5, se trata de probar que

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{ON} \sim \overrightarrow{O'N'} \\ \overrightarrow{NR} \sim \overrightarrow{N'R'} \end{array}\right\} \Longrightarrow \overrightarrow{OR} \sim \overrightarrow{O'R'}$$

En efecto, teniendo en cuenta el ejercicio 2.16

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{ON} \sim \overrightarrow{O'N'} \iff \overrightarrow{OO'} \sim \overrightarrow{NN'} \\ \overrightarrow{NR} \sim \overrightarrow{N'R'} \iff \overrightarrow{NN'} \sim \overrightarrow{RR'} \end{array}\right\} \Longrightarrow \overrightarrow{OO'} \sim \overrightarrow{RR'} \iff \overrightarrow{OR} \sim \overrightarrow{O'R'}$$

de acuerdo con la figura 4.2.

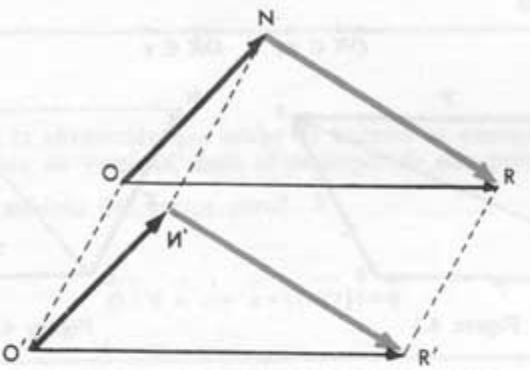


Figura 4.2

De la proposición anterior sigue que a cada pareja $(\vec{a}, \vec{b})$ de vectores la adición asocia a otro vector, $\vec{a}+\vec{b}$. Estamos, por tanto, ante una aplicación

$$\mathfrak{V} \times \mathfrak{V} \xrightarrow{+} \mathfrak{V}$$

por lo que podemos afirmar que la adición de vectores es una operación interna.

Propiedad uniforme de la adición de vectores:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{a}=\vec{a}' \\ \vec{b}=\vec{b}' \end{array}\right\} \Longrightarrow \vec{a}+\vec{b}=\vec{a}'+\vec{b}'$$

EJERCICIO

4.1 Demuestre la uniformidad, teniendo en cuenta que no difiere, en esencia, de la proposición 4.1.

Propiedad conmutativa:

$$\forall \vec{n}, \vec{r} \in \mathfrak{V} \quad \boxed{\vec{n}+\vec{r}=\vec{r}+\vec{n}}$$

EJERCICIOS

4.2 Demuestre la conmutatividad, ayudándose de la figura 4.3, en que

$$\overrightarrow{ON} \in \vec{n}; \quad \overrightarrow{NR} \in \vec{r}; \quad \overrightarrow{OS} \in \vec{r}; \quad \overrightarrow{SR} \in \vec{n}$$

4.3 Demuestre que dados dos vectores $\vec{r}$ y $\vec{n}$, si se toman representantes con origen en el punto O

$$\overrightarrow{ON} \in \vec{n}; \quad \overrightarrow{OR} \in \vec{r}$$

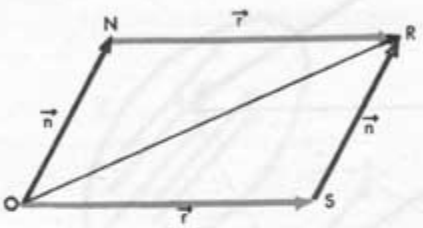


Figura 4.3

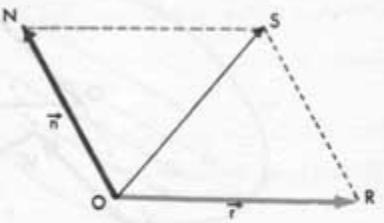


Figura 4.4

y S es el punto tal que la poligonal $ORSNO$ es borde de un paralelogramo, entonces

$$\overrightarrow{OS} \in \vec{r}+\vec{n}$$

de acuerdo con la figura 4.4.

Propiedad asociativa:

$$\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathfrak{V} \quad \boxed{(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})}$$

EJERCICIO

4.4 Demostrar la asociatividad, ayudándose de la figura 4.5, donde:

$$\overrightarrow{OA} \in \vec{a}; \quad \overrightarrow{AB} \in \vec{b}; \quad \overrightarrow{BC} \in \vec{c}$$

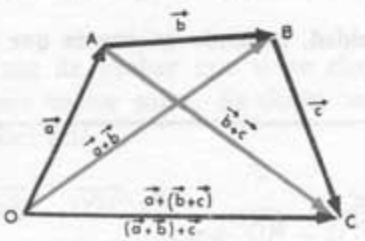


Figura 4.5

Existencia de ELEMENTO CERO:

Se llama *vector cero* a la clase formada por los vectores fijos nulos (ejercicio 2.3). Al vector cero lo representaremos por $\vec{0}$. Se verifica:

$$\forall \vec{a} \in \mathfrak{V};\ \boxed{\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}}$$

EJERCICIOS

4.5 Demostrar que la afirmación que acaba de hacerse es consecuencia de la definición de adición de vectores, dada al principio de este párrafo.

4.6 ¿Cuál será el módulo del vector cero?

4.7 Demostrar que

$$\overrightarrow{OA} \in \vec{a} \Rightarrow \vec{a}+\{\{\overrightarrow{AO}\}\}=\vec{0}$$

El ejercicio anterior sugiere la siguiente definición:

Dado un vector $\vec{a}$, si $\overrightarrow{OA} \in \vec{a}$, el vector $\{\{\overrightarrow{AO}\}\}$ se llama opuesto del vector $\vec{a}$ y se representa por $-\vec{a}$.

De lo que acaba de verse sigue la existencia de ELEMENTO OPUESTO:

$$\forall \vec{a} \in \mathfrak{V};\ \exists -\vec{a} \in \mathfrak{V};\ \boxed{\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}}$$

EJERCICIOS

4.8 Demostrar que los vectores $\vec{a}$ y $-\vec{a}$ tienen sentidos opuestos. ¿Qué podemos afirmar de su módulo y dirección?

4.9 Si $A * B=M$, ¿cómo son entre sí los vectores $\{\{\overrightarrow{MA}\}\}$ y $\{\{\overrightarrow{MB}\}\}$?

4.10 Demostrar que si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tienen el mismo sentido, entonces $\vec{a}$ y $-\vec{b}$ tienen sentidos contrarios.

• TEOREMA 4.2 *El conjunto $\mathfrak{V}$ de los vectores libres del plano posee estructura de grupo conmutativo respecto de la adición,* es decir, *$(\mathfrak{V}, +)$ es un grupo conmutativo,* llamado *el grupo aditivo de los vectores del plano.*

Definición de SUSTRACCIÓN:

$$\boxed{\vec{a}-\vec{b}=\vec{h}} \underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \boxed{\vec{h}+\vec{b}=\vec{a}}$$

- **PROPOSICIÓN 4.3**

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$$

EJERCICIOS

4.11 Demostrar la proposición anterior algebraicamente, como se hizo en el § 10 para números enteros, es decir, teniendo en cuenta que $(\mathcal{V}, +)$ es un grupo.

4.12 Demostrar la proposición anterior geométricamente, ayudándose de la figura 4.6, en la que

$$\overrightarrow{OA} \in \vec{a}; \quad \overrightarrow{OB} \in \vec{b}; \quad \overrightarrow{AC} \in -\vec{b}$$

$$\overrightarrow{BA} \in \vec{a}-\vec{b}; \quad \overrightarrow{OC} \in \vec{a}+(-\vec{b})$$

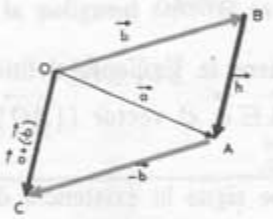


Figura 4.6

4.13 Compruebe geométricamente las siguientes propiedades:

$$(\vec{a}-\vec{b})+\vec{b}=\vec{a}$$

$$(\vec{a}+\vec{b})-\vec{b}=\vec{a}$$

$$(\vec{a}+\vec{b})-\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}-\vec{c})$$

$$\vec{a}-(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}-\vec{b})-\vec{c}$$

$$\vec{a}-(\vec{b}-\vec{c})=(\vec{a}+\vec{c})-\vec{b}$$

4.14 Dados los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ busque primero algebraicamente y después geométricamente el vector $\vec{x}$, tal que

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{x}+\vec{c}=\vec{0}$$

4.15 Diga cómo han de ser los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ para que se verifique

$$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$$

5. Producto de números reales por vectores

• EJEMPLO 5.1 Consideremos la figura 5.1. En ella, el vector $\overrightarrow{MP}$ tiene

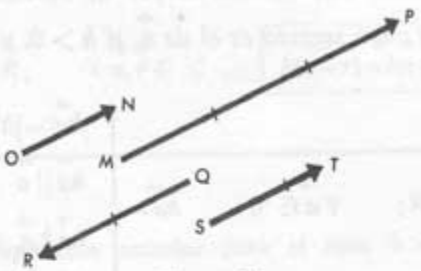


Figura 5.1

la misma dirección y sentido que el $\overrightarrow{ON}$, pero su módulo es tres veces el de $\overrightarrow{ON}$, es decir,

$$|\overrightarrow{MP}| = 3\,|\overrightarrow{ON}|$$
$$\overrightarrow{MP} \,||\, \overrightarrow{ON}$$
$$\overrightarrow{MP} \uparrow \overrightarrow{ON}$$

para expresar lo cual escribimos

$$\{\{\overrightarrow{MP}\}\} = 3\,\{\{\overrightarrow{ON}\}\}$$

y decimos que *el producto del número real 3 por el vector libre* $\{\{\overrightarrow{ON}\}\}$ *es el vector libre* $\{\{\overrightarrow{MP}\}\}$

• EJEMPLO 5.2 En la misma figura 5.1 se tiene

$$|\overrightarrow{QR}| = 2\,|\overrightarrow{ON}|; \qquad \overrightarrow{QR} \,||\, \overrightarrow{ON}; \qquad \overrightarrow{QR} \downarrow \overrightarrow{ON}$$

por lo que escribimos

$$\{\{\overrightarrow{QR}\}\} = (-2)\{\{\overrightarrow{ON}\}\}$$

• EJEMPLO 5.3 En la misma figura se tiene también:

$$|\overrightarrow{ST}| = \frac{3}{2}\,|\overrightarrow{ON}|; \qquad \overrightarrow{ST} \,||\, \overrightarrow{ON}; \qquad \overrightarrow{ST} \uparrow \overrightarrow{ON}$$

por lo que escribimos

$$\{\{\overrightarrow{ST}\}\} = \frac{3}{2}\,\{\{\overrightarrow{ON}\}\}$$

• DEFINICIÓN 5.1 *Se llama producto del número real h por el vector libre $\vec{a}$ al vector libre, que representaremos por $h\vec{a}$, cuyo módulo es igual al producto del valor absoluto del número h por el módulo del vector $\vec{a}$, cuya dirección es la de $\vec{a}$ y cuyo sentido es el de $\vec{a}$, si $h > 0$, y el contrario, si $h < 0$.*

Esquemáticamente:

$$\forall\, h \in R; \qquad \forall\, \vec{a} \in \mathfrak{V}; \qquad h\vec{a} = \begin{cases} |h\vec{a}| = |h||\vec{a}| \\ h\vec{a} \parallel \vec{a} \\ h\vec{a} \uparrow \vec{a}, \text{ si } h > 0 \\ h\vec{a} \downarrow \vec{a}, \text{ si } h < 0 \end{cases}$$

De este modo, a cada número real h y a cada vector $\vec{a}$ podemos asociar el vector $h\vec{a}$. Como

$$(h, \vec{a}) \in R \times \mathfrak{V}; \qquad h\vec{a} \in \mathfrak{V}$$

se tiene así una aplicación

$$R \times \mathfrak{V} \longrightarrow \mathfrak{V}$$

que es una *operación externa*, según indicamos en el párrafo 6 del § 13.

EJERCICIOS

5.1 Dibuje un vector fijo $\overrightarrow{OA}$ y construya representantes de cada uno de los vectores libres:

$$2\{\{\overrightarrow{OA}\}\}; \qquad -4\{\{\overrightarrow{OA}\}\}; \qquad \frac{3}{5}\{\{\overrightarrow{OA}\}\}$$

5.2 Aplique la definición 5.1 a calcular los vectores

$$1\vec{a}; \qquad (-1)\vec{a}; \qquad 0\vec{a}; \qquad h\vec{0}$$

5.3 Demuestre que

$$h(-\vec{a}) = (-h)\vec{a} = -(h\vec{a})$$

como consecuencia de la definición 5.1.

5.4 Demuestre que si $h \in N$, como consecuencia (definición 5.1), se obtiene

$$h\vec{a} = \vec{a} + \vec{a} + \overset{(h}{\ldots} + \vec{a}$$

6. Otras propiedades del producto de números reales por vectores

• PROPOSICIÓN 6.1:

$$\forall h \in R; \quad \forall \vec{n}, \vec{r} \in \mathfrak{V} \qquad \boxed{h(\vec{n}+\vec{r}) = h\vec{n} + h\vec{r}}$$

EJERCICIOS

6.1 **Demuestre la proposición anterior para el caso $h > 0$, con ayuda de la figura 6.1, en la cual**

$$\overrightarrow{ON} \in \vec{n}; \quad \overrightarrow{NR} \in \vec{r}; \quad \overrightarrow{ON'} \in h\vec{n}; \quad \overrightarrow{N'R'} \in h\vec{r}$$

teniendo en cuenta la semejanza de los triángulos $\overset{\triangle}{ONR}$ y $\overset{\triangle}{ON'R'}$.

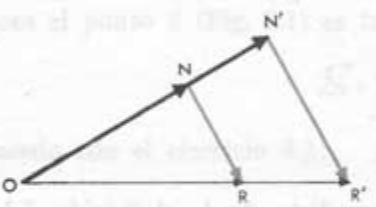


Figura 6.1

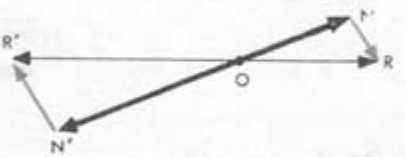


Figura 6.2

6.2 **Demuestre la proposición 6.1 para el caso $h < 0$, repitiendo lo indicado en el ejercicio anterior, pero sustituyendo la figura 6.1 por la 6.2.**

6.3 **Demuestre la proposición 6.1 para $h = 0$.**

• PROPOSICIÓN 6.2:

$$\forall h, k \in R; \quad \forall \vec{n} \in \mathfrak{V} \qquad \boxed{(h+k)\vec{n} = h\vec{n} + k\vec{n}}$$

• PROPOSICIÓN 6.3:

$$\forall h, k \in R; \quad \forall \vec{n} \in \mathfrak{V} \qquad \boxed{h(k\vec{n}) = (hk)\vec{n}}$$

EJERCICIOS

6.4 **Demostrar la proposición 6.2, para los distintos signos posibles de h y k. Utilice la definición 5.1.**

6.5 **Demostrar la proposición 6.3.**

• PROPOSICIÓN 7.1: *Si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son dos vectores de la misma dirección, existe un número real h, tal que*

$$h\vec{a}=\vec{b}$$

Esquemáticamente:

$$\vec{a} \,||\, \vec{b} \Longrightarrow \exists\, h \in R; \qquad h\vec{a}=\vec{b}$$

Demostración:

Si $\vec{a} \uparrow \vec{b}$, basta hacer

$$h=\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$$

Si $\vec{a} \downarrow \vec{b}$, basta hacer

$$h=-\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$$

Ahora la demostración es consecuencia inmediata de la definición 5.1.

DEFINICIÓN 7.1 *Diremos que el vector $\vec{b}$ es proporcional al vector $\vec{a}$ si existe un número real h, tal que*

$$h\vec{a}=\vec{b}$$

EJERCICIOS

7.1 Demostrar que si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son dos vectores de la misma dirección, cada uno de ellos es proporcional al otro.

7.2 Demuestre que el vector cero es proporcional a cualquier vector.

7.3 Si $\vec{a} \neq \vec{0}$, ¿es $\vec{a}$ proporcional al vector cero?

7.4 Demostrar que si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son dos vectores no nulos de distinta dirección, entonces ninguno de ellos es proporcional al otro.

• EJEMPLO 7.1 Sean $\vec{n}$ y $\vec{r}$ dos vectores no nulos de distinta dirección. Tra-

temos de construir el vector

$$2\vec{n}+3\vec{r}$$

Para ello, elijamos un punto O del plano. Sean

$$\overrightarrow{ON}\in\vec{n};\qquad \overrightarrow{OR}\in\vec{r};\qquad \overrightarrow{ON'}\in 2\vec{n};\qquad \overrightarrow{OR'}\in 3\vec{r}$$

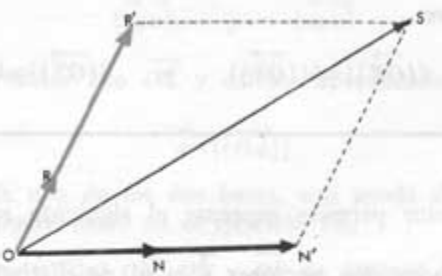


Figura 7.1

Entonces el punto S (Fig. 7.1) es tal que

$$2\vec{n}+3\vec{r}=\{\{\overrightarrow{OS}\}\}$$

de acuerdo con el ejercicio 4.3:

EJERCICIOS

7.5 Dibuje sobre el plano dos vectores fijos $\overrightarrow{OR}$ y $\overrightarrow{ON}$ y construya representantes de cada uno de los vectores:

$$5\{\{\overrightarrow{ON}\}\}+3\{\{\overrightarrow{OR}\}\};\qquad 2\{\{\overrightarrow{ON}\}\}-3\{\{\overrightarrow{OR}\}\};$$

$$\frac{2}{3}\{\{\overrightarrow{ON}\}\}+\{\{\overrightarrow{OR}\}\};\qquad -\frac{4}{3}\{\{\overrightarrow{OR}\}\}$$

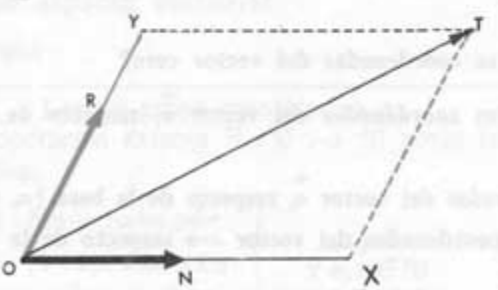


Figura 7.2

7.6 Demostrar que dados dos vectores fijos no nulos $\overrightarrow{ON}$ y $\overrightarrow{OR}$, de distinta direc-

ción, y el vector fijo $\overrightarrow{OT}$, pueden encontrarse dos números reales, h y k, tales que

$$\{\{\overrightarrow{OT}\}\}=h\{\{\overrightarrow{ON}\}\}+k\{\{\overrightarrow{OR}\}\}$$

ayudándose de la figura 7.2, donde

$$\overline{TX}\,||\,\overline{OR} \quad \text{y} \quad \overline{TY}\,||\,\overline{ON}$$

y observando que

$$\{\{\overrightarrow{OX}\}\}=h\{\{\overrightarrow{ON}\}\} \quad \text{y} \quad \{\{\overrightarrow{OY}\}\}=k\{\{\overrightarrow{OR}\}\}$$

El ejercicio anterior permite expresar el siguiente resultado:

• TEOREMA 7.2 *Dados dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, de distinta dirección, cualquier otro vector $\vec{a}$ puede expresarse en la forma*

$$\vec{a}=x\vec{u}+y\vec{v}$$

donde x e y son dos números reales.

Por poderse expresar el vector $\vec{a}$ de este modo, se dice que *el vector $\vec{a}$ es una combinación lineal de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.*

Los números x e y son únicos para cada vector $\vec{a}$. Por ello, se dice que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ forman una *base* del plano vectorial.

Este par de números (x, y) se llaman las *coordenadas* del vector $\vec{a}$, respecto de la base $\{\vec{u}, \vec{v}\}$.

EJERCICIOS

7.7 ¿Cuáles son las coordenadas del vector cero?

7.8 ¿Cuáles son las coordenadas del vector $\vec{u}$, respecto de la base $\{\vec{u}, \vec{v}\}$? ¿Y las de $\vec{v}$?

7.9 Si las coordenadas del vector $\vec{a}$, respecto de la base $\{\vec{u}, \vec{v}\}$, son (x, y). ¿Cuáles serán las coordenadas del vector $-\vec{a}$ respecto de la misma base? ¿Y las del vector $h\vec{a}$?

7.10 Si las coordenadas del vector $\vec{a}$ son (x, y) y las del vector $\vec{b}$ son (s, t) respecto de la misma base, ¿cuáles serán las coordenadas del vector $\vec{a}+\vec{b}$?

Resuélvalo algebraicamente, teniendo en cuenta las proposiciones del párrafo 6 y construya después una figura que visualice el resultado obtenido.

7.11 Dibuje cuatro vectores fijos $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$, $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{OQ}$ de distintas direcciones. Considere los vectores libres

$$\vec{u}=\{\{\overrightarrow{OM}\}\};\quad \vec{v}=\{\{\overrightarrow{ON}\}\};\quad \vec{w}=\{\{\overrightarrow{OP}\}\};\quad \vec{z}=\{\{\overrightarrow{OQ}\}\}$$

Se han formado así dos bases

$$\{\vec{u}, \vec{v}\} \quad \text{y} \quad \{\vec{w}, \vec{z}\}$$

Considere otro vector fijo $\overrightarrow{OA}$ y calcule aproximadamente las coordenadas del vector

$$\vec{a}=\{\{\overrightarrow{OA}\}\}$$

respecto de cada una de las dos bases, con ayuda de una reglita graduada en milímetros. Opere como en el ejercicio 7.6.

7.12 Dibuje tres vectores fijos $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$ y $\overrightarrow{OP}$ de distinta dirección. Considere los vectores libres

$$\vec{u}=\{\{\overrightarrow{OM}\}\};\quad \vec{v}=\{\{\overrightarrow{ON}\}\};\quad \vec{w}=\{\{\overrightarrow{OP}\}\}$$

Considere otro vector fijo $\overrightarrow{OA}$ y el vector libre que determina

$$\vec{a}=\{\{\overrightarrow{OA}\}\}$$

y trate de encontrar tres números reales (x, y, z), tales que

$$\vec{a}=x\vec{u}+y\vec{v}+z\vec{w}$$

comprobando que los números reales (x, y, z) no son únicos, sino que pueden elegirse de diversos modos.

Nota: Los vectores $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ no forman una base, pues aunque cualquier vector $\vec{a}$ puede expresarse como combinación lineal de ellos, los números (x, y, z) no son únicos para cada vector $\vec{a}$.

---

8. Concepto de espacio vectorial

Para expresar que

- $(\mathfrak{V}, +)$ es un grupo conmutativo, y
- la operación externa $R \times \mathfrak{V} \longrightarrow \mathfrak{V}$ posee las propiedades:

I)	$h(\vec{n}+\vec{r})=h\vec{n}+h\vec{r}$	$\forall \vec{n}, \vec{r} \in \mathfrak{V}$
II)	$(h+k)\vec{n}=h\vec{n}+k\vec{n}$	$\forall h, k \in R$
III)	$h(k\vec{n})=(hk)\vec{n}$	
IV)	$1\vec{n}=\vec{n}$	

se dice que

> • $\mathcal{V}$ *es un espacio vectorial sobre el cuerpo* R, de los números reales, o bien que $\mathcal{V}$ *es un* R*-espacio vectorial.*

lo que se generaliza así:

DEFINICIÓN 8.1 *Se dice que* W *es un espacio vectorial sobre el cuerpo* K, *si*

a) *En* W *se ha definido una operación* $+$, *que le da estructura de grupo conmutativo.*

b) *Se ha definido una aplicación*

$$K \times W \longrightarrow W$$

que posee las cuatro propiedades siguientes:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I)} & k_1(w_1+w_2)=k_1w_1+k_1w_2 \\ \text{II)} & (k_1+k_2)w_1=k_1w_1+k_2w_1 \\ \text{III)} & k_1(k_2w_1)=(k_1k_2)w_1 \\ \text{IV)} & 1w_1=w_1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \forall\, k_1,\ k_2 \in K \\ \forall\, w_1, w_2 \in W \end{array}$$

También puede decirse que W es un K-espacio vectorial.

EJERCICIOS

8.1 **Comprobar que el conjunto C, de los números complejos, es un espacio vectorial sobre el cuerpo R, de los números reales. Para ello considere en C la operación suma de complejos y como operación externa considere el producto habitual de complejos, ya que $R \subset C$.**

8.2 **Compruebe que $\{1, i\}$ es una base del espacio vectorial del ejercicio anterior.**

8.3 **Compruebe que el conjunto Q, de los números racionales, es un espacio vectorial sobre el mismo cuerpo Q.**

8.4 **Compruebe que cualquier número racional no nulo constituye una base del espacio vectorial del ejercicio anterior.**

8.5 **Compruebe que el conjunto de los polinomios en una indeterminada, de grado menor que 3, y con coeficientes racionales es un espacio vectorial sobre el cuerpo Q.**

8.6 **Comprobar que $\{1, x, x^2\}$ es una base del espacio vectorial del ejercicio anterior.**

---

9. Un ejemplo de espacios vectoriales isomorfos

Llamaremos *matrices* a las parejas ordenadas de números reales. Por tanto,

$$(2, 3); \quad (\sqrt{2}, 1); \quad (4, 0); \quad (-2, 5); \quad \left(7, \frac{2}{3}\right)$$

son ejemplos de matrices. El conjunto de estas matrices será el conjunto producto $R \times R$. Designaremos por $\mathcal{M}$ el conjunto de estas matrices.

Se define la *igualdad de matrices* de la forma siguiente:

$$(a, b) = (r, s) \underset{\text{def}}{\iff} \begin{cases} a = r \\ b = s \end{cases}$$

EJERCICIO

9.1 Determinar los números reales x e y, tales que

$$(2, x) = (y, -\sqrt{3})$$

Se define la *suma de matrices* de la forma siguiente:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

EJERCICIO

9.2 Demostrar que la suma así definida da al conjunto $\mathcal{M}$, de estas matrices, estructura de grupo conmutativo.

Definamos el producto de un número real h por una matriz (a, b) de la forma siguiente:

$$h(a, b) = (ha, hb)$$

Se tiene así una aplicación de

$$R \times \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$$

es decir, una operación externa.

EJERCICIO

9.3 Demostrar que la operación externa, que acaba de definirse, verifica las cuatro propiedades que permiten afirmar que $\mathcal{M}$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo R, de los números reales.

En el párrafo 7 vimos que cada vector $\vec{a} \in \mathcal{V}$ podía expresarse como combinación lineal de los vectores de la base $\vec{u}, \vec{v}$:

$$\vec{a} = x\vec{u} + y\vec{v}$$

Consideremos ahora la aplicación

$$\mathcal{V} \xrightarrow{f} \mathcal{M}$$

que asocia a cada vector

$$\vec{a} = x\vec{u} + y\vec{v}$$

la matriz (x, y) de sus coordenadas respecto de esa base.

EJERCICIOS

9.4 Demostrar, con ayuda del ejercicio 7.10, que la aplicación $f: \mathcal{V} \to \mathcal{M}$, que acaba de definirse, es un homomorfismo de $(\mathcal{V}, +)$ en $(\mathcal{M}, +)$.

9.5 Demostrar que la aplicación $f: \mathcal{V} \to \mathcal{M}$ es inyectiva y suprayectiva.

9.6 ¿Es $f: \mathcal{V} \to \mathcal{M}$ un isomorfismo del grupo $(\mathcal{V}, +)$ en el $(\mathcal{M}, +)$?

9.7 Demostrar que la aplicación $f: \mathcal{V} \to \mathcal{M}$ verifica la siguiente condición:

$$f(h\vec{a}) = hf(\vec{a})$$

cualesquiera que sean el número real h y el vector $\vec{a}$. Ayúdese de la última parte del ejercicio 7.9.

Para expresar que la aplicación:

$$f: \mathcal{V} \to \mathcal{M}$$

verifica las dos condiciones siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} f(\vec{a}+\vec{b})=f(\vec{a})+f(\vec{b}) \\ f(h\vec{a})=hf(\vec{a}) \end{array}\right\} \quad \forall\, \vec{a},\vec{b}\in \mathfrak{V};\quad \forall\, h\in R$$

se dice que la aplicación f *es un homomorfismo* del R-espacio vectorial $\mathfrak{V}$ en el R-espacio vectorial $\mathfrak{W}$.

Como, además, f es una biyección, diremos que es un *isomorfismo* del R-espacio vectorial $\mathfrak{V}$ en el $\mathfrak{W}$.

EJERCICIO

9.8 Compare la definición de homomorfismo de espacios vectoriales con las definiciones de homomorfismo de grupos y de anillos, observando que una aplicación se llama homomorfismo, respecto de una cierta estructura, de grupo, anillo, etc., cuando conserva las operaciones de definición de esa estructura. Especifique en cada caso.

Si se desea ampliar este estudio de espacios vectoriales puede consultarse el primer capítulo de:

P. ABELLANAS: *Geometría Básica*. Madrid, 1961.

o bien:

PAPY: *Mathematique Moderne 6*. Ed. Didier, Bruxelles, 1966.

10. Uso de magnitudes no escalares en la Escuela

Una de las posibles situaciones que pueden ser utilizadas para introducir la necesidad de una orientación en los segmentos, esto es, el paso del segmento al segmento orientado o vector, es la que se describe a continuación, que constituye a su vez un ejercicio práctico elemental de estructura vectorial.

En el mapa de la figura 10.1 está representado el segmento cuyos extremos son Madrid y Barcelona. Representemos abreviadamente a Madrid por su letra

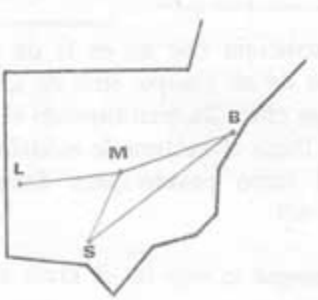


Figura 10.1

inicial M y a Barcelona por B. Este segmento puede escribirse de dos modos

$$\overline{MB} \quad \text{o bien} \quad \overline{BM}$$

Supongamos un avión que hace este recorrido diariamente. El avión puede partir de M para llegar a B, o bien salir de B para llegar a M, lo que lleva a considerar dos sentidos de recorrido del segmento cuyos extremos son M y B. Para expresar que el avión ha partido de M para llegar a B podemos convenir en escribir $\overrightarrow{MB}$ y para expresar que el avión sale de B y llega a M puede escribirse $\overrightarrow{BM}$. El punto de donde sale el avión es el origen y aquel al que llega el extremo.

La equipolencia de vectores fijos puede materializarse disponiendo flechas recortadas de cartulina, como indica la figura 10.2.

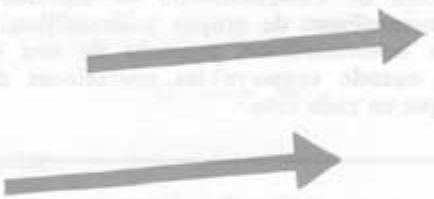


Figura 10.2

La suma de vectores puede introducirse a partir de la figura 10.1, donde para desplazarse de S (Sevilla) a B pueden utilizarse dos aviones sucesivamente. En el primero se va de S a M y en el segundo de M a B.

De vector opuesto puede dar idea un viaje de ida comparado con el de vuelta.

El producto de números por vectores puede reducirse al producto de números enteros por vectores, que puede definirse como se sugiere a continuación:

$$3\vec{a} = \vec{a} + \vec{a} + \vec{a}$$

$$(-4)\vec{a} = 4(-\vec{a}) = (-\vec{a}) + (-\vec{a}) + (-\vec{a}) + (-\vec{a})$$

Se obtiene así una estructura que no es la de espacio vectorial, pues no se multiplica por números de un cuerpo, sino de un anillo, el anillo Z de los enteros. A la estructura así obtenida, sustituyendo el cuerpo K por un anillo A, en la definición 8.1, se le llama estructura de *módulo*, lo que explica el término *semimódulo*, utilizado el curso pasado para describir una estructura más simple.

GRUPO DE LOS MOVIMIENTOS 17

1. Transformaciones geométricas

Sea e una recta del plano. Designemos por Π al conjunto de puntos del plano. Sea P un punto del plano, es decir, sea

$$P \in \Pi$$

Consideremos la recta r, que pasa por P y es perpendicular a la recta e (figura 1.1), es decir, sea

$$P \in r; \quad r \perp e$$

Designemos por E al punto de intersección de la recta r con la recta e, es decir, sea

$$r \cap e = E$$

Figura 1.1

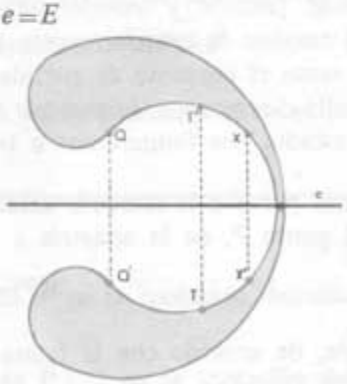


Figura 1.2

Sea P' el otro punto de la recta r, tal que el segmento fijo $\overline{P'E}$ sea igual al $\overline{EP}$, es decir, sea

$$P' \in r; \quad \overrightarrow{P'E} \sim \overrightarrow{EP}$$

El punto P', así obtenido, se dice simétrico del P respecto a la recta e. En la figura 1.2 se muestran los puntos Q', T' y X', simétricos respectivos de los puntos Q, T y X, respecto de la recta e.

EJERCICIOS

1.1 ¿Qué podemos afirmar de la recta e respecto del segmento $\overline{PP'}$ en la figura 1.1?

1.2 ¿Cuál es el simétrico del punto P' en la figura 1.1? Generalice el resultado obtenido?

1.3 Si el punto $H \in e$, ¿cuál será el simétrico de H, respecto de la recta e?

1.4 Dibuje un cuadrado $ABCD$ y construya la figura simétrica del triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$ respecto de la recta que pasa por el punto D y es paralela a la diagonal AC del cuadrado.

Para cada punto $X \in \Pi$ se tiene, pues, un punto $X' \in \Pi$, su simétrico respecto de la recta e. Estamos, por tanto, ante una aplicación que asocia a cada punto, X, del plano, otro punto, X', del plano, es decir, ante una aplicación

$$\Pi \longrightarrow \Pi$$

Esta aplicación se llama *simetría axial* de eje la recta e, o bien *simetría respecto de la recta e*.

Ya indicamos anteriormente, al estudiar correspondencias, que los términos *correspondencia, función* y *transformación* son *sinónimos*. No obstante, suele reservarse el nombre de *transformación geométrica* para aquellas correspondencias en que tanto el conjunto de partida como el de llegada son conjuntos de puntos. Por ello diremos que *la simetría axial es una transformación geométrica*. En nuestro estudio nos limitaremos a transformaciones que sean aplicaciones.

Designemos por s a la simetría axial de eje e. Para expresar que el transformado del punto P, en la simetría s (fig. 1.1), es el punto P', escribiremos

$$s(P) = P'$$

Análogamente, de acuerdo con la figura 1.2, escribiremos

$$s(Q) = Q'; \qquad s(T) = T'; \qquad s(X) = X'; \qquad s(X') = X$$

Vamos ahora a estudiar otra transformación geométrica. Consideremos un vector fijo $\overrightarrow{AB}$. Sea X un punto del plano. Consideremos el vector fijo de origen el punto X y equipolente al $\overrightarrow{AB}$. Sea X' su extremo. De este modo

a cada punto $X \in \Pi$ le asociamos un punto $X' \in \Pi$, tal que

$$\overrightarrow{XX'} \sim \overrightarrow{AB}$$

Se trata, pues, de una aplicación de

$$\Pi \longrightarrow \Pi$$

es decir, de una transformación geométrica. Esta transformación geométrica

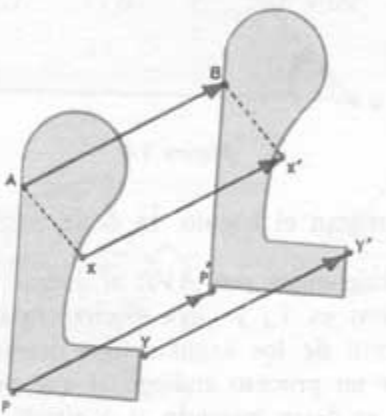


Figura 1.3

se llama *traslación*. Se trata de la *traslación definida por el vector* $\{\{\overrightarrow{AB}\}\}$. Si designamos por t a esta traslación, se tendrá, de acuerdo con la figura 1.3

$$t(X)=X'; \qquad t(Y)=Y'; \qquad t(P)=P'$$

es decir, el transformado del punto X, en la traslación t, es el punto X', etc.

EJERCICIOS

1.5 **¿Cuál es el transformado del punto A en la traslación definida por el vector $\{\{\overrightarrow{AB}\}\}$?**

1.6 **¿Cuál es el transformado del punto $P \in \Pi$ en la traslación definida por el vector cero?**

1.7 **Dibuje un cuadrado $ABCD$, en que AC es una diagonal, y construya la figura transformada de dicho cuadrado, en la traslación definida por el vector $\{\{\overrightarrow{AC}\}\}$.**

Terminemos este párrafo considerando una tercera transformación geométrica, pero hemos de hacer antes unas consideraciones previas.

Tengamos tres puntos del plano, A, V y B, no alineados, y consideremos las dos semirrectas V_A y V_B. Estas dos semirrectas constituyen el borde del ángulo fijo, rayado en rojo en la figura 1.4. En este ángulo fijo podemos considerar dos orientaciones, para lo cual basta considerar un orden en las

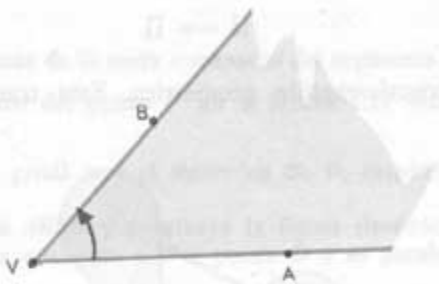


Figura 1.4

dos semirrectas que bordean el ángulo, es decir, una semirrecta origen y una semirrecta extremo. Designemos por $\overset{\frown}{AVB}$ al ángulo fijo orientado de vértice V cuya semirrecta origen es V_A y cuya semirrecta extremo es V_B. Ahora se puede pasar del conjunto de los ángulos fijos orientados al conjunto de los *ángulos orientados*, por un proceso análogo al que permitió pasar de vectores fijos a vectores libres, es decir, pasando al conjunto cociente respecto de una relación de equivalencia, que en este caso llamaremos «igualdad de ángulos orientados» y designaremos por el signo $=$.

Nota 1.1: El estudio de esta relación de equivalencia que permite pasar a tal conjunto cociente es complicado y no lo haremos. Si se desea, puede estudiarse en el libro: G. CHOQUET: *L'enseignement de la Géométrie*, ed. Hermann. París, 1964.

Nota 1.2: Suele llamarse positivo al sentido contrario a aquel en que se mueven las agujas de un reloj.

EJERCICIOS

1.8 Defina el concepto de ángulos orientados fijos «consecutivos» de modo análogo a como se definió el concepto de vectores fijos «consecutivos». Ponga ejemplos.

1.9 Defina la adición de ángulos orientados. Ponga ejemplos.

1.10 Compruebe que $\{\{\overset{\frown}{AVA}\}\}$ es el elemento neutro respecto de la adición de ángulos orientados.

1.11 Compruebe que $\{\{\overset{\frown}{BVA}\}\}$ es el simétrico de $\{\{\overset{\frown}{AVB}\}\}$.

Nota 1.3: La adición da al conjunto de los ángulos orientados estructura de grupo conmutativo.

Consideremos un punto O del plano y un ángulo fijo orientado $\overset{\frown}{AVB}$. Construyamos un ángulo orientado cuya semirrecta origen sea O_P e igual al $\overset{\frown}{AVB}$ (igual en el sentido de relacionado, en la relación de equivalencia citada anteriormente). Sea a la semirrecta extremo de dicho ángulo orientado fijo (fig. 1.5). Consideremos un punto P' en la semirrecta a, tal que el segmento $\overline{OP'}$ sea igual al $\overline{OP}$. Hemos pasado así del punto P al punto P', tal que

$$\overset{\frown}{POP'} = \overset{\frown}{AVB} \quad \text{y} \quad \overline{OP'} = \overline{OP}$$

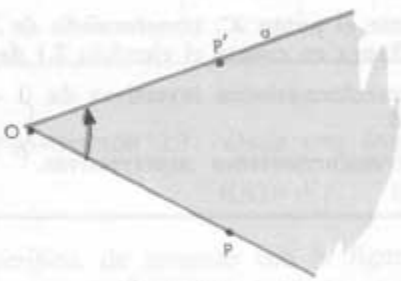


Figura 1.5

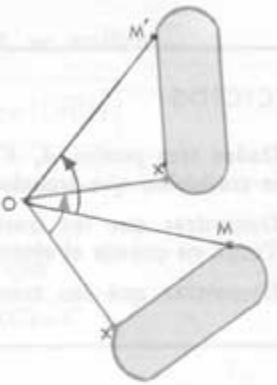


Figura 1.6

A esta transformación geométrica se le llama *giro de centro O y amplitud* $\{\{\overset{\frown}{AVB}\}\}$. Si designamos por g a esta transformación, se tendrá, de acuerdo con la figura 1.6

$$g(M) = M'$$
$$g(X) = X'$$

EJERCICIOS

1.12 **Haga un dibujo para mostrar que dados un punto O y un punto P, distinto de O, existen dos puntos P', tales que**

$$\overline{OP'} = \overline{OP} \quad \text{y} \quad \{\{\overset{\frown}{POP'}\}\} = 1 \text{ recto}$$

1.13 **Fijado un punto P, construir su transformado en un giro de amplitud 180°.**

1.14 **Dibuje un cuadrado $OABC$ y construya la figura transformada del triángulo $\overset{\frown}{OAB}$ en el giro de centro O, que transforma el punto A en el punto C.**

Además de los giros, traslaciones y simetrías axiales, existen otras transformaciones geométricas importantes, pero por ahora nos limitaremos a éstas. Pasemos a estudiar más detenidamente cada una de estas transformaciones.

2. Traslaciones; propiedades

• DEFINICIÓN 2.1: *Dado un vector libre* $\vec{a}$, *se llama traslación del vector* $\vec{a}$, *a la transformación que asocia a cada punto X el punto X', tal que*

$$\overrightarrow{XX'} \in \vec{a}$$

EJERCICIOS

2.1 Dados tres puntos *A*, *A'* y *X*, determinar el punto *X'*, transformado de *X*, en la traslación que transforma *A* en *A'*. Tenga en cuenta el ejercicio 2.1 del §16.

2.2 Demostrar que las traslaciones son transformaciones inyectivas de Π en Π. Tenga en cuenta el ejercicio 3.6 del §16.

2.3 Demostrar que las traslaciones son transformaciones suprayectivas.

De los dos últimos ejercicios se deduce el siguiente resultado:

• PROPOSICIÓN 2.1: *Las traslaciones son transformaciones biyectivas.*

• PROPOSICIÓN 2.2: *Dada una traslación t, se verifica* (fig. 2.1):

$$\left.\begin{array}{l} t(A)=A' \\ t(B)=B' \end{array}\right\} \Longrightarrow \overline{A'B'}=\overline{AB}$$

cualesquiera que sean $A, B \in \Pi$.

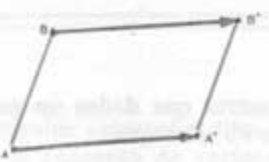


Figura 2.1

EJERCICIO

2.4 Demostrar la proposición anterior. Haga uso del ejercicio 2.16 del §16.

Del ejercicio anterior se deduce que

$$|\overrightarrow{A'B'}| = |\overrightarrow{AB}|$$

es decir, la medida del segmento $\{\{\overline{A'B'}\}\}$ es igual a la del $\{\{\overline{AB}\}\}$, por lo que diremos que las traslaciones son *isometrías*. En general, las transformaciones que verifican el enunciado de la proposición 2.2 se llaman isometrías.

EJERCICIO

2.5 Demostrar que dados tres puntos A, B, $C \in \Pi$, se verifica:

$$B \in \overline{AC} \iff \{\{\overline{AB}\}\}+\{\{\overline{BC}\}\}=\{\{\overline{AC}\}\}$$

• PROPOSICIÓN 2.3: *Dada una traslación t, en que*

$$t(A)=A'; \qquad t(B)=B'; \qquad t(C)=C'$$

se verifica, de acuerdo con la figura 2.2,

$$A, B \text{ y } C \text{ están alineados} \implies A', B' \text{ y } C' \text{ están alineados}$$

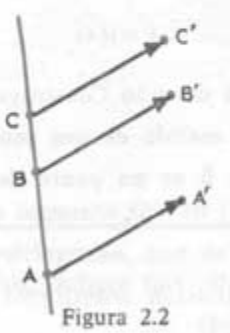


Figura 2.2

EJERCICIO

2.6 Demostrar que la proposición 2.3 sigue del ejercicio 2.5 y de la proposición 2.2.

• PROPOSICIÓN 2.4: *La transformada de una recta en una traslación es otra recta paralela a aquélla* (fig. 2.3).

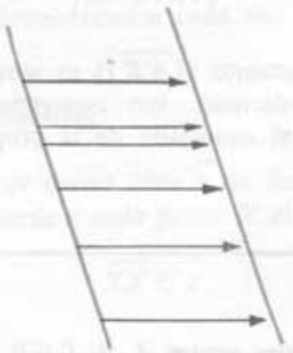


Figura 2.3

EJERCICIOS

2.7 Demostrar la proposición anterior.

2.8 Dada una traslación t, tal que

$$t(A)=A'$$

¿cuál es la transformada de la recta $r||\overline{AA'}$, en la traslación t? Haga una figura.

2.9 Demostrar que una traslación t transforma una semirrecta, de origen A, en otra semirrecta, paralela a la anterior, del mismo sentido y de origen el punto

$$A'=t(A)$$

Haga uso del ejercicio 2.16 del § 16. Construya la figura correspondiente.

Nota: Se entiende por sentido de una semirrecta de origen A al sentido del vector fijo $\overrightarrow{AB}$, donde B es un punto de la semirrecta distinto del A.

• PROPOSICIÓN 2.5: *Una traslación transforma un ángulo fijo en otro ángulo fijo igual a aquél* (fig. 2.4).

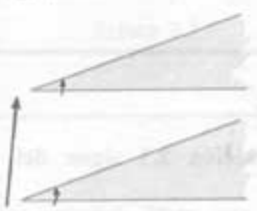


Figura 2.4

EJERCICIO

2.10 Demostrar la proposición anterior.

• PROPOSICIÓN 2.6: *Un ángulo fijo y su transformado en la traslación tienen el mismo sentido.*

Nota 2.1: La demostración de esta proposición requeriría tener en cuenta la relación de igualdad indicada en la nota 1.1, pero basta observar la figura 2.4 para comprender intuitivamente su significado.

EJERCICIOS

2.11 Haga un dibujo que muestre cómo un triángulo se transforma, en una traslación, en otro triángulo igual. Demuéstrelo.

2.12 Demuestre que una traslación transforma un círculo en otro del mismo radio y cuyo centro es el transformado del centro de aquél, de acuerdo con la figura 2.5.

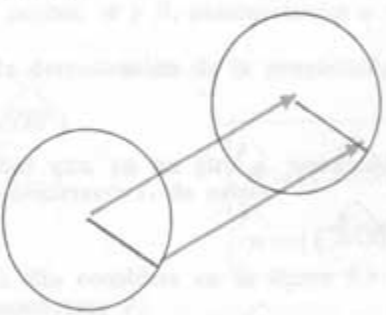


Figura 2.5

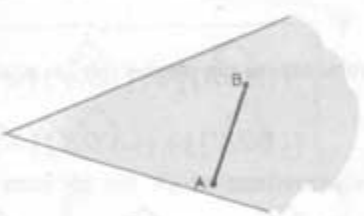


Figura 2.6

2.13 Dados un ángulo fijo y un segmento fijo AB (Fig. 2.6), construir, ayudándose de una traslación, un paralelogramo, uno de cuyos lados sea $\overline{AB}$ y tal que cada uno de sus otros dos vértices esté situado en uno de los lados del ángulo dado.

3. Giros; propiedades

• DEFINICIÓN 3.1: *Dados un punto O y un ángulo orientado $\overset{\frown}{\alpha}$, se llama giro de centro O y amplitud $\overset{\frown}{\alpha}$ a la transformación que asocia a cada punto X del*

plano el punto X', tal que

$$a)\ \overline{OX'} = \overline{OX}$$

$$b)\ \widehat{XOX'} \in \alpha$$

• PROPOSICIÓN 3.1: *Los giros son transformaciones biyectivas.*

EJERCICIOS

3.1 Demostrar la proposición anterior.

3.2 ¿Cuál es el punto transformado del centro de giro, en un giro?

• PROPOSICIÓN 3.2: *Los giros son isometrías.*

Demostración:

Se ha de probar que, para cualquier giro g, se verifica:

$$\left.\begin{array}{l} g(A) = A' \\ g(B) = B' \end{array}\right\} \Longrightarrow \overline{A'B'} = \overline{AB}$$

de acuerdo con la figura 3.1. En efecto:

$$\left.\begin{array}{l} \{\{\widehat{AOB}\}\} + \{\{\widehat{BOA'}\}\} = \{\{\widehat{AOA'}\}\} = \alpha \\ \{\{\widehat{BOA'}\}\} + \{\{\widehat{A'OB'}\}\} = \{\{\widehat{BOB'}\}\} = \alpha \end{array}\right.$$

$$\Downarrow$$

$$\{\{\widehat{AOB}\}\} + \{\{\widehat{BOA'}\}\} = \{\{\widehat{BOA'}\}\} + \{\{\widehat{A'OB'}\}\}$$

$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \{\{\widehat{AOB}\}\} = \{\{\widehat{A'OB'}\}\} \\ \overline{OA} = \overline{OA'} \\ \overline{OB} = \overline{OB'} \end{array}\right\} \Longrightarrow \widehat{OAB} = \widehat{OA'B'} \Longrightarrow \overline{AB} = \overline{A'B'}$$

• PROPOSICIÓN 3.3: *Los giros transforman puntos alineados en puntos alineados* (fig. 3.2).

Nota 3.1: Esta proposición, que afirma para giros lo mismo que la proposición 2.3 afirmaba para traslaciones, no necesita nueva demostración, ya que la proposición 2.3 es cierta para toda isometría, por ser consecuencia de la proposición 2.2.

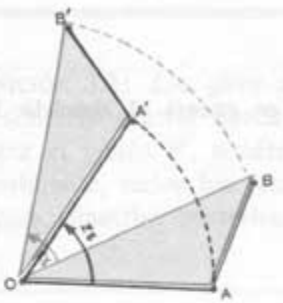


Figura 3.1

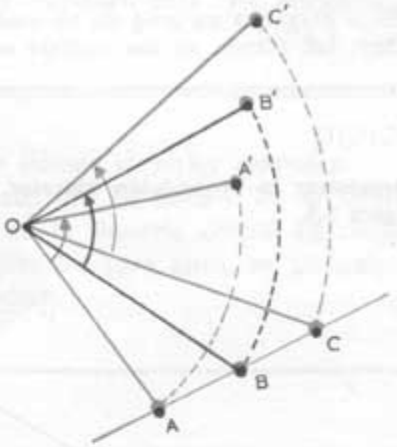


Figura 3.2

EJERCICIOS

3.3 En la figura 3.3 se muestra un giro de amplitud 60°, en el que la recta r se transforma en la r'. ¿Cuál es el ángulo que forman las rectas r y r'? Generalice este resultado. (Nótese que en la figura 3.3 se han considerado dos puntos, A y B, pertenecientes a r, para aprovechar un resultado obtenido en la demostración de la proposición 3.2, la igualdad de los triángulos $\widehat{AOB}$ y $\widehat{A'OB'}$.)

3.4 Probar que, en un giro g, una semirrecta s, de origen A, se transforma en una semirrecta s', de origen

$$A' = g(A)$$

Para ello considere en la figura 3.1 el caso de ser A_B la semirrecta s y $A'_{B'}$ la semirrecta s'.

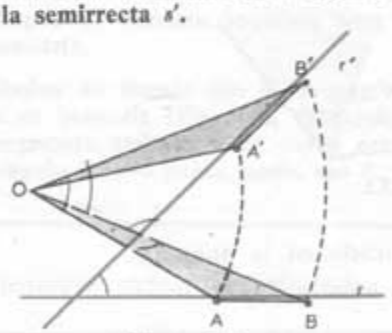


Figura 3.3

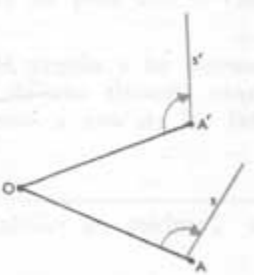


Figura 3.4

3.5 Aprovechando el ejercicio anterior, demostrar que el ángulo cuyas semirrectas bordes son A_O y s es igual a aquel cuyas semirrectas bordes son $A'_{O'}$ y s', lo que se esquematiza en la figura 3.4.

• PROPOSICIÓN 3.4: *Una traslación transforma un ángulo fijo en otro ángulo fijo igual a aquél.*

EJERCICIO

3.6 Demostrar la proposición anterior, teniendo en cuenta el ejercicio 3.5 y la figura 3.5.

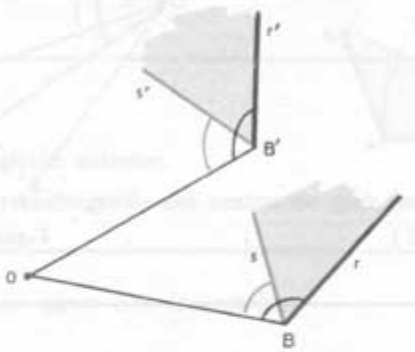


Figura 3.5

• PROPOSICIÓN 3.5: *Un ángulo fijo y su transformado en un giro tienen el mismo sentido* (fig. 3.6).

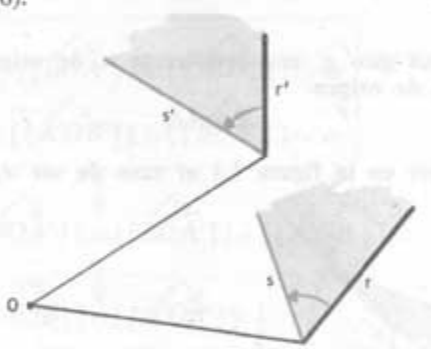


Figura 3.6

Nota: También es válido aquí lo indicado en la nota 2.1.

EJERCICIOS

3.7 Repita los ejercicios 2.11 y 2.12, sustituyendo la palabra «traslación» por «giro».

3.8 Dado un cuadrado, construya, ayudándose de un giro, un triángulo equilátero inscrito en el cuadrado y uno de cuyos vértices sea un vértice del cuadrado.

• DEFINICIÓN 3.2: *Los giros de* 180° *se llaman simetrías centrales.*

Una simetría central queda determinada por su centro. En la figura 3.7 se muestra el punto P', simétrico de P en la simetría central de centro O.

Naturalmente, todos los resultados obtenidos para giros, en general, serán válidos para simetrías centrales, en particular.

EJERCICIOS

3.9 Defina la simetría central, no como caso particular de giro, sino, de otro modo, haciendo uso de la operación «punto medio», indicada al principio del párrafo 2 del § 16.

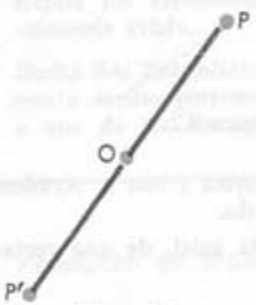


Figura 3.7

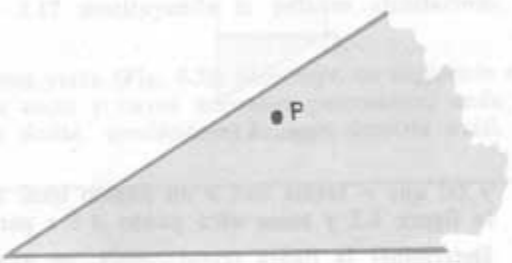


Figura 3.8

3.10 ¿Cuál es la figura transformada, en una simetría central, de una recta que pasa por el centro de simetría? Haga la figura apropiada.

3.11 Repita el ejercicio anterior, para una recta que no pasa por el centro de simetría.

3.12 Dados un ángulo fijo y un punto P, interior al ángulo y no perteneciente a su bisectriz (Fig. 3.8), construir, ayudándose de una simetría central, un segmento cada uno de cuyos extremos pertenezca a uno de los lados del ángulo y cuyo punto medio sea P.

---

4. Simetría axial; propiedades

• DEFINICIÓN 4.1: *Dada una recta e, se llama simetría axial de eje e a la transformación que asocia a cada punto X, no perteneciente a e, el punto X' tal que e sea la mediatriz del segmento* $\overline{XX'}$, *y a cada punto X de la recta e, el mismo punto X.*

• PROPOSICIÓN 4.1: *Las simetrías axiales son transformaciones biyectivas.*

• PROPOSICIÓN 4.2: *Las simetrías axiales son isometrías.*

• PROPOSICIÓN 4.3: *Las simetrías axiales transforman puntos alineados en puntos alineados.*

EJERCICIOS

4.1 **Demostrar las proposiciones 4.1, 4.2 y 4.3. Para la 4.2 razone sobre la figura 4.1.**

4.2 **Demostrar que una semirrecta s, de origen $E \in e$, se transforma, en la simetría axial de eje e, en una semirrecta s', de origen el mismo punto E**

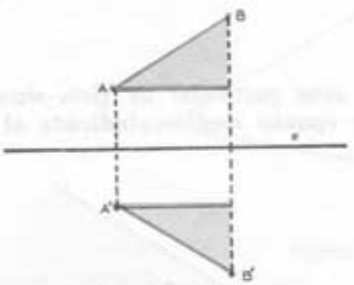


Figura 4.1

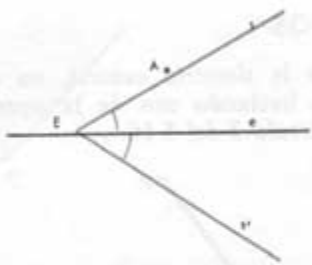


Figura 4.2

y tal que s' forma con e un ángulo igual al que forma s con e. Ayúdese de la figura 4.2 y tome otro punto $A \in s$ para probarlo.

4.3 **Determinar la figura transformada, en una simetría axial, de una recta:**
- a) **que corta al eje de simetría en un punto;**
- b) **paralela al eje de simetría;**
- c) **perpendicular al eje;**
- d) **coincidente con el propio eje de simetría.**

• PROPOSICIÓN 4.4: *Las simetrías axiales transforman un ángulo fijo en otro ángulo fijo igual a aquél.*

EJERCICIO

4.4 **Demuestre la proposición 4.4. Ayúdese del ejercicio 4.2 y de la figura 4.3, para el caso de que ninguno de los lados del ángulo sea paralelo al eje de simetría.**

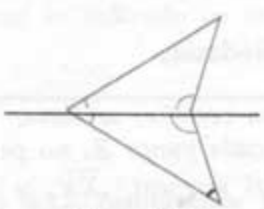


Figura 4.3

• PROPOSICIÓN 4.5: *Un ángulo fijo y su transformado en la simetría axial tienen sentidos contrarios* (Fig. 4.4).

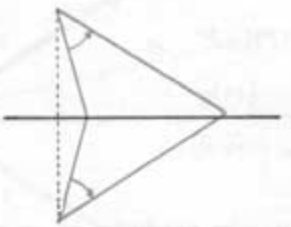


Figura 4.4

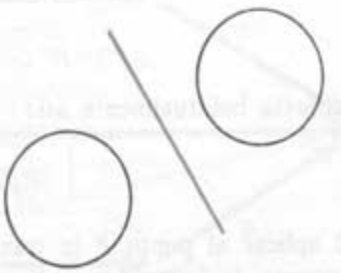


Figura 4.5

EJERCICIOS

4.5 Repita los ejercicios 2.11 y 2.12 sustituyendo la palabra «traslación» por «simetría axial».

4.6 Dadas dos circunferencias y una recta (Fig. 4.5), construya un segmento cuyo punto medio pertenezca a la recta y cuyos extremos pertenezcan cada uno a una de las circunferencias dadas, ayudándose de una simetría axial.

5. Producto de transformaciones

En la figura 5.1, el punto P se transforma, al aplicarle una traslación t, en el punto

$$t(P)=P'$$

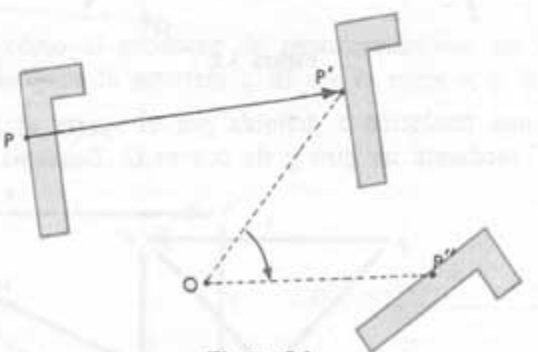


Figura 5.1

A continuación aplicamos al punto P' un giro g, de centro O, transformándose así P' en P''

$$g(P')=P''$$

por lo que podemos escribir

$$P' = t(P)$$
$$\downarrow$$
$$g(P') = P'' \Longrightarrow g[t(P)] = P''$$

lo que se abrevia habitualmente así:

$$\boxed{gt(P) = P''}$$

es decir, al aplicar al punto P la transformación producto gt, o sea, la aplicación compuesta de la traslación t y el giro g, obtenemos el punto P''.

Nótese que al escribir gt se desea expresar la transformación producto, pero efectuando en primer lugar la traslación y a continuación el giro g, de acuerdo con lo dicho cuando en el párrafo 8 del § 3 se estudió el producto de aplicaciones.

Recordemos que estamos considerando «transformación geométrica» como sinónimo de «aplicación de Π en Π».

Consideremos ahora las transformaciones de la figura 5.2, donde se pasa de P a P' por una simetría axial s, de eje la recta e. A continuación se pasa

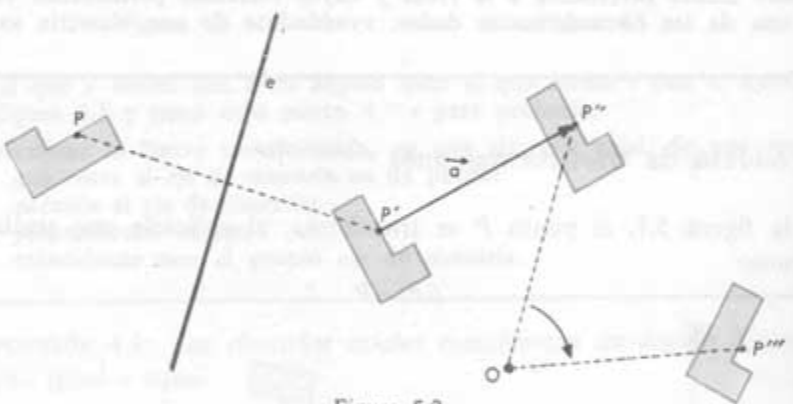
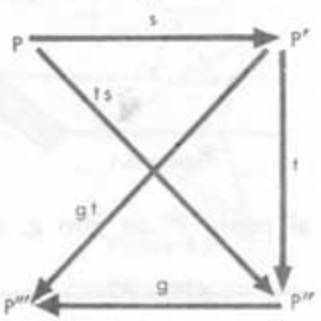
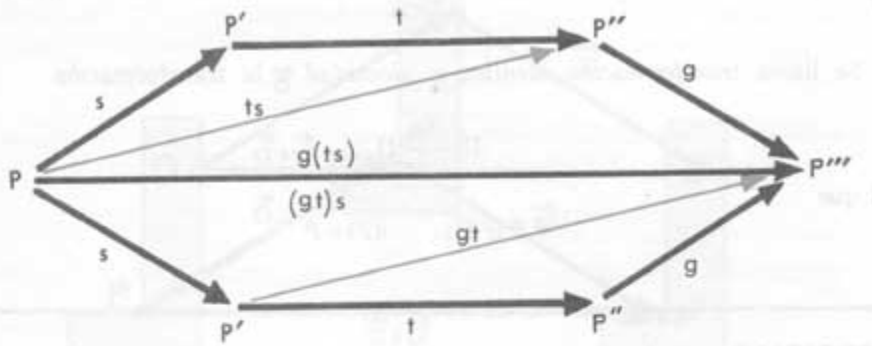


Figura 5.2

de P' a P'' por una traslación t definida por el vector $\vec{a}$, y, por último, se pasa de P'' a P''' mediante un giro g de centro O. Esquemáticamente, se tiene, pues,



es decir,



Por tanto, al aplicar al punto P la transformación

$$g(ts)$$

lo mismo que al aplicar la

$$(gt)s$$

se obtiene el mismo punto P'''. Como esto es cierto cualquiera que sea el punto $P \in \Pi$, podemos afirmar que

$$\boxed{g(ts) = (gt)s}$$

Se comprende que el razonamiento no cambia al sustituir s, t y g por otras tres transformaciones cualesquiera. Por ello podemos afirmar, en general, que *el producto de transformaciones* (y, en general, el de aplicaciones) *es asociativo*. Por tanto, *el conjunto de las transformaciones* de Π en Π, que estamos considerando, *posee estructura de semigrupo* respecto del producto de transformaciones.

Veamos ahora cómo *el producto de transformaciones no es conmutativo*, en general. Consideremos la simetría s, de eje la recta e, y la traslación t de vector $\vec{a}$ (Fig. 5.3). Se tiene:

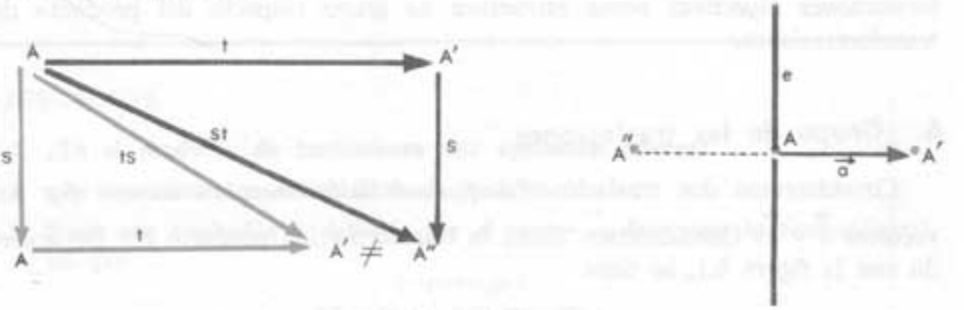


Figura 5.3

por lo que

$$st \neq ts$$

Se llama *transformación idéntica* o *identidad* a la transformación

$$\Pi \xrightarrow{i} \Pi$$

tal que

$$\forall\, P \in \Pi; \qquad i(P) = P$$

EJERCICIOS

5.1 **Compruebe que la traslación definida por el vector cero es la transformación idéntica *i*.**

5.2 **¿Cómo ha de ser un giro para que pueda afirmarse que se trata de la transformación idéntica?**

5.3 **En los dos ejercicios anteriores hemos visto cómo la transformación idéntica podía considerarse como caso particular de traslación y de giro, respectivamente. Pero, ¿puede considerarse a la transformación idéntica como caso particular de simetría axial?**

5.4 **Busque otro ejemplo para mostrar que el producto de transformaciones no es conmutativo, en general.**

5.5 **Demuestre que cualquiera que sea la transformación *f* se verifica**

$$if = f = fi$$

5.6 **¿Es biyectiva la transformación *i*?**

5.7 **Dada una transformación biyectiva *b*, compruebe que su correspondencia inversa, b^{-1}, verifica**

$$b^{-1}b = i = bb^{-1}$$

Los dos últimos ejercicios permiten afirmar que *el conjunto de las transformaciones biyectivas posee estructura de grupo* respecto del producto de transformaciones.

6. Grupo de las traslaciones

Consideremos dos traslaciones t y t', definidas respectivamente por los vectores $\vec{a}$ y $\vec{a}'$. Consideremos ahora la transformación producto $t't$. De acuerdo con la figura 6.1, se tiene

$$t't(P) = t'[t(P)] = t'(P') = P''$$

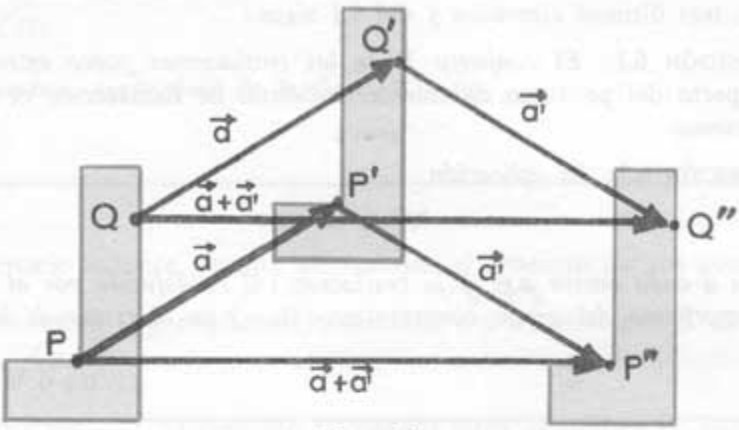


Figura 6.1

Si t'' es la traslación definida por el vector $\vec{a}+\vec{a}'$, se tiene

$$t''(P)=P''$$

ya que

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{PP'}\in\vec{a}\\ \overrightarrow{P'P''}\in\vec{a}'\end{array}\right\}\Longrightarrow\overrightarrow{PP''}\in\vec{a}+\vec{a}'$$

Por tanto, al aplicar la traslación t'' al punto P, se obtiene el mismo punto P'' que al aplicarle la transformación producto $t't$. Como esto es cierto cualquiera que sea el punto $P\in\Pi$ (en la figura 6.1 se muestra lo mismo para otro punto Q, distinto de P), podemos afirmar que

$$\boxed{t't=t''}$$

resultado que podemos expresar diciendo que *el producto de la traslación t, definida por el vector* $\vec{a}$, *por la traslación t', definida por* $\vec{a}'$, *es la traslación t'', definida por el vector* $\vec{a}+\vec{a}'$.

EJERCICIOS

6.1 ¿Es el producto de traslaciones una operación interna?

6.2 ¿Es asociativo el producto de traslaciones?

6.3 Dada una traslación t, definida por el vector $\vec{a}$, determine la traslación t^{-1}, tal que

$$t^{-1}t=i=tt^{-1}$$

De los tres últimos ejercicios y del 5.1 sigue:

• PROPOSICIÓN 6.1: *El conjunto T de las traslaciones posee estructura de grupo* respecto del producto de transformaciones. Le llamaremos el *grupo de las traslaciones.*

• PROPOSICIÓN 6.2: *La aplicación*

$$\mathfrak{V} \longrightarrow T$$

que asocia a cada vector $\vec{a} \in \mathfrak{V}$ *la traslación* $t \in T$, *definida por el vector* $\vec{a}$, *es un isomorfismo del grupo conmutativo* $(\mathfrak{V}, +)$ *en el grupo de las traslaciones.*

EJERCICIOS

6.4 Demostrar la proposición 6.2.

6.5 ¿Es conmutativo el grupo de las traslaciones?

6.6 Demostrar que el conjunto de los vectores proporcionales a un vector dado (definición 7.1 del § 16.) es un subgrupo de $(\mathfrak{V}, +)$.

6.7 Demostrar que el conjunto de las traslaciones definidas por los vectores de una dirección fija y la definida por el vector cero es un subgrupo del grupo de las traslaciones.

---

7. Grupo de los giros concéntricos

Consideremos dos giros, g y g', ambos de centro el mismo punto O y de amplitudes respectivas $\overset{\frown}{\alpha}$ y $\overset{\frown}{\alpha'}$. Consideremos ahora la transformación producto $g'g$ y sea g'' el giro de centro O y amplitud $\overset{\frown}{\alpha} + \overset{\frown}{\alpha'}$.

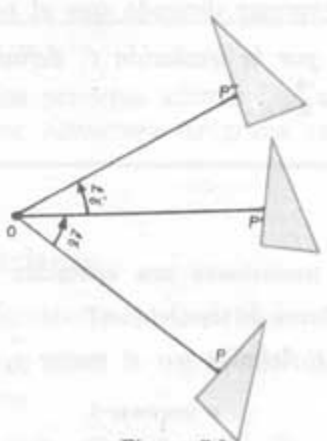


Figura 7.1

EJERCICIO

7.1 Demostrar, ayudándose de la figura 7.1, que

$$g'g=g''$$

El ejercicio anterior permite afirmar que *el producto de dos giros*, g y g', *del mismo centro O y amplitudes respectivas* $\overset{\curvearrowright}{\alpha}$ *y* $\overset{\curvearrowright}{\alpha'}$, *es el giro g'' de centro O y amplitud* $\overset{\curvearrowright}{\alpha+\alpha'}$.

• PROPOSICIÓN 7.1: *El conjunto* G_0, *de los giros de centros O, posee estructura de grupo* respecto del producto de transformaciones. Le llamaremos el *grupo de los giros concéntricos.*

EJERCICIO

7.2 Demostrar la proposición anterior.

• PROPOSICIÓN 7.2: Sea $\overset{\curvearrowright}{A}$ el grupo conmutativo de los ángulos orientados, del que hablamos en el párrafo 1. *La aplicación*

$$\overset{\curvearrowright}{A} \longrightarrow G_0$$

que asocia a cada ángulo orientado $\overset{\curvearrowright}{\alpha}$ *el giro g, de centro O y amplitud* $\overset{\curvearrowright}{\alpha}$, *es un homomorfismo del grupo aditivo conmutativo de los ángulos orientados en el grupo de los giros concéntricos.*

EJERCICIOS

7.3 Demostrar la proposición anterior.

7.4 Muestre, mediante un contraejemplo adecuado, que la aplicación de la proposición 7.2 no es isomorfismo.

7.5 ¿Es conmutativo el grupo de los giros concéntricos?

7.6 Demuestre que el conjunto de los ángulos orientados de amplitudes cero.

un recto, dos rectos y tres rectos (todos del mismo sentido) es un subgrupo del grupo de los ángulos orientados.

7.7 ¿Es un subgrupo de G_0 el conjunto de los giros correspondientes a cada uno de los cuatro ángulos, considerados en el ejercicio anterior, en la aplicación de la proposición 7.2?

---

8. Producto de dos simetrías axiales

• PROPOSICIÓN 8.1: *El producto de una simetría axial, s, por sí misma es la transformación identidad, i, es decir,*

$$\boxed{ss=i}$$

Demostración: Basta tener en cuenta el ejercicio 1.2.

Consideremos ahora dos simetrías axiales, s y s', cuyos ejes respectivos son dos rectas, e y e', paralelas y distintas. Estudiemos la transformación producto $s's$.

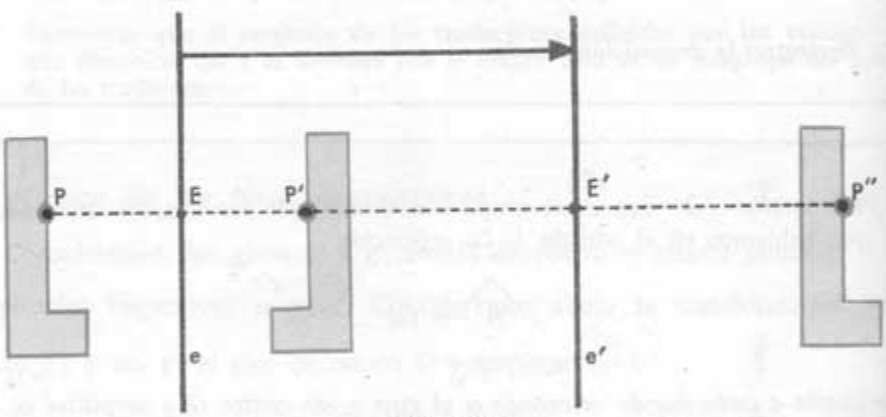


Figura 8.1

De acuerdo con la figura 8.1, se tiene

$$\left.\begin{array}{l} s(P)=P' \Longrightarrow \\ s'(P')=P'' \Longrightarrow \end{array}\right\} \boxed{\begin{array}{l} \{\{\overrightarrow{PP'}\}\}=2\{\{\overrightarrow{EP'}\}\} \\ \{\{\overrightarrow{P'P''}\}\}=2\{\{\overrightarrow{P'E'}\}\} \end{array}}$$

$$\Downarrow$$

$$\{\{\overrightarrow{PP'}\}\}+\{\{\overrightarrow{P'P''}\}\}=2\left(\{\{\overrightarrow{EP'}\}\}+\{\{\overrightarrow{P'E'}\}\}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\{\{\overrightarrow{PP''}\}\}=2\{\{\overrightarrow{EE'}\}\}$$

Como el vector $\{\{\overrightarrow{EE'}\}\}$ no depende del punto P de que se trate, si designamos por t a la traslación definida por el vector $2\{\{\overrightarrow{EE'}\}\}$, se tendrá

$$\forall\, P \in \Pi; \qquad t(P) = P'' = s's(P) \Longrightarrow \boxed{s's = t}$$

EJERCICIOS

8.1 Exprese con palabras el resultado obtenido.

8.2 Repita la construcción de la figura 8.1, cuando el punto P está situado entre las rectas e y e'.

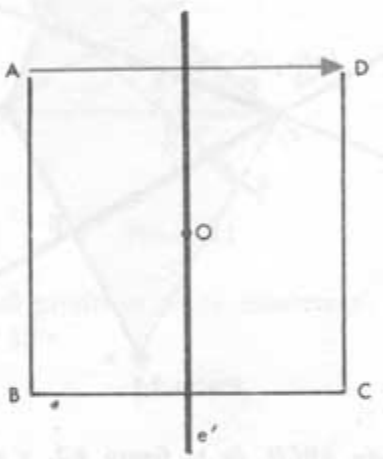


Figura 8.2

8.3 Considere un cuadrado $ABCD$ y sea t la traslación, tal que

$$t(A) = D$$

Sea s' la simetría de eje la recta e' (Fig. 8.2). Determine la simetría s, tal que el producto de s por s' sea t, es decir, tal que

$$s's = t$$

Estudiemos ahora el producto de dos simetrías axiales, s y s', cuyos ejes, e y e' son dos rectas que se cortan en el punto O.

EJERCICIOS

8.4 Razonando de forma análoga a como se hizo para rectas paralelas, demues-

tre, ayudándose de la figura 8.3, que

a) $\{\{\overset{\frown}{POP''}\}\}=2\{\{\overset{\frown}{EOE'}\}\}$;

b) $\overline{OP}=\overline{OP''}$.

c) $s's=g$, donde g es el giro de centro O y amplitud $2\{\{\overset{\frown}{EOE''}\}\}$;

d) exprese con palabras el resultado obtenido.

8.5 Repita la construcción de la figura 8.3, para el caso de ser el punto P interior al ángulo $\overset{\frown}{EOE'}$.

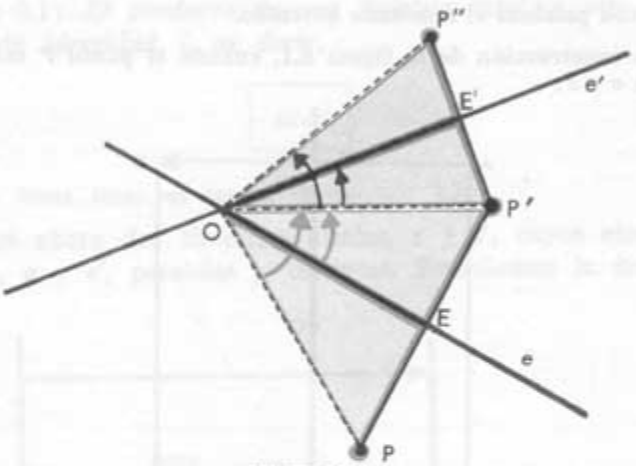


Figura 8.3

8.6 Considere el cuadrado $ABCD$, de la figura 8.2, y sea g el giro de centro B tal que

$$g(C)=A$$

Sea s la simetría axial de eje la recta BC. Determinar la simetría s', tal que

$$s's=g$$

9. Grupo de las traslaciones y giros

Estudiemos ahora el producto de dos giros. Sea g un giro de centro O y amplitud $\overset{\frown}{\alpha}$ y g' el giro de centro O', distinto de O, y amplitud $\overset{\frown}{\alpha'}$, tal que

$$\overset{\frown}{\alpha'}\neq-\overset{\frown}{\alpha}$$

Sea e' la recta que pasa por los puntos O y O' (fig. 9.1). Sea s' la

simetría de eje e'. Sea e la recta, tal que el producto de la simetría s, de eje e, por la simetría s', de eje e', sea el giro

$$g = s's$$

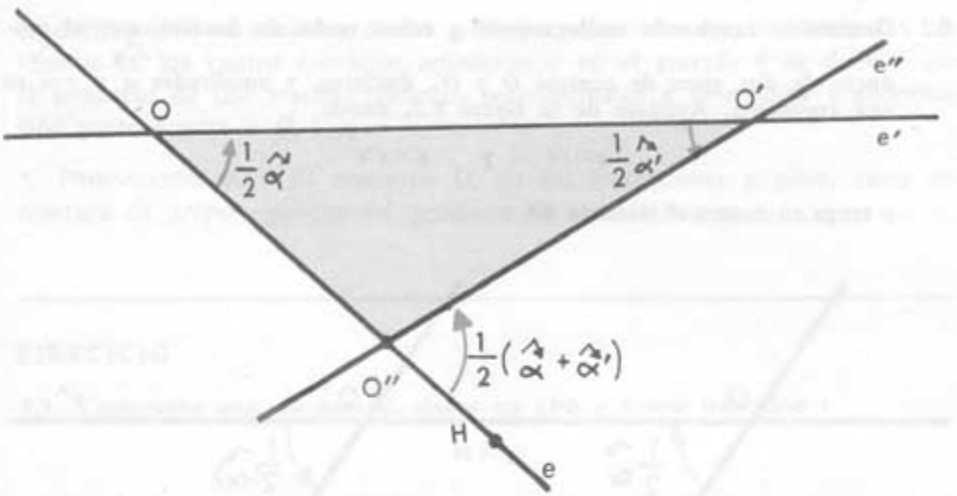


Figura 9.1

Sea e'' la recta tal que el producto de la simetría s', de eje e', por la simetría s'', de eje e'', sea el giro

$$g' = s''s'$$

Se tiene

$$g'g = (s''s')(s's) = s''(s's')s = s''is = s''s$$

pero s y s'' son dos simetrías de ejes que se cortan en O'', luego $s''s$ es un giro de centro O'' y amplitud $2\{\{\overset{\curvearrowright}{HO''O'}\}\}$. Por ser $\overset{\curvearrowright}{HO''O}$ un ángulo exterior del triángulo $\overset{\triangle}{OO'O''}$, se tiene

$$\{\{\overset{\curvearrowright}{HO''O'}\}\} = \tfrac{1}{2}\overset{\curvearrowright}{\alpha} + \tfrac{1}{2}\overset{\curvearrowright}{\alpha'}$$

luego *g'g es el giro de centro O'' y amplitud* $\overset{\curvearrowright}{\alpha}+\overset{\curvearrowright}{\alpha'}$.

EJERCICIOS

9.1 Exprese con palabras el resultado obtenido.

9.2 Demuestre, razonando análogamente a como acaba de hacerse, que el producto de dos giros de centros O y O', distintos, y amplitudes α y $-\alpha$ es una traslación. Ayúdese de la figura 9.2, donde

$$g = s's \qquad \text{y} \qquad g' = s''s'$$

y tenga en cuenta el ejercicio 8.1.

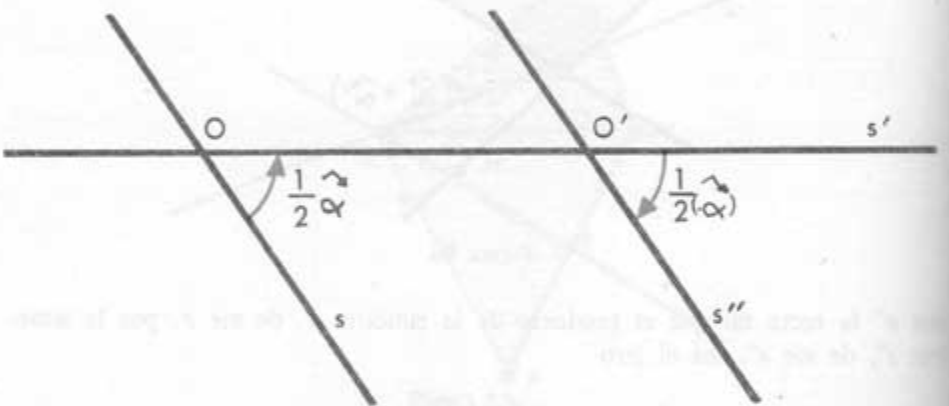


Figura 9.2

9.3 Demuestre que el producto de un giro g, de centro O y amplitud α, por una traslación t, definida por el vector $\vec{a}$, es un giro de centro distinto de O y amplitud α. Ayúdese de la figura 9.3, donde

$$g = s's \qquad \text{y} \qquad t = s''s'$$

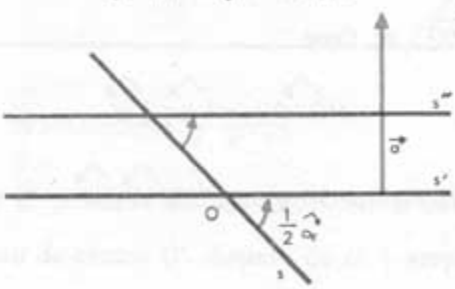


Figura 9.3

9.4 Estudie el producto de una traslación por un giro.

Si T es el conjunto de las traslaciones y G el de los giros, sea

$$D = T \cup G$$

es decir, sea D el conjunto de los giros y traslaciones. De los resultados obtenidos en los cuatro ejercicios anteriores y en el párrafo 6 se deduce que el producto de dos transformaciones pertenecientes a D es otra transformación perteneciente a D, luego:

• PROPOSICIÓN 9.1: *El conjunto D, de las traslaciones y giros, tiene estructura de grupo* respecto del producto de transformaciones.

EJERCICIO

9.5 Compruebe que, en general, dados un giro g y una traslación t

$$tg \neq gt$$

---

10. Grupo de las isometrías

• DEFINICIÓN 10.1: *Llamaremos movimientos a las transformaciones que pueden obtenerse como producto de un número finito de simetrías axiales.*
Designemos por M al conjunto de los movimientos.

• EJEMPLO 10.1: Una traslación puede descomponerse en producto de *dos* simetrías axiales, de ejes paralelos, luego una traslación es un movimiento.

EJERCICIOS

10.1 ¿Son movimientos los giros?

10.2 Pruebe que

$$D \subset M$$

10.3 Demuestre que el conjunto de los movimientos es un grupo.

• DEFINICIÓN 10.2: *Diremos que una transformación*

$$\Pi \xrightarrow{f} \Pi$$

es una isometría si

$$\left.\begin{array}{l} f(A)=A' \\ f(B)=B' \end{array}\right\} \Longrightarrow \overline{A'B'}=\overline{AB}$$

Designaremos por I al conjunto de las isometrías.

• EJEMPLO 10.2: Ya hemos visto que las traslaciones, giros y simetrías son isometrías.

EJERCICIO

10.4 Demostrar que

$$M \subset I$$

Consideremos una isometría f. Sean A y B dos puntos distintos. Sean

$$f(A)=A'; \qquad f(B)=B'$$

Por ser f una isometría, habrá de verificarse

$$\overline{A'B'}=\overline{AB}$$

Consideremos otro punto, P, del plano, y tratemos de encontrar el punto

$$f(P)=P'$$

Por ser f una isometría, habrá de verificarse

$$\overline{A'P'}=\overline{AP} \qquad \text{y} \qquad \overline{B'P'}=\overline{BP}$$

pero existen dos posibles puntos P' que verifican estas dos condiciones (figura 10.1). Notemos que al pasar de P a P' se ha conservado el sentido de los

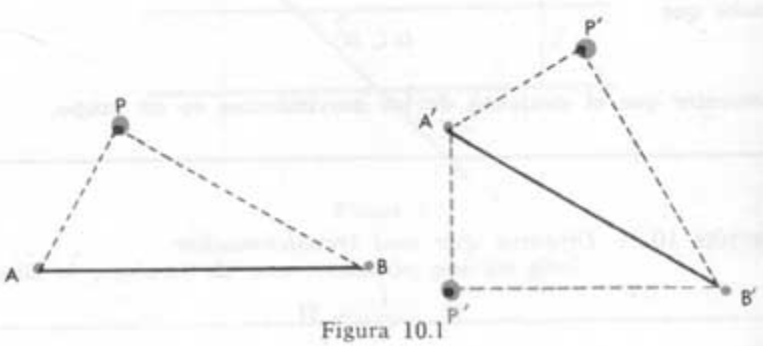


Figura 10.1

ángulos (los ángulos $\overset{\frown}{APB}$ y $\overset{\frown}{A'P'B'}$ tienen el mismo sentido), mientras que, al pasar de P a , se ha cambiado el sentido de los ángulos. De lo que acaba de hacerse notar, se deduce que, dados cuatro puntos, A, B, A' y B', tales que

$$\overline{A'B'} = \overline{AB}$$

siendo A distinto de B, existen dos isometrías en que A se transforma en A' y B en B', una de las cuales conserva el sentido de los ángulos y la otra lo cambia. *Una isometría queda,* por tanto, *determinada por dos puntos distintos, A y B, sus transformados, A' y B', que han de verificar*

$$\overline{A'B'} = \overline{AB}$$

y por la condición de conservar *el sentido,* o no conservarlo.

• PROPOSICIÓN 10.1: *El conjunto de las isometrías está contenido en el conjunto de los movimientos, es decir,*

$$I \subset M$$

Demostración:

Ya se ha indicado cómo queda determinada una isometría. Habrá que considerar distintos casos, según las posiciones relativas de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$.

Comencemos considerando isometrías que conservan el sentido.

Primer caso:

$$A' = A; \qquad B' = B$$

Cualquiera que sea P, se verificará

$$P' = P$$

de acuerdo con la figura 10.2, luego esta isometría es la transformación idéntica, que es un movimiento.

Segundo caso:

$$A' = A; \qquad B' \neq B$$

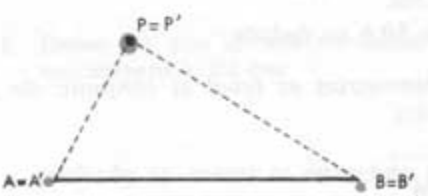


Figura 10.2

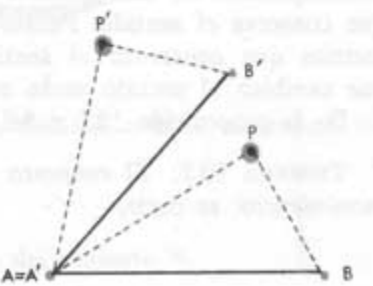


Figura 10.3

El giro de centro A, que transforma B en B', también transforma P en P', de acuerdo con la figura 10.3, luego esta isometría es un giro, que es un movimiento.

Tercer caso:

$$A' \neq A; \qquad B' \neq B; \qquad \overrightarrow{A'B'} \sim \overrightarrow{AB}$$

La traslación que transforma A en A', también transforma B en B' y P en P', de acuerdo con la figura 10.4, luego se trata de una traslación, que es un movimiento.

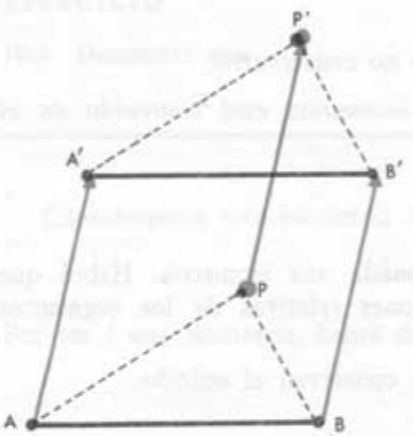


Figura 10.4

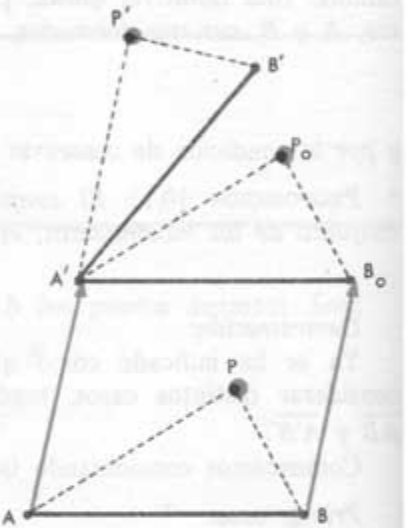


Figura 10.5

Cuarto caso:

$$A' \neq A; \qquad B' \neq B; \qquad \overrightarrow{A'B'} \text{ no equivalente a } \overrightarrow{AB}$$

De acuerdo con la figura 10.5, se trata del producto de una traslación por un giro, es decir, de un giro, teniendo en cuenta el ejercicio 9.4.

Si se trata de una isometría que cambia el sentido de los ángulos, basta descomponerla en una simetría axial, de eje la recta AB, por una isometría que conserva el sentido. Puesto que tanto las simetrías axiales como las isometrías que conservan el sentido son movimientos, también las isometrías que cambian el sentido serán movimientos.

De la proposición 10.1 y del ejercicio 10.4 se deduce:

• TEOREMA 10.2: *El conjunto de las isometrías es igual al conjunto de los movimientos,* es decir,

$$\boxed{I = M}$$

EJERCICIOS

10.5 ¿Será conmutativo el grupo de las isometrías o movimientos?

10.6 ¿Cómo ha de ser el número natural n, si afirmamos que el producto de n simetrías conserva el sentido de los ángulos?

10.7 Demuestre que el conjunto de las isometrías que conservan el sentido es igual al conjunto D, de las traslaciones y giros, del párrafo 9.

10.8 De los siguientes subconjuntos de M, indique cuáles son subgrupos:

a) isometrías que cambian el sentido
b) movimientos que resultan como producto de un número finito de simetrías axiales, de ejes perpendiculares a una recta r dada
c) movimientos que resultan como producto de un número finito de simetrías axiales, cuyos ejes pasan por un punto dado O.

10.9 Sitúe, sobre el esquema de la figura 10.6, cada uno de los siguientes subconjuntos de M:

a) isometrías que cambian el sentido
b) simetrías axiales
c) simetrías centrales
d) transformación idéntica
e) transformación producto de una traslación por una simetría axial.

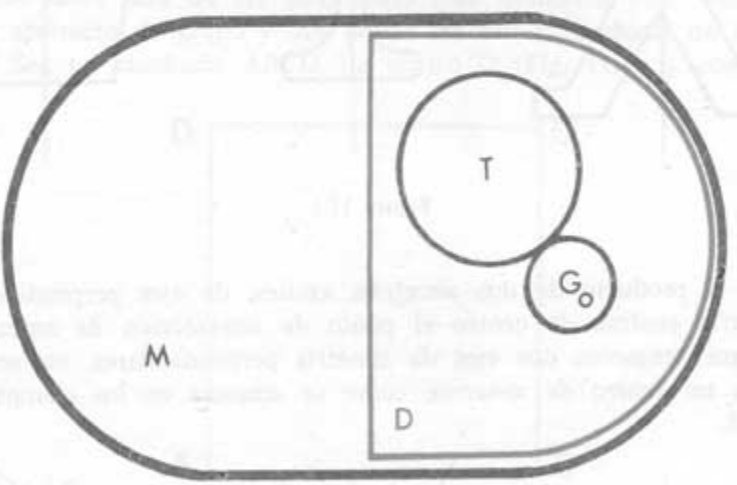


Figura 10.6

10.10 Dados un giro g, una traslación t y una simetría axial s, determinar el movimiento x, tal que

$$gtx = s$$

teniendo en cuenta la estructura de grupo del conjunto M.

11. Didáctica de los movimientos en la Escuela Primaria

Las simetrías axiales pueden ser introducidas en la Escuela por doblado del papel por el eje de simetría, pudiendo obtenerse, de este modo, experimentalmente, algunas de sus propiedades.

Los conceptos de mediatriz de un segmento y bisectriz de un ángulo pueden ser introducidos aprovechando las propiedades de la simetría axial.

Algunas figuras geométricas se transforman en sí mismas al aplicarle ciertas simetrías axiales. A los ejes de tales simetrías se les llama entonces *ejes de simetría de la figura.* En la figura 11.1 se presentan algunas figuras, señalando en rojo sus ejes de simetría.

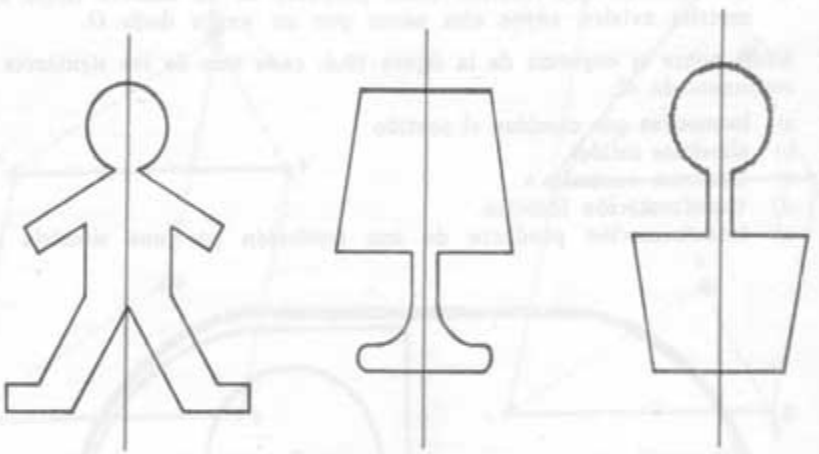


Figura 11.1

Como el producto de dos simetrías axiales, de ejes perpendiculares, es una simetría central, de centro el punto de intersección de ambas rectas, siempre que tengamos dos ejes de simetría perpendiculares, en una figura, tendremos un *centro de simetría,* como se muestra en los ejemplos de la figura 11.2.

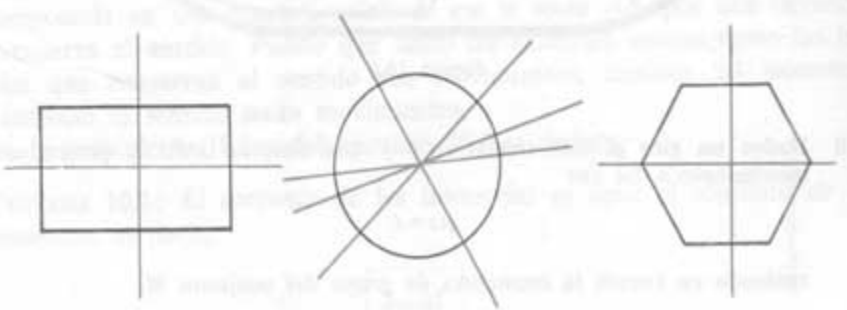


Figura 11.2

Los giros pueden ser introducidos con ayuda del compás. Las traslaciones y, en general, las isometrías que conservan el sentido pueden introducirse experimentalmente con auxilio de un papel transparente o semitransparente, sobre el cual se encuentra dibujada la figura cuyo movimiento va a considerarse.

Las isometrías que cambian el sentido se materializan dando la vuelta al papel transparente, de modo que apoye su otra cara sobre el papel opaco.

En la página 78 del libro: PAPY, *Mathematique Moderne* 3; ed. Didier, cuya primera mitad está dedicada a una presentación elemental de los movimientos, puede verse un ejemplo de utilización del papel transparente para la introducción del concepto de giro.

Una vez introducidos experimentalmente los movimientos, pueden establecerse los criterios de igualdad de triángulos, después de definir como iguales dos triángulos, si existe un movimiento que transforma uno en el otro y comprobar que la igualdad de triángulos, así definida, es una relación de equivalencia.

Notemos que, desde el punto de vista de la Matemática, al aplicar un movimiento a una figura, interesa considerar las posiciones inicial y final, sin preocuparnos de las posiciones intermedias, problema éste propio de la Física.

Veamos ahora una de las situaciones más utilizadas para introducir el concepto abstracto de grupo y que puede ser útil para chicos de los cursos 7.° y 8.° Sea un cuadrado *ABCD*, de centro *O* (Fig. 11.3), y consideremos

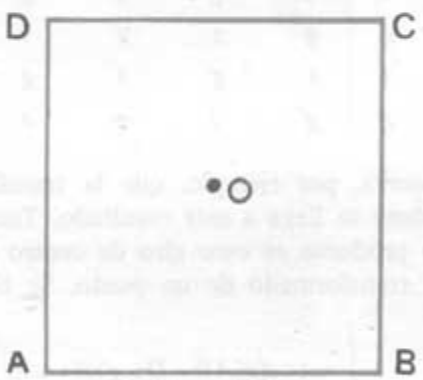


Figura 11.3

los giros que transforman este cuadrado en sí mismo. En primer lugar, tenemos la transformación idéntica, *i*. El giro *g*, de centro *O*, tal que

$$g(A)=B$$

verifica

$$g(O)=O; \qquad g(B)=C; \qquad g(C)=D; \qquad g(D)=A$$

y transforma el cuadrado $ABCD$ en sí mismo. El giro s, de centro O, tal que

$$s(A)=C$$

verifica

$$s(O)=O; \qquad s(B)=D; \qquad s(C)=A; \qquad s(D)=B$$

y transforma el cuadrado $ABCD$ en sí mismo. Se trata de la simetría central de centro el punto O, centro del cuadrado. El giro g', de centro O, tal que

$$g'(A)=D$$

verifica

$$g'(O)=O; \qquad g'(B)=A; \qquad g'(C)=B; \qquad g'(D)=C$$

y transforma también el cuadrado $ABCD$ en sí mismo. Consideremos el conjunto

$$H_O=\{i, g, s, g'\}$$

de los giros de centro O que transforman el cuadrado en sí mismo. En la siguiente tabla se indica el producto de cada dos transformaciones pertenecientes al conjunto H_O.

	i	g	s	g'
i	i	g	s	g'
g	g	s	g'	i
s	s	g'	i	g
g'	g'	i	g	s

En la tabla se observa, por ejemplo, que la transformación producto de g y s es g'. Veamos cómo se llega a este resultado. Tanto g como s son giros de centro O, luego su producto es otro giro de centro O, que quedará determinado conociendo el transformado de un punto. Se tiene

$$\left.\begin{array}{l} g(A)=B \\ \quad\downarrow \\ s(B)=D \end{array}\right\} \Longrightarrow s[g(A)]=D=g'(A) \Longrightarrow \boxed{sg=g'}$$

Continuando de este modo, se llega a construir la tabla anterior, en la que se observa que el producto de dos transformaciones de H_O es otra transformación perteneciente a H_O, y, además, para cada transformación perteneciente a H_O, su transformación inversa también pertenece a H_O, podemos afirmar que H_O es un subgrupo del grupo G_O de los giros concéntricos, de centro O. Por la forma en que ha sido introducido el grupo H_O, se llama *grupo del cuadrado*. Se trata de un grupo finito, que consta de cuatro elementos, por lo que se dice que es un grupo de orden cuatro.

De forma análoga puede estudiarse el conjunto formado por los giros que acaban de considerarse y las simetrías axiales que transforman el cuadrado en sí mismo, obteniendo un grupo de orden ocho, del cual es subgrupo H_O.

Del mismo modo puede estudiarse, por ejemplo, *el grupo del triángulo*, formado por los giros de centro O, que transforman en sí mismo a un triángulo equilátero de baricentro el punto O. Se trata evidentemente de un grupo de orden tres. También puede considerarse, por ejemplo, un exágono, en lugar de un cuadrado o un triángulo.

Otros muchos ejemplos de grupos finitos, que son subgrupos del grupo de los movimientos, aptos para un primer contacto del escolar de los últimos años, con el concepto de grupo, los encontrará en el libro:

P. S. ALEXANDROFF: *Introducción a la teoría de grupos*. Ed. Eudeba, Buenos Aires.

18 GRUPO EQUIFORME

1. Homotecia

• EJEMPLO 1.1: Consideremos un punto O, del plano, y el número real 3. Vamos a definir una nueva aplicación de Π en Π, es decir, una nueva trans-

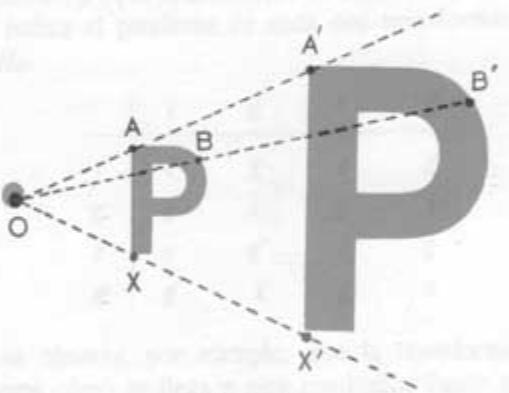


Figura 1.1

formación geométrica. Dado el punto A (Fig. 1.1), consideremos la recta OA y, en ella, un punto A', perteneciente a la semirrecta O_A, y tal que

$$\{\{\overline{OA'}\}\}=3\{\{\overline{OA}\}\}$$

Análogamente, asociamos al punto B el punto B', situado en la semirrecta O_B y tal que

$$\{\{\overline{OB'}\}\}=3\{\{\overline{OB}\}\}$$

es decir, asociamos al punto B el punto B', tal que

$$\{\{\overrightarrow{OB'}\}\}=3\{\{\overrightarrow{OB}\}\}$$

En general, asociamos a cada punto X el punto X', tal que

$$\{\{\overrightarrow{OX'}\}\}=3\{\{\overrightarrow{OX}\}\}$$

Esta transformación se llama *homotecia de centro O y razón* 3. En ella, la P pequeña de la figura 1.1 se transforma en la P grande.

• EJEMPLO 1.2: Consideremos ahora la *homotecia de centro H y razón*

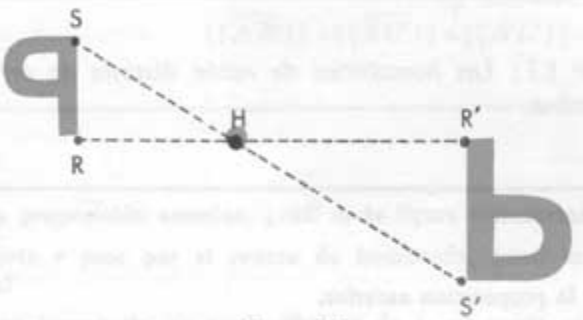


Figura 1.2

-2 (Fig. 1.2). Se llama así a la transformación que asocia al punto R el punto R', tal que

$$H\in\overline{RR'};\qquad \{\{\overline{HR'}\}\}=2\{\{\overline{HR}\}\}$$

es decir, tal que

$$\{\{\overrightarrow{HR'}\}\}=-2\{\{\overrightarrow{HR}\}\}$$

y lo mismo para los demás puntos del plano.

• DEFINICIÓN 1.1: *Dados un punto O y un número real k, se llama homotecia a la transformación que asocia a cada punto X el punto X', tal que*

$$\{\{\overrightarrow{OX'}\}\}=k\{\{\overrightarrow{OX}\}\}$$

El punto O se llama *centro de homotecia,* y el número real k, *razón de homotecia.* Si $k>0$, la homotecia se dice *de razón positiva,* y si $k<0$, de *razón negativa.*

EJERCICIOS

1.1 Considere una homotecia de razón 5/2 y construya el transformado de un punto.

1.2 Repita el ejercicio anterior cuando la razón es $-3/2$.

1.3 ¿Cuál será el transformado del centro de homotecia?

1.4 Dados una homotecia de centro O, un punto X, distinto de O, y su transformado X', ¿cómo ha de ser la razón k, de homotecia, para que las semirrectas O_X y $O_{X'}$ coincidan?

1.5 La homotecia de razón 1 coincide con una transformación estudiada en el § anterior. ¿Cuál?

1.6 La homotecia de razón -1 coincide con una transformación estudiada en el § anterior. ¿Cuál?

• PROPOSICIÓN 1.1: *Las homotecias de razón distinta de cero son transformaciones biyectivas.*

EJERCICIO

1.7 Demostrar la proposición anterior.

• PROPOSICIÓN 1.2: *Si h es una homotecia de razón k, se verifica* (Fig. 1.3)

$$\left.\begin{array}{l} h(A)=A' \\ h(B)=B' \end{array}\right\} \Longrightarrow \{\{\overline{A'B'}\}\}=k\{\{\overline{AB}\}\}$$

cualesquiera que sean los puntos A y B.

Demostración: Basta tener en cuenta la semejanza de los triángulos $\widehat{OAB}$ y $\widehat{OA'B'}$.

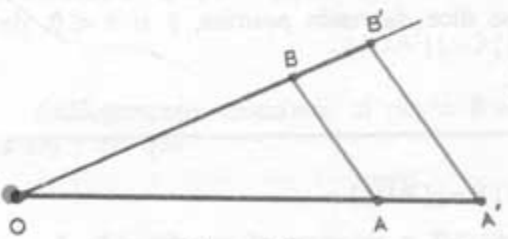


Figura 1.3

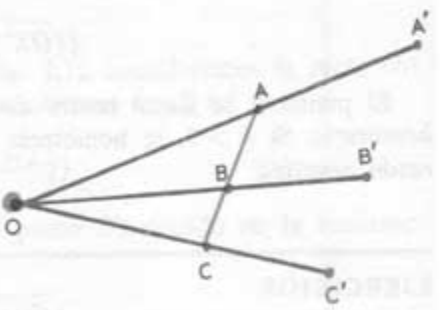


Figura 1.4

• PROPOSICIÓN 1.3: *Las homotecias transforman puntos alineados en puntos alineados.*

Demostración: Sean A, B y C tres puntos alineados cualesquiera (Fig. 1.4)

$$B \in \overline{AC} \iff \{\{\overline{AB}\}\}+\{\{\overline{BC}\}\}=\{\{\overline{AC}\}\}$$
$$\Downarrow$$
$$h\left(\{\{\overline{AB}\}\}+\{\{\overline{BC}\}\}\right)=h\{\{\overline{AC}\}\}$$
$$\Downarrow$$
$$h\{\{\overline{AB}\}\}+h\{\{\overline{BC}\}\}=h\{\{\overline{AC}\}\}$$
$$\Downarrow \text{ proposición 1.2}$$
$$\{\{\overline{A'B'}\}\}+\{\{\overline{B'C'}\}\}=\{\{\overline{A'C'}\}\} \iff B' \in \overline{A'C'}$$

EJERCICIOS

1.8 Según la proposición anterior, ¿cuál es la figura transformada de una recta?

1.9 Si la recta r pasa por el centro de homotecia, ¿cuál es su figura transformada?

1.10 Si en una homotecia, de razón distinta de 1, un punto se transforma en sí mismo, ¿cuál será ese punto?

• PROPOSICIÓN 1.4: *Las homotecias transforman una recta, que no pasa por el centro, en otra recta, paralela a aquélla.*

EJERCICIOS

1.11 Demostrar la proposición anterior, ayudándose de la figura 1.3.

1.12 ¿Qué podemos afirmar respecto de las distancias del centro de homotecia a una recta y a su transformada?

1.13 Dada una homotecia h, de centro O y razón 2, en que

$$h(A)=A'; \qquad h(B)=B'; \qquad A \neq O \neq B$$

compare los ángulos orientados fijos $\overset{\curvearrowright}{AOB}$ y $\overset{\curvearrowright}{A'OB'}$. Haga un dibujo apropiado.

1.14 Dadas una homotecia h, de centro O y razón 2 y un triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$, compare los ángulos orientados fijos $\overset{\curvearrowright}{ABC}$ y $\overset{\curvearrowright}{A'B'C'}$, siendo

$$h(A)=A'; \qquad h(B)=B'; \qquad h(C)=C'$$

Haga un dibujo apropiado.

El ejercicio anterior se generaliza así:

• PROPOSICIÓN 1.5: *Las homotecias de razón positiva conservan los ángulos y sus sentidos.*

EJERCICIOS

1.15 ¿Cuál es la transformación producto de una homotecia de centro O y razón 2, por una simetría central, de centro O?

1.16 Descomponga una homotecia de centro O y razón -3 en producto de una homotecia de razón positiva por una simetría central. Generalice el resultado obtenido.

• PROPOSICIÓN 1.6: *Las homotecias de razón negativa también conservan los ángulos y sus sentidos.*

Demostración: Sigue del ejercicio 1.16, de la proposición 1.5 y de que las simetrías centrales conservan los ángulos y sus sentidos.

EJERCICIOS

1.17 Compruebe en varios ejemplos que las homotecias transforman un polígono en otro polígono de ángulos respectivamente iguales y lados respectivamente proporcionales y paralelos. ¿Qué relación existirá entre sus áreas?

1.18 Demuestre que la figura transformada de una circunferencia de centro C

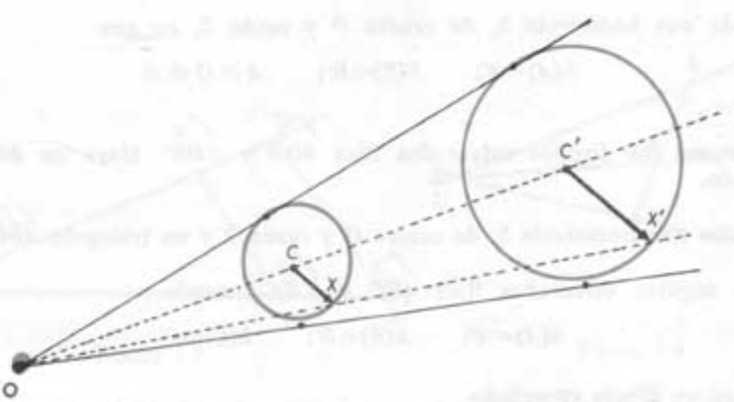


Figura 1.5

y radio r, en una homotecia h, de centro O y razón k, es una circunferencia de centro

$$C'=h(C)$$

y radio

$$r'=kr$$

Ayúdese de la figura 1.5, donde

$$\{\{\overrightarrow{C'X'}\}\}=k\{\{\overrightarrow{CX}\}\}$$

1.19 **Dadas dos circunferencias, comprobar que existen dos homotecias en que una de las circunferencias se transforma en la otra. ¿Donde están situados los centros de homotecia? ¿Qué relación existirá entre las razones de estas dos homotecias? Ayúdese de la figura 1.6.**

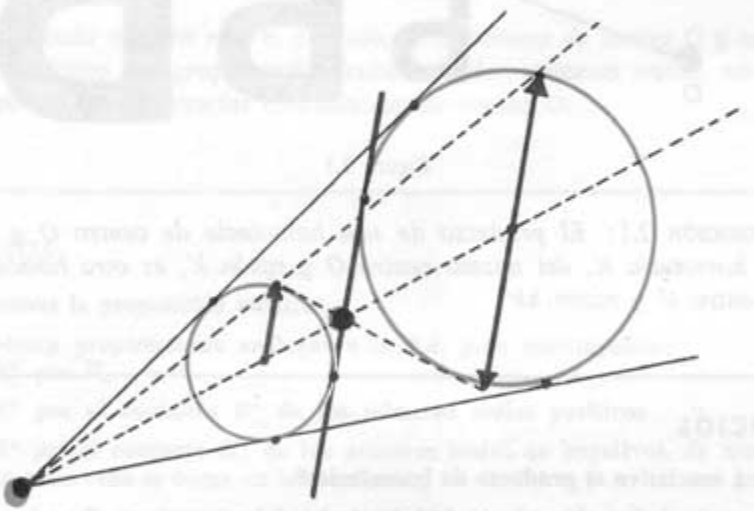


Figura 1.6

1.20 **Dado un sector circular, inscribir en él un cuadrado, ayudándose de una homotecia.**

2. Grupo de las homotecias concéntricas

Estudiemos la transformación producto de dos homotecias, h y h', ambas del mismo centro O y razones respectivas k y k'. Sea X un punto del plano

(Fig. 2.1). Se tiene

$$h(X)=X' \Longrightarrow \{\{\overrightarrow{OX'}\}\}=k\{\{\overrightarrow{OX}\}\}$$
$$\downarrow$$
$$h'(X')=X'' \Longrightarrow \{\{\overrightarrow{OX''}\}\}=k'\{\{\overrightarrow{OX'}\}\}$$
$$\downarrow$$
$$\boxed{\{\{\overrightarrow{OX''}\}\}=k'k\{\{\overrightarrow{OX}\}\}}$$

es decir, X'' es el transformado de X en una homotecia de centro O y razón $k'k$. Como esto es cierto cualquiera que sea el punto X, podemos afirmar:

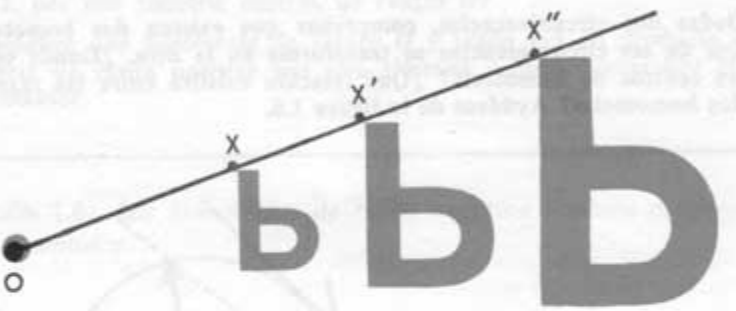


Figura 2.1

• PROPOSICIÓN 2.1: *El producto de una homotecia de centro O y razón k por una homotecia h', del mismo centro O y razón k', es otra homotecia del mismo centro O y razón kk'.*

EJERCICIOS

2.1 ¿Será asociativo el producto de homotecias?

2.2 ¿Es conmutativo el producto de homotecias del mismo centro?

• PROPOSICIÓN 2.2: *El conjunto de las homotecias de centro O es un semigrupo conmutativo,* respecto del producto de transformaciones.

Le llamaremos el *semigrupo de las homotecias concéntricas* de centro O. Designemos por H_O al conjunto de las homotecias de centro O.

EJERCICIOS

2.3 ¿Posee elemento neutro el semigrupo H_0 de las homotecias de centro O? Tenga en cuenta el ejercicio 1.5.

2.4 Dada una homotecia h, de centro O y razón k, distinta de cero, ¿existe otra homotecia de centro O, cuyo producto por h sea la transformación idéntica?

De la proposición 2.2 y los ejercicios 2.3 y 2.4 sigue

• PROPOSICIÓN 2.3: *El conjunto de las homotecias de centro O y razón no nula posee estructura de grupo,* respecto del producto de transformaciones.

Le llamaremos el *grupo de las homotecias concéntricas* de centro O.

Designaremos por H_O^* al conjunto de las homotecias de centro O y razón distinta de cero.

• PROPOSICIÓN 2.4: *La aplicación*

$$R^* \longrightarrow H_0^*$$

que asocia a cada número real k, no nulo, la homotecia de centro O y razón k, es un isomorfismo del grupo multiplicativo de los números reales, no nulos, en el grupo de las homotecias concéntricas de centro O.

EJERCICIOS

2.5 Demostrar la proposición anterior.

2.6 Establezca proposiciones análogas a la 2.4, pero sustituyendo:

a) **H_0^* por H_0**

b) **R^* por el conjunto R_+^* de los números reales positivos**

c) **R^* por el conjunto R_+ de los números reales no negativos, de modo que en cada caso se tenga un isomorfismo.**

2.7 ¿Cómo han de ser las razones, k y k', de dos homotecias concéntricas, h y h', para que su producto sea una homotecia de razón negativa (respectivamente positiva)?

---

3. Grupo de las homotecias y traslaciones

Pasemos a estudiar ahora el producto de homotecias de centros distintos. Comencemos, para ello, estudiando el siguiente

• TEOREMA 3.1: *Si f es una transformación geométrica en la que*

$$f(X)=X'; \qquad f(Y)=Y'$$

se verifica

$$\boxed{\forall X, Y \in \Pi; \quad \{\{\overrightarrow{X'Y'}\}\} = k\{\{\overrightarrow{XY}\}\}} \Longrightarrow \boxed{f \text{ es una homotecia de razón } k}$$

donde k es un número fijo, distinto de la unidad e independiente de los puntos X e Y.

Demostración: Consideremos una transformación f que verifique tal condición y probemos que se trata de una homotecia.

Elijamos un punto X tal que

$$X' = f(X)$$

sea un punto distinto de X. Tal punto X siempre existe, por haber supuesto

$$k \neq 1$$

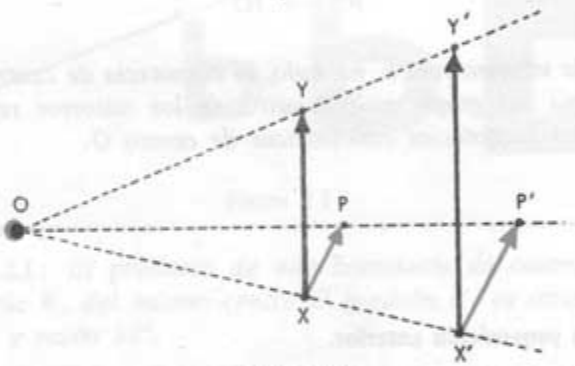


Figura 3.1

Sea Y un punto no alineado con X y X'. Sea

$$Y' = f(Y)$$

Como, por hipótesis

$$\{\{\overrightarrow{X'Y'}\}\} = k\{\{\overrightarrow{XY}\}\}$$

luego, según la definición 5.1 del § 16

$$\overline{X'Y'} \| \overline{XY}; \quad |\overrightarrow{X'Y'}| = |k|\,|\overrightarrow{XY}|; \quad \begin{cases} \overrightarrow{X'Y'} \uparrow \overrightarrow{XY}, & \text{si } k > 0 \\ \overrightarrow{X'Y'} \downarrow \overrightarrow{XY}, & \text{si } k < 0 \end{cases}$$

como se indica en la figura 3.1.

Sea P otro punto cualquiera y

$$P' = f(P)$$

luego

$$\{\{\overrightarrow{X'P'}\}\}=k\{\{\overrightarrow{XP}\}\}$$

Sea O el punto de intersección de las rectas XX' e YY'. Es fácil ver que la homotecia de centro O, que transforma Y en Y', también transforma X en X' y, en general, P en P', luego esta homotecia coincide con f.

EJERCICIO

3.1 Compruebe que el recíproco del teorema anterior también es cierto.

Estamos ya en condiciones de estudiar el producto de la homotecia h, de centro O y razón k, por la homotecia h', de centro O' y razón k'.

Consideremos, para ello, un vector fijo cualquiera $\overrightarrow{XY}$. Su transformado en h será $\overrightarrow{X'Y'}$ (Fig. 3.2). A su vez, $\overrightarrow{X'Y'}$ se transforma por h' en $\overrightarrow{X''Y''}$. Teniendo en cuenta el ejercicio 3.1, será:

$$\{\{\overrightarrow{X'Y'}\}\}=k\{\{\overrightarrow{XY}\}\}$$

$$\downarrow$$

$$\{\{\overrightarrow{X''Y''}\}\}=k'\{\{\overrightarrow{X'Y'}\}\} \rightarrow \boxed{\{\{\overrightarrow{X''Y''}\}\}=k'k\{\{\overrightarrow{XY}\}\}}$$

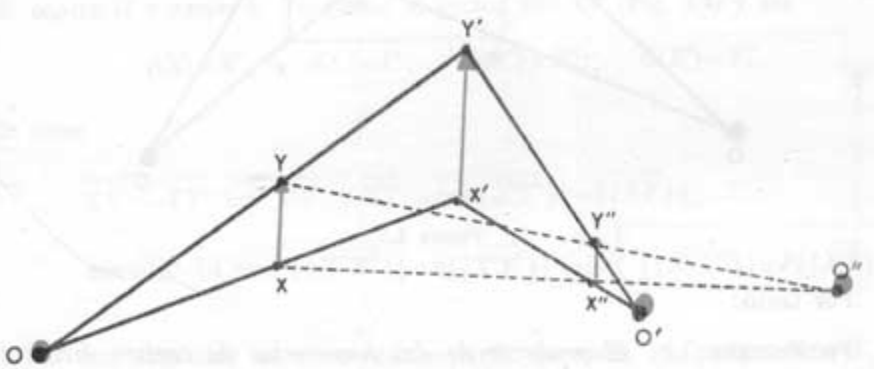


Figura 3.2

Si $\boxed{kk' \neq 1}$, la expresión anterior, teniendo en cuenta la proposición 3.1, permite afirmar que la transformación producto $h'h$ es una homotecia de razón $k'k$. Como las rectas que pasan por un punto y su transformado

en la homotecia pasan también por el centro de homotecia, el centro de la homotecia producto $h'h$ será el punto O'' (Fig. 3.2) de intersección de las rectas XX'' e YY''. Los puntos X e Y siempre pueden elegirse de modo que exista tal intersección, como en la figura 3.2.

Si $\boxed{kk'=1}$, se tiene, de acuerdo con la figura 3.3

$$\{\{\overrightarrow{X''Y''}\}\}=k'k\{\{\overrightarrow{XY}\}\}$$
$$\Downarrow\ k'k=1$$
$$\{\{\overrightarrow{X''Y''}\}\}=\{\{\overrightarrow{XY}\}\}$$
$$\Downarrow\ \text{ejercicio 2.16 del § 16}$$
$$\overrightarrow{X''Y''}\sim\overrightarrow{XY}$$
$$\Downarrow\ \text{ejercicio 3.5 del § 16}$$
$$\overrightarrow{XX''}\sim\overrightarrow{YY''}$$

luego, en este caso, la transformación producto $h'h$ es la traslación definida por el vector $\{\{\overrightarrow{XX''}\}\}$.

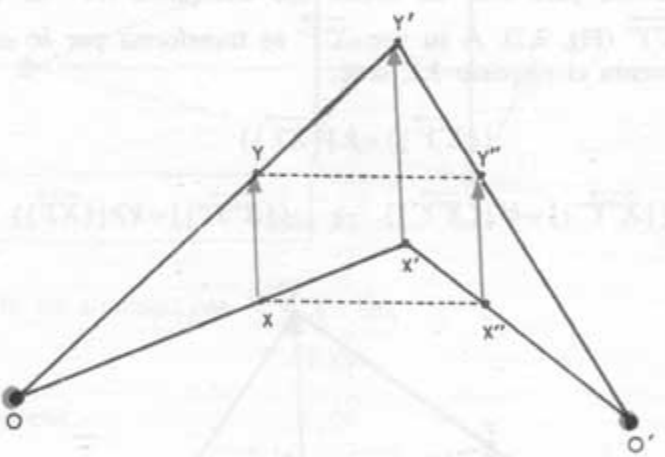


Figura 3.3

Por tanto:

• PROPOSICIÓN 3.2: *El producto de dos homotecias de centros distintos y razones respectivas k y k' es*

a) *otra homotecia,* si $kk'\neq 1$.
b) *una traslación,* si $kk'=1$.

EJERCICIOS

3.2 Si en una homotecia la recta r se transforma en sí misma, ¿qué podemos afirmar de la posición del centro de homotecia respecto de la recta r? Tenga en cuenta la proposición 1.4 y los ejercicios 1.9 y 1.12.

3.3 ¿Cuál será la transformada de la recta OO', de la figura 3.2, en las homotecias h, h' y $h'h$? Se supone $k'k \neq 1$.

3.4 Teniendo en cuenta los dos ejercicios anteriores, demostrar que, cuando $kk' \neq 1$, el punto O'', de la figura 3.2, está alineado con O y O'.

3.5 Demostrar que, cuando $kk'=1$, entonces la recta XX'' es paralela a la recta OO'. Tenga en cuenta que entonces

$$k'=\frac{1}{k}$$

3.6 Cuando $kk'=1$, existe un número real r, tal que

$$\{\{\overrightarrow{XX''}\}\}=r\{\{\overrightarrow{OO'}\}\}$$

Busque la expresión de r, en función de k y k', teniendo en cuenta la semejanza de los triángulos $\overset{\triangle}{XX'X''}$ y $\overset{\triangle}{OX'O'}$, de la figura 3.3.

Estudiemos ahora el producto de una traslación t por una homotecia h de centro O y razón k. Tengamos el vector fijo $\overrightarrow{XY}$ (Fig. 3.4) y sea

$$t(X)=X'; \qquad t(Y)=Y'; \qquad h(X')=X''; \qquad h(Y')=Y''$$

Se tiene

$$\overrightarrow{XX'} \sim \overrightarrow{YY''} \Longrightarrow \overrightarrow{X'Y'} \sim \overrightarrow{XY} \Longrightarrow \{\{\overrightarrow{X'Y'}\}\}=\{\{\overrightarrow{XY}\}\}$$

$$\text{ejercicio 3.1} \Longrightarrow \{\{\overrightarrow{X''Y''}\}\}=k\{\{\overrightarrow{X'Y'}\}\} \Longrightarrow \boxed{\{\{\overrightarrow{X''Y''}\}\}=k\{\{\overrightarrow{XY}\}\}}$$

Como este resultado es cierto cualesquiera que sean los puntos X e Y, la proposición 3.1 permite afirmar que la transformación producto ht es otra homotecia cuya razón es también k. Su centro, O', será el punto de intersección de las rectas XX'' e YY''. Los puntos X e Y siempre pueden elegirse de modo que exista tal intersección, como en la figura 3.4.

Por tanto:

- PROPOSICIÓN 3.3: *La transformación producto de una traslación por una*

homotecia, de centro O y razón k, es otra homotecia, de centro O', distinto de O, y la misma razón k.

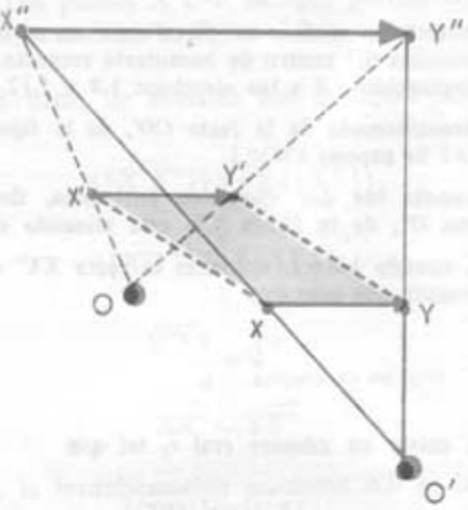


Figura 3.4

* PROPOSICIÓN 3.4: *La transformación producto de una homotecia, de centro O y razón k, por una traslación, es otra homotecia, de centro O_1, distinto de O, y la misma razón k.*

EJERCICIOS

3.7 Demuestre que el punto O' ha de ser distinto de O (Fig. 3.4), supuesto $k \neq 1$ y la traslación definida por un vector no nulo.

3.8 Demostrar la proposición 3.4.

3.9 Dadas una traslación t y una homotecia h, demostrar que, aunque las homotecias ht y th tienen la misma razón, sus centros son distintos. Haga una figura apropiada.

Designemos por F al conjunto de las homotecias y traslaciones, es decir, sea

$$F = H \cup T$$

donde H es el conjunto de las homotecias y T el de las traslaciones.

EJERCICIO

3.10 **Demostrar que el conjunto F, de las homotecias y traslaciones, es cerrado respecto del producto de transformaciones, es decir, que el producto de transformaciones es una operación interna en F. Tenga en cuenta las proposiciones 3.2, 3.3 y 3.4, que acaban de enunciarse, y el ejercicio 6.1 del §17.**

• PROPOSICIÓN 3.5: *El conjunto F, de las traslaciones y homotecias, posee estructura de grupo* respecto del producto de transformaciones.

Le llamaremos *grupo de las homotecias y traslaciones.*

EJERCICIOS

3.11 **Demuestre la proposición 3.5.**

3.12 **¿Es conmutativo el grupo de las trasiaciones y homotecias? Tenga en cuenta el ejercicio 3.9.**

3.13 **Señale dos subgrupos de F.**

3.14 **Señale un subconjunto de F, que no sea subgrupo.**

4. Semejanza

• DEFINICIÓN 4.1: *Diremos que una transformación*

$$\Pi \xrightarrow{f} \Pi$$

es una semejanza, si para cualesquiera puntos A, $B \in \Pi$ se verifica

$$\left.\begin{array}{l} f(A)=A' \\ f(B)=B' \end{array}\right\} \Longrightarrow \{\{\overline{A'B'}\}\}=k\{\{\overline{AB}\}\}$$

donde k es un número real fijo, independiente de A y B.

El número k se llama *razón de semejanza.*

Designaremos por S al conjunto de las semejanzas.

EJERCICIOS

4.1 Compruebe que

$$H \subset S$$

siendo H el conjunto de las homotecias. Tenga en cuenta la proposición 1.2.

4.2 Compruebe que

$$M \subset S$$

siendo M el conjunto de los movimientos, estudiados en el § anterior. ¿Cuál es el número k en este caso?

4.3 Compruebe que

$$F \subset S$$

siendo F el conjunto de las traslaciones y homotecias.

4.4 Demostrar que las semejanzas transforman puntos alineados en puntos alineados, razonando como en la demostración de la proposición 1.3.

• PROPOSICIÓN 4.1: *Las semejanzas transforman un ángulo fijo en otro ángulo fijo igual a aquél.*

Demostración: Sea f una semejanza y A, B y C tres puntos no alineados. Se tiene

$$\left.\begin{array}{l} f(A)=A' \\ f(B)=B' \\ f(C)=C' \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{def. 4.1}]{} \left.\begin{array}{l} \{\{\overline{A'B'}\}\}=k\{\{\overline{AB}\}\} \\ \{\{\overline{B'C'}\}\}=k\{\{\overline{BC}\}\} \\ \{\{\overline{C'A'}\}\}=k\{\{\overline{CA}\}\} \end{array}\right.$$

$$\Downarrow \text{ por un criterio de semejanza}$$

$$\overset{\frown}{A'B'C'} \text{ es semejante a } \overset{\frown}{ABC} \Longrightarrow \overset{\frown}{A'B'C'} = \overset{\frown}{ABC}$$

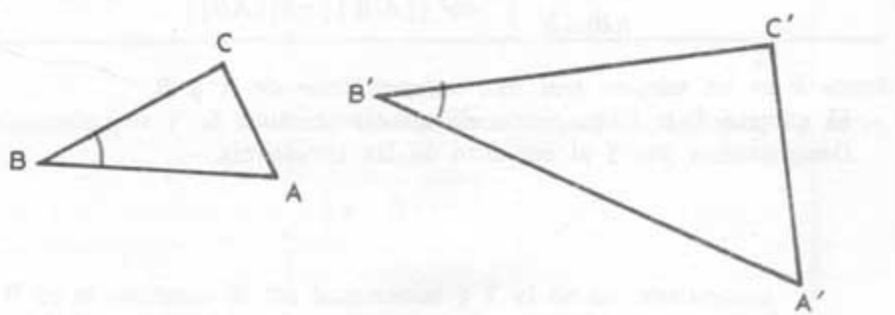


Figura 4.1

EJERCICIO

4.5 Demostrar que las semejanzas forman grupo.

Designemos por S' al conjunto de las transformaciones que pueden obtenerse como producto de un *movimiento* por una *homotecia.*

EJERCICIO

4.6 Demostrar que

$$S' \subset S$$

Consideremos una semejanza f. Sean A y B dos puntos distintos

$$f(A)=A'; \qquad f(B)=B'$$

Por ser f una semejanza, habrá de verificarse

$$\{\{\overline{A'B'}\}\}=k\{\{\overline{AB}\}\}$$

Consideremos un punto cualquiera P, del plano, y tratemos de encontrar el punto

$$P'=f(P)$$

Como se ha visto en la demostración de la proposición 4.1, el triángulo $\overset{\triangle}{P'A'B'}$ debe ser semejante al $\overset{\triangle}{PAB}$. Pero existen dos posibles puntos P' que verifican tal condición (Fig. 4.2). Por tanto, razonando análogamente a como se hizo en el párrafo 10 del § 17, respecto de la figura 10.1, podemos afirmar que existen dos semejanzas en que A se transforma en A' y B en B', una de las cuales conserva el sentido de los ángulos y la otra lo cambia.

Por tanto, *una semejanza queda definida por dos puntos distintos, A y B, sus transformados, A' y B', y por* la condición de conservar *el sentido* o cambiarlo. La razón de semejanza será el número k, tal que

$$\{\{\overline{A'B'}\}\}=k\{\{\overline{AB}\}\}$$

• PROPOSICIÓN 4.2: *Toda semejanza se puede descomponer en producto de un movimiento por una homotecia.*

Demostración: Ya se ha indicado cómo queda determinada una semejanza. Comencemos considerando las semejanzas que conservan el sentido.

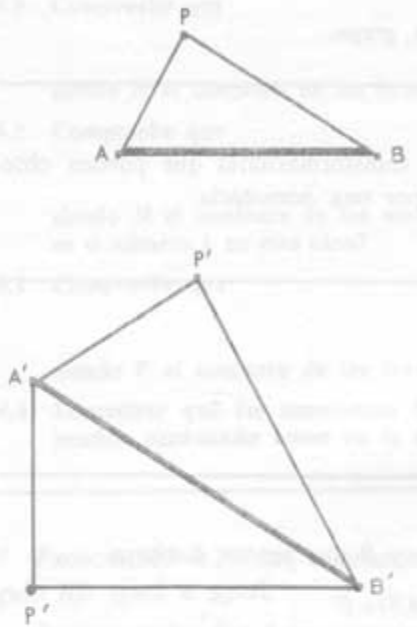


Figura 4.2

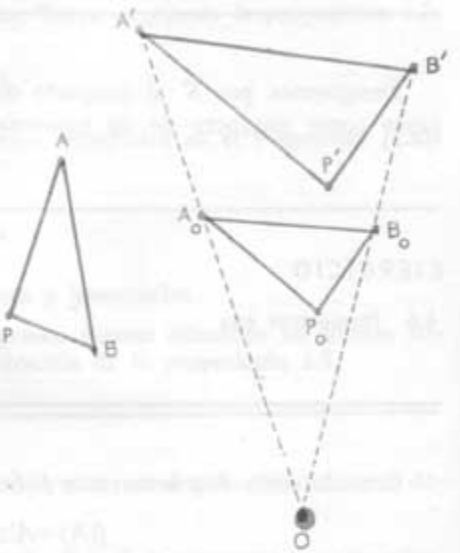


Figura 4.3

Sea la semejanza f definida por los puntos A y B y sus transformados, A' y B', que suponemos conserva el sentido de los ángulos (Fig. 4.3). Sean A_0 y B_0 dos puntos tales que

$$\overline{A_0B_0}=\overline{AB};\qquad \overline{A_0B_0}\|\overline{A'B'};\qquad A_0\notin A'B'$$

es decir, sea $\overline{A_0B_0}$ un segmento fijo igual al $\overline{AB}$ y situado en una recta paralela a la $A'B'$ y distinta de ella. Sea j la isometría que conserva el sentido y transforma A en A_0 y B en B_0. Sea P un punto cualquiera y

$$P_0=j(P)$$

Sea h la homotecia de centro

$$O=A'A_0\cap B'B_0$$

tal que

$$h(A_0)=A'$$

Sea

$$P'=h(P_0)$$

luego

$$hj(P)=P'$$

El triángulo $\triangle A'B'P'$ es semejante al $\triangle A_0B_0P_0$, por ser h una homotecia, y el $\triangle A_0B_0P_0$ igual al $\triangle ABP$, por ser j un movimiento. Por tanto, $\triangle A'B'P'$ es semejante a $\triangle ABP$. Como j, por hipótesis, conserva el sentido y toda homotecia

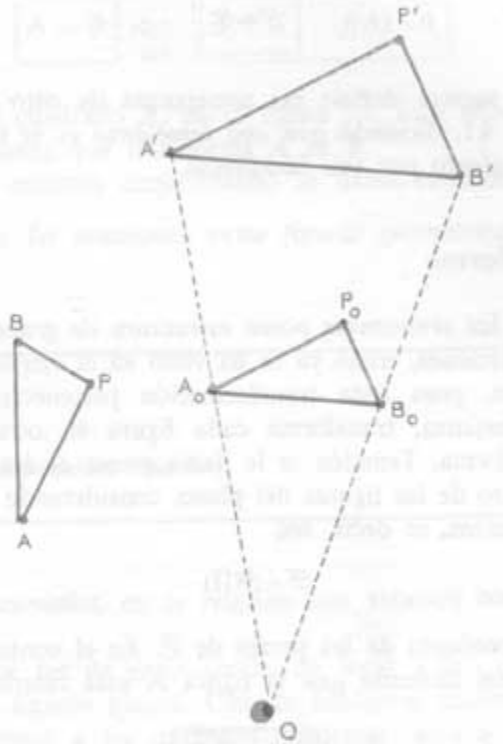


Figura 4.4

conserva el sentido, también la transformación producto hj conservará el sentido.

Por tanto,

$$P' = f(P)$$

es decir, P' es el punto transformado de P en la semejanza dada. Luego

$$hj(P) = f(P)$$

Como esta igualdad es cierta cualquiera que sea P, podemos afirmar que

$$\boxed{f = hj}$$

es decir, que f puede descomponerse en producto de un movimiento por una homotecia.

Si se trata de una semejanza que cambia el sentido, basta, en el razonamiento anterior, hacer que j represente a un movimiento que cambia el sentido, de acuerdo con la figura 4.4.

Del ejercicio 4.6 y de la proposición 4.2 sigue:

- PROPOSICIÓN 4.3:

$$\boxed{S' = S}$$

Este resultado sugiere definir las semejanzas de otro modo, equivalente al de la definición 4.1, diciendo que *una semejanza es la transformación producto de un movimiento por una homotecia.*

5. Grupo equiforme

El conjunto de las semejanzas posee estructura de grupo respecto del producto de transformaciones, como ya se ha visto en el ejercicio 4.5. Este *grupo* se llama *equiforme,* pues toda transformación perteneciente a este grupo, es decir, toda semejanza, transforma cada figura en otra mayor o menor, pero de la misma forma. También se le llama *grupo de las semejanzas.*

Sea $\mathfrak{F}$ el conjunto de las figuras del plano, considerando a las figuras como subconjuntos de puntos, es decir, sea

$$\mathfrak{F} = \mathcal{P}(\Pi)$$

donde $\mathcal{P}(\Pi)$ es el conjunto de las partes de Π. En el conjunto $\mathfrak{F}$ puede establecerse una relación diciendo que la figura A está relacionada con la figu-

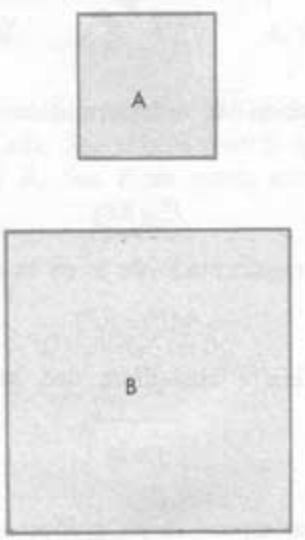


Figura 5.1

ra B, si existe una semejanza que transforma A en B. Para expresar que A está relacionada con B, escribiremos

$$A \sim B$$

Se tiene, pues,

$$\boxed{A \sim B} \underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \boxed{\exists f \in S; \quad f(A) = B}$$

• EJEMPLO 5.1: El cuadrado A, de la figura 5.1, está relacionado con el B, pues hay una semejanza que transforma A en B.

La relación que estamos considerando se llama *semejanza de figuras.*

• PROPOSICIÓN 5.1: *La semejanza entre figuras geométricas es una relación de equivalencia.*

EJERCICIO

5.1 Demostrar la proposición anterior.

Dos *figuras relacionadas,* en la relación que estamos considerando, se dicen *semejantes.*

Esta relación, por ser de equivalencia, da lugar a una clasificación, en el conjunto $\mathcal{F}$, de las figuras planas. Cuando hablamos habitualmente *del cuadrado* no nos referimos a un cuadrado particular, sino a la *clase cuadrado* producida por la relación de semejanza.

La llamada *Geometría Equiforme* estudia precisamente estas clases de figuras. Se llaman *propiedades métricas* a las propiedades comunes a todas las figuras que forman una clase, es decir, a las propiedades que se conservan en las transformaciones de semejanza.

• EJEMPLO 5.2: La propiedad de los lados de los triángulos rectángulos conocida por *teorema de Pitágoras* es una propiedad métrica.

EJERCICIOS

5.2 ¿Es conmutativo el grupo de las semejanzas?

5.3 La semejanza consistente en el producto de una traslación por una simetría axial y por una homotecia de razón negativa, ¿conserva el sentido?

5.4 De los siguientes subconjuntos de S, diga cuáles son subgrupos:

a) **las semejanzas que conservan el sentido**
b) **las semejanzas que cambian el sentido**
c) **los movimientos**
d) **las homotecias**
e) **indique otros subgrupos**
f) **indique otros subconjuntos de *S*, que no sean subgrupos.**

5.5 **Sitúe sobre el esquema de la figura 5.2, donde *L* representa al conjunto de**

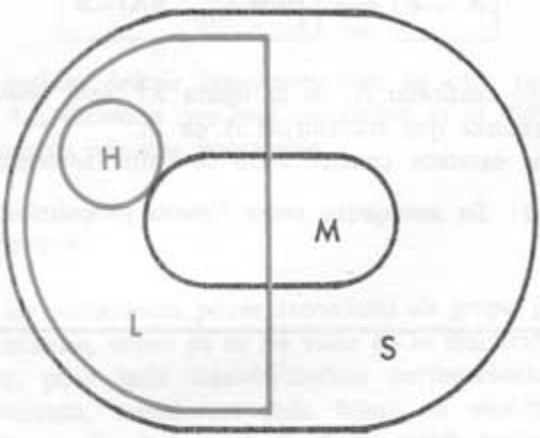


Figura 5.2

las semejanzas que conservan el sentido, cada uno de los siguientes subconjuntos de *S*:

a) **transformación idéntica**
b) **conjunto H_0, de las homotecias de centro *O***
c) **conjunto de las traslaciones y homotecias**
d) **transformación producto de una simetría axial y una homotecia.**

Aunque aquí nos hemos limitado al plano, la semejanza puede también estudiarse en el espacio. Véase, por ejemplo:

ABELLANAS: *Introducción a la Matemática.* Madrid, 1960, capítulos VI y VII.

PUIG ADAM: *Curso de Geometría Métrica I.* Madrid, 1958, capítulo XVI.

Si se desea hacer un estudio analítico de la semejanza, puede verse el libro:

REY PASTOR, SANTALÓ y BALANZAT: *Geometría analítica.* Ed. Kapelusz, Buenos Aires, 1959, capítulo VI.

6. Didáctica de la semejanza en la Escuela Primaria

La forma en que habitualmente se venía presentando la semejanza es ya conocida del Bachillerato Elemental. Se comenzaba definiendo el concepto de «triángulos semejantes» como triángulos que tienen sus ángulos respectivamente iguales y proporcionales sus lados correspondientes. Más explícita-

mente: el triángulo $\triangle ABC$, de ángulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ y $\hat{C}$, y cuyas medidas de los lados

$$\overline{BC},\ \overline{CA}\ \text{y}\ \overline{AB}$$

con una cierta unidad son, respectivamente

$$a,\ b\ \text{y}\ c$$

se dice semejante al $\triangle A'B'C'$ (Fig. 6.1), si

$$\left.\begin{aligned}\hat{A}'&=\hat{A}\\ \hat{B}'&=\hat{B}\\ \hat{C}'&=\hat{C}\end{aligned}\right\}\quad \text{y}\quad \frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}$$

Como estas condiciones no son independientes, basta con que se verifiquen algunas de ellas para que también se cumplan las otras. Estas condiciones

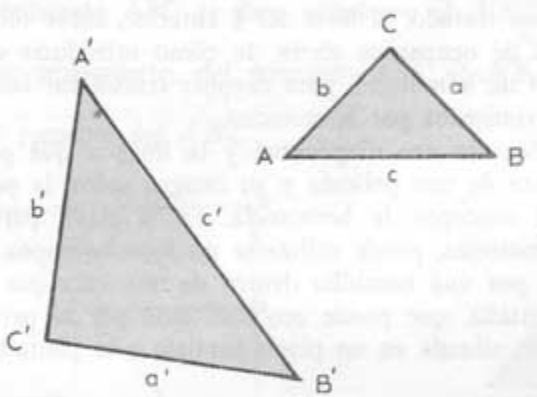


Figura 6.1

mínimas suficientes para que dos triángulos sean semejantes constituyen los *criterios de semejanza* de triángulos. Así, un criterio afirma

$$\left.\begin{aligned}\hat{A}'&=\hat{A}\\ \hat{B}'&=\hat{B}\end{aligned}\right\}\Longrightarrow\left\{\begin{aligned}&\hat{C}'=\hat{C}\\ &\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}\end{aligned}\right.$$

es decir, afirma que dos triángulos con dos ángulos respectivamente iguales son semejantes. Otro criterio afirma que si

$$\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}$$

entonces los triángulos son semejantes. Un tercer criterio afirmaba que basta que

$$\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b} \quad \text{y} \quad \widehat{C'}=\widehat{C}$$

para que sean semejantes los referidos triángulos. En particular, si los triángulos son rectángulos, algunos criterios se simplifican, teniendo en cuenta que ya ambos tienen un ángulo recto y, por tanto, un ángulo igual. Se pasaba después a definir la semejanza de polígonos en general, por descomposición en triángulos, para terminar definiendo la transformación geométrica que hemos llamado semejanza.

Muchos estiman hoy que este orden no es el idóneo para un primer contacto con estas ideas, pues no suele ser suficientemente claro para que el alumno adquiera el verdadero concepto de esta transformación, llevando muchas veces al alumno a considerar como correspondientes en la semejanza a lados o ángulos, de los triángulos, por ejemplo, que no lo son.

Por ello *se tiende actualmente a presentar la semejanza como producto de un movimiento por una homotecia,* con la cual aparecen con claridad cuáles son los lados y ángulos, de un triángulo, que se transforma en los respectivos lados y ángulos del triángulo semejante, que se está considerando, por ejemplo.

Como ya hemos tratado, al final del § anterior, sobre didáctica de los movimientos, hemos de ocuparnos ahora de cómo introducir en la Escuela Primaria el concepto de homotecia, para después considerar las semejanzas como productos de movimientos por homotecias.

La consideración de una diapositiva y la imagen que produce al proyectarla, o de la cinta de una película y su imagen sobre la pantalla, nos llevan intuitivamente al concepto de homotecia. En la clase, para un primer contacto con las homotecias, puede utilizarse un foco luminoso puntual, que puede materializarse por una bombilla dentro de una caja que tiene un pequeño orificio y una pantalla, que puede ser sustituida por la pared. Entonces, una figura plana opaca, situada en un plano paralelo a la pantalla, aparecerá sobre

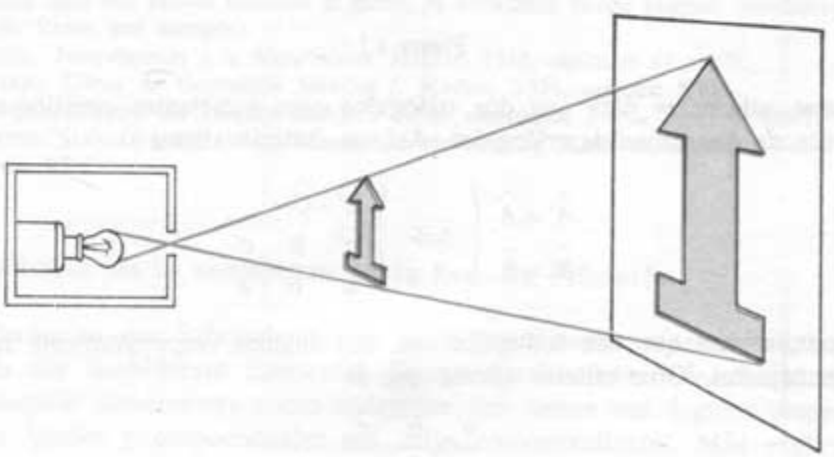


Figura 6.2

ésta, como indica la figura 6.2, dependiendo la razón de homotecia de las distancias del foco luminoso a la figura a proyectar y a la pantalla, y pudiendo obtenerse dicha razón midiendo la figura a proyectar y su imagen. Pueden obtenerse de este modo, experimentalmente, muchas de las propiedades estudiadas para la homotecia. El variado número de figuras que pueden proyectarse y de colocaciones que pueden disponerse, hace que este sistema sustituya con ventaja al obtenido únicamente mediante dibujos.

Una vez obtenida la idea intuitiva, por este procedimiento u otro similar, puede ya pasarse a realizar transformaciones de homotecia, de figuras sencillas, por parte de cada niño sobre su papel.

Efectuando un movimiento y después una homotecia, o bien una homotecia seguida de un movimiento, se habrá efectuado una semejanza.

Los triángulos $\triangle A'B_OC_O$ y $\triangle A'B'C'$, que tienen el ángulo fijo $\hat{A}'$ común y los respectivos lados opuestos $\overline{B_OC_O}$ y $\overline{B'C'}$ paralelos, se dicen *en posición de Thales* (recuérdese el teorema de THALES). Observemos que la homotecia de centro A', que transforma B_O en B', también transforma el triángulo $\triangle A'B_OC_O$ en $\triangle A'B'C'$. Ahora el triángulo $\triangle ABC$ se dice semejante al $\triangle A'B'C'$, pues se puede pasar, mediante un movimiento, del triángulo $\triangle ABC$ al $\triangle A'B_OC_O$, que está en posición de Thales respecto del $\triangle A'B'C'$.

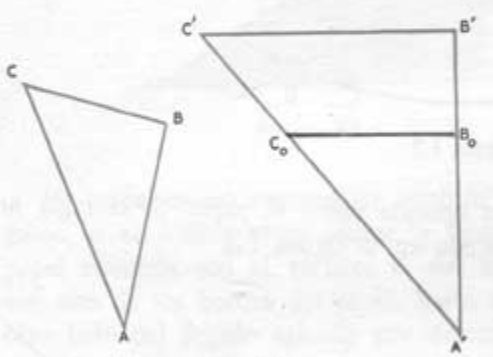


Figura 6.3

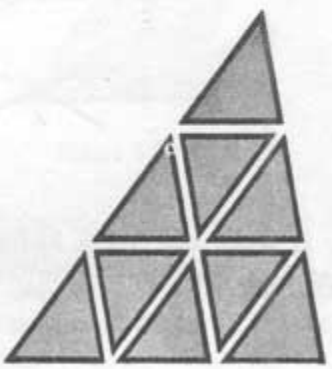


Figura 6.4

Después de haber efectuado una introducción casi exclusivamente experimental, a la semejanza, puede ya iniciarse un estudio racional de algunos de los resultados encontrados previamente por vía experimental. Pero este estudio racional ha de reservarse para un curso 7.° u 8.°

Otra posible introducción experimental al concepto de semejanza de triángulos puede encontrarse en la lección que el profesor PASCUAL IBARRA publicó en el número 11 de la *Revista «Enseñanza Media»*, donde se utilizan triángulos materializados, como indica esquemáticamente la figura 6.4.

19 INSTRUMENTOS GEOMETRICOS

1. Regla de un solo borde

La regla, como es sabido, es el instrumento utilizado para trazar líneas rectas. Debido a su finitud, en realidad lo que permite trazar son segmentos fijos. Para ello se apoya la punta del lápiz y se desliza, de modo que apoye sobre el borde de la regla, que se mantiene fija sobre el papel.

Para comprobar que la regla está bien construida, se fijan dos puntos, *A* y *B*, en la recta trazada con ayuda de la regla y se da la vuelta a la regla, volviendo a trazar la línea que pasa por *A* y *B*, apoyándose en el mismo borde

Figura 1.2

de la regla, que ahora apoya su cara opuesta sobre el papel. Si la regla no está bien construida, ocurrirá lo indicado en la figura 1.2.

2. Portasegmentos

Es el instrumento utilizado para comparar dos segmentos fijos y decidir si están relacionados, en la relación de equivalencia denominada «igualdad de segmentos». Como portasegmentos puede utilizarse una *regla* sobre cuyo borde se marcan sendas señales coincidentes con los extremos del segmento, o bien el *borde* rectilíneo *de un papel o cartulina.* También puede utilizarse como portasegmentos aproximado una *regla graduada.* Operando en el encerado, es frecuente utilizar como portasegmentos un trozo de *cuerda.* Otros posibles portasegmentos son el *compás* y también el *calco* con papel transparente o semitransparente.

El portasegmento no sólo permite comparar dos segmentos fijos dados, sino también construir un segmento fijo igual a otro dado.

3. Portaángulos; círculo graduado

Para transportar ángulos basta tener en cuenta que un ángulo queda determinado por sus semirrectas bordes, y una semirrecta queda determinada por su origen y otro de sus puntos (Fig. 3.1). Por tanto, un papel transparente o traslúcido sobre el que se calcan los puntos, V, A y B, o bien las semirrectas V_A y V_B, puede servir de portaángulos. Si se hace que una esquina del papel coincida con V y uno de los bordes del papel apoye sobre la semirrecta V_A, entonces basta calcar B.

También puede transportarse el ángulo empleando un ángulo recortado en papel o cartulina. En la Escuela pueden utilizarse ángulos recortados y coloreados (del mismo color los que son iguales) para estudiar el semigrupo de los ángulos, lo mismo que se emplean las regletas, o bien tiras de papel coloreadas, para materializar el semigrupo de los segmentos.

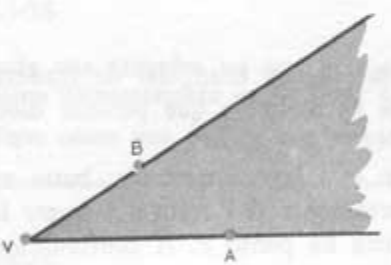


Figura 3.1

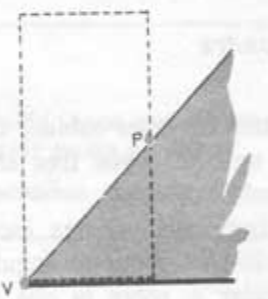


Figura 3.2

Un papel opaco rectangular también puede hacer de transportador de ángulos, si se utiliza como indica la figura 3.2, haciendo que una esquina del papel coincida con el vértice, V, del ángulo y uno de los lados del ángulo con uno de los bordes del papel. Basta entonces marcar el punto P, en que el otro lado del ángulo aparece por detrás del papel.

Los transportadores de ángulos permiten comparar dos ángulos fijos para decidir si están en la relación de equivalencia llamada «igualdad de ángulos», así como construir un ángulo fijo igual a otro dado.

Teniendo en cuenta el isomorfismo existente entre arcos y ángulos centrales (estudiado en el capítulo de magnitudes, párrafo 11), se comprende que todo transportador de arcos es indirectamente un transportador de ángulos, y recíprocamente.

Un portaarcos, y, por tanto, portaángulos, muy utilizado es el transportador de la figura 3.3. Naturalmente este semicírculo graduado es un transportador aproximado.

La biyección existente entre los arcos de una circunferencia, menores o iguales que una semicircunferencia, y sus respectivas cuerdas, implica que

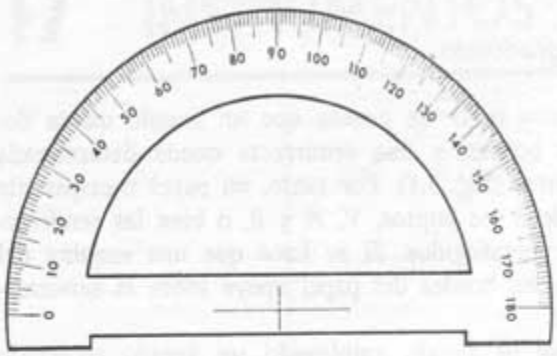


Figura 3.3

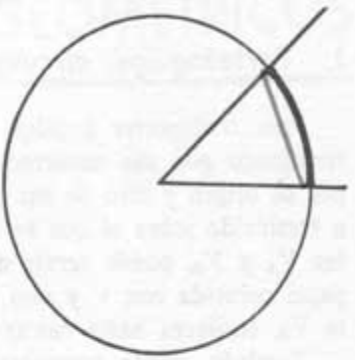


Figura 3.4

todo transportador de segmentos es un transportador de arcos, como sugiere la figura 3.4.

4. Escuadra

Se trata, como es sabido, de una plancha triangular de madera, plástico, etcétera, uno de cuyos tres ángulos es recto, lo que permite dibujar rectas perpendiculares.

Para comprobar si una escuadra está bien construida, basta apoyar uno de los lados del supuesto ángulo recto sobre una recta *r* y trazar la supuesta perpendicular *a*, sobre la que se toma un punto *P*. A continuación se da la vuelta a la escuadra, de modo que su cara opuesta apoye ahora sobre el papel y, apoyando sobre la recta *r* el mismo borde de la escuadra que antes, se traza la perpendicular, *b*, que pasa por *P*. Si la escuadra no está bien construida, las rectas *a* y *b* no coincidirán, quedando como muestran las figuras 4.1 ó 4.2.

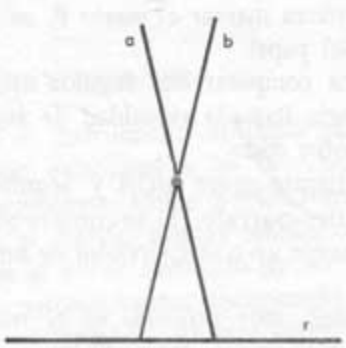


Figura 4.1

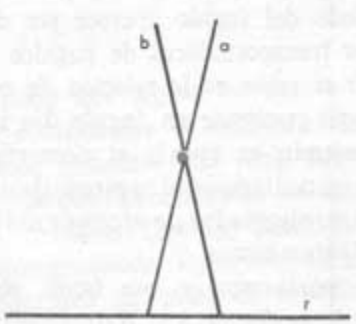


Figura 4.2

Con una regla y una escuadra pueden trazarse rectas paralelas (Fig. 4.3), ya que dos rectas perpendiculares a una tercera son paralelas entre sí.

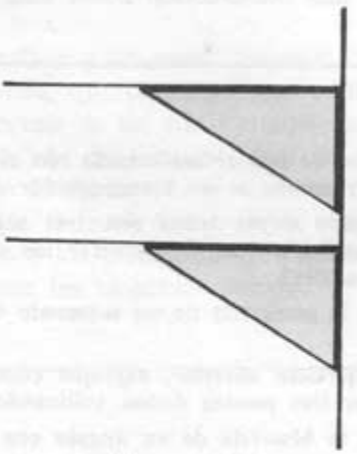


Figura 4.3

EJERCICIOS

4.1 Aunque una escuadra no esté bien construida, ¿por qué permite el procedimiento esquematizado en la figura 4.3 trazar rectas paralelas?

4.2 Explique cómo una regla y una escuadra permiten verificar traslaciones.

5. Compás

Como ya se sabe, el compás consta esencialmente de dos piezas alargadas o *piernas,* de metal u otro material rígido, articuladas por un extremo común, de modo que puedan limitar distintos ángulos al abrir o cerrar su apertura. Los otros dos extremos de las piernas terminan uno en una punta y el otro en otra punta, un portalápiz o un tiralíneas.

Como ya se ha indicado, el compás permite transportar segmentos. En el encerado, un trozo de cuerda sustituye frecuentemente al compás.

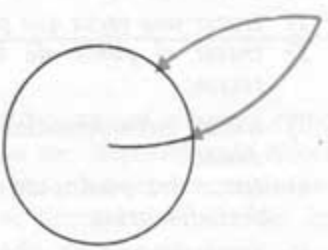


Figura 5.1

Para construcciones de Geometría Esférica se utiliza un compás especial, de piernas curvas. En la figura 5.1 se muestra cómo se utiliza un compás de este tipo, realizando una construcción sobre una pizarra esférica.

EJERCICIOS

5.1 **Explique la generación de una circunferencia con el compás, como consecuencia de que este instrumento es un transportador de segmentos.**

5.2 **Construya un triángulo cuyos lados son tres segmentos dados, utilizando el compás. ¿Qué condición han de verificar los segmentos dados para que la construcción sea posible?**

5.3 **¿Cómo se construye la mediatriz de un segmento dado, utilizando el compás y la regla?**

5.4 **Apoyándose en el ejercicio anterior, explique cómo se construye la circunferencia que pasa por tres puntos dados, utilizando el compás y la regla.**

5.5 **¿Cómo se construye la bisectriz de un ángulo con el compás y la regla?**

5.6 **Dibuje un ángulo y transpórtelo con el compás.**

5.7 **Dados dos segmentos fijos y un ángulo fijo, construya un triángulo, dos de cuyos lados sean iguales a los segmentos dados y el ángulo comprendido sea igual al dado.**

5.8 **Dados un segmento fijo y dos ángulos fijos, construya un triángulo uno de cuyos lados sea igual al segmento dado y tal que los dos ángulos, uno de cuyos lados contiene a ese lado del triángulo, son respectivamente iguales a los ángulos dados.**

5.9 **Construya un triángulo del que se conocen dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos. Estudie las posibles soluciones según sean los datos.**

Otras construcciones geométricas fundamentales con regla y compás puede encontrarlas en:
PUIG ADAM: *Geometría Métrica I.* Capítulo IV.

6. Los instrumentos clásicos

Los instrumentos clásicos de la Geometría griega son la regla y el compás. Con ellos pueden efectuarse las siguientes operaciones elementales:

- con la regla:
  1) *trazar una recta que pase por dos puntos;*
  2) *trazar el punto de intersección de dos rectas;*
- con el compás:
  3) *trazar circunferencias de centro y radio dados;*
  4) *trazar los puntos de intersección de dos circunferencias;*
- con regla y compás:
  5) *trazar los puntos de intersección de recta y circunferencia.*

Estas son las operaciones elementales admisibles con los dos instrumentos clásicos. Por combinación de un número finito de estas operaciones elementales, se realizarán múltiples construcciones como las de los ejercicios del párrafo anterior.

Dados una circunferencia c y un punto exterior P, la construcción de las tangentes a la circunferencia, que pasan por ese punto, no es una operación elemental, pues no es ninguna de las cinco citadas anteriormente, pero puede realizarse por combinación de un número finito de operaciones elementales. En efecto, de acuerdo con la figura 6.1, se comienza trazando la circunferencia de diámetro OP, donde O es el centro de la circunferencia c. Las rectas PA y PB, donde A y B son los puntos de intersección de esta circunferencia con la circunferencia c, son las tangentes pedidas.

EJERCICIOS

6.1 Explique la razón por la que la recta PA es tangente a la circunferencia c de la figura 6.1. ¿Cómo es el ángulo $\widehat{PAO}$?

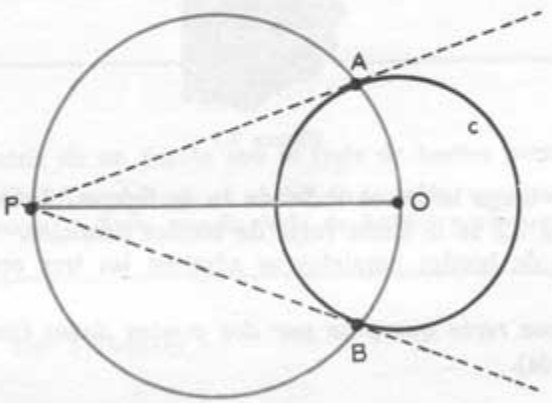


Figura 6.1

6.2 Explique cada una de las operaciones elementales que se han de efectuar sucesivamente para realizar la construcción que acaba de indicarse.

Hay problemas que aparentan ser simples, como la división de un ángulo en tres partes iguales, pero son imposibles de resolver por combinación de un número finito de operaciones elementales, según se demuestra en Matemática Superior. Este problema se llama «trisección del ángulo». Otro problema irresoluble por combinación de un número finito de operaciones elementales es el de la «cuadratura del círculo», consistente en construir un cuadrado de

extensión igual a la de un círculo dado. También es irresoluble así la «rectificación de la circunferencia», consistente en construir un segmento de longitud igual a la de una circunferencia dada.

7. Regla de bordes paralelos

La regla descrita en el párrafo 1 se llama regla de un solo borde porque sólo nos hemos servido allí de un borde de ella. Esta regla de un solo borde puede tener, por ejemplo, la forma indicada en la figura 7.1, aunque lo más

Figura 7.1

frecuente es que tenga la forma indicada en la figura 7.2. Sin embargo, a esta regla de la figura 7.2 se le llama regla de bordes paralelos.

Con la regla de bordes paralelos se admiten las tres operaciones elementales siguientes:

1.ª *Trazar una recta que pase por dos puntos dados* (para lo cual se utiliza un solo borde).

Figura 7.2

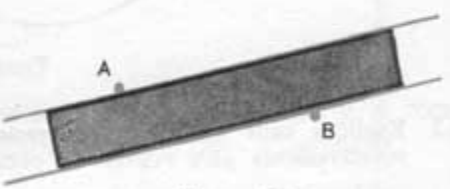


Figura 7.3

2.ª *Dados dos puntos, A y B, cuya distancia es mayor o igual a la distancia entre los dos bordes paralelos de la regla, trazar dos rectas paralelas, que pasen respectivamente por A y B* (Fig. 7.3).

3.ª *Dada una recta, trazar una recta paralela tal que la distancia entre las dos sea igual a la distancia entre los bordes de la regla.*

Se ha probado que, admitiendo estas tres operaciones, con la regla de bordes paralelos pueden realizarse todas las construcciones que se efectúan con

la regla y el compás, admitiendo las cinco operaciones elementales del párrafo anterior.

Naturalmente, algunas construcciones se complican mucho más que con la regla y el compás, lo que hace que carezca de valor práctico.

En la figura 7.4 se muestra, por ejemplo, la construcción de una perpen-

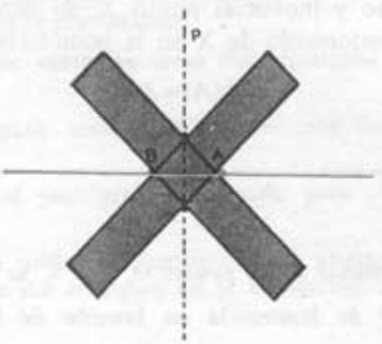


Figura 7.4

dicular p a una recta r dada, para lo que basta tomar dos puntos A y B, sobre r, y operar como indica la figura 7.4.

EJERCICIOS

7.1 Trace la bisectriz de un ángulo con la regla de bordes paralelos.

7.2 Dado un segmento mayor que el ancho de la regla, construya otro segmento igual a tres veces el dado, con la regla de bordes paralelos.

8. Pantógrafo de Sylvester

Los triángulos $\widehat{OAX}$ y $\widehat{OA'X'}$, de la figura 8.1, son semejantes, pues están en posición de Thales, por ser $\overline{AX} \parallel \overline{A'X'}$. La homotecia de centro O, que transforma A en A' transforma $\widehat{OAX}$ en $\widehat{OA'X'}$. En la figura 8.2, el cuadri-

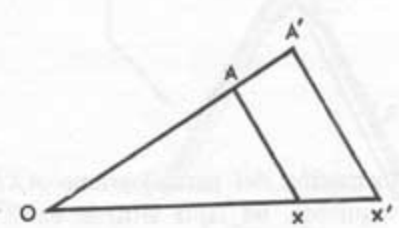


Figura 8.1

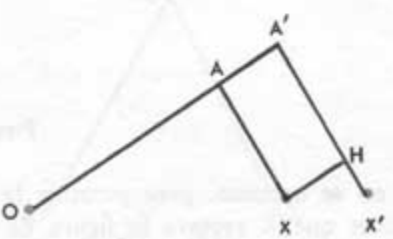


Figura 8.2

látero cuyo borde es la poligonal cerrada $AXHA'A$ es un paralelogramo, y los puntos O, X y X' están alineados, por lo que la homotecia de centro O, que transforma A en A', también transformará X en X'. Si suponemos ahora materializada la figura 8.2, sustituyendo cada segmento por una varilla, de modo que los vértices del paralelogramo $AXHA'$ sean articulaciones, al fijar el punto O sobre el plano y mover el punto X, se moverá también X', siendo en todo caso X' el transformado de X en la homotecia h de centro O, tal que

$$h(A)=A'$$

EJERCICIOS

8.1 Demostrar que al mover X los puntos O, X y X' se mantienen alineados.

8.2 Expresar la razón de homotecia en función de los segmentos $\{\{\overline{OA}\}\}$ y $\{\{\overline{OA'}\}\}$.

Este instrumento, que permite realizar homotecias, se llama «pantógrafo de Sylvester» o simplemente *pantógrafo*. En la figura 8.3 se muestra un pantógrafo realizando una homotecia. Los tornillos de las articulaciones A, X, H,

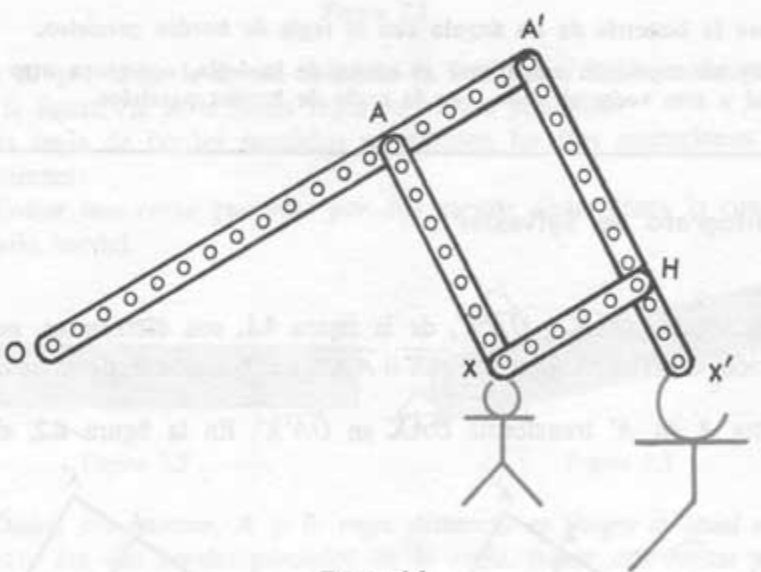


Figura 8.3

y A' no se aprietan, para permitir la deformación del paralelogramo $AXHA'$. Al hacer que X recorra la figura de la izquierda, un lápiz situado en X' irá grabando la figura homotética.

EJERCICIOS

8.3 **Construya, con cuatro tiras de cartulina, un pantógrafo que materialice una homotecia de razón 3.**

8.4 **Construya, con el pantógrafo construido, la figura homotética de un rectángulo que haya dibujado previamente.**

8.5 **¿Qué relación existe entre las áreas del rectángulo de partida y su homotético?**

8.6 **¿Podría el pantógrafo construido realizar una homotecia de razón 1/3? ¿Cómo?**

8.7 **¿Es aprovechable el pantógrafo construido para realizar alguna homotecia de razón negativa?**

8.8 **Dado un triángulo utilice el pantógrafo del ejercicio 8.3 para construir la figura transformada del triángulo en la homotecia, de centro el baricentro y razón $-1/2$.**

9. Compás de reducción

Otro instrumento capaz de realizar homotecias y semejanzas es el compás de reducción de la figura 9.1, en que el punto O es la articulación y se verifica

$$\overline{OX}=\overline{OY}; \qquad \overline{OX'}=\overline{OY'}$$

Su fundamento se explica en la figura 9.2, donde $\overline{XY} \parallel \overline{X'Y'}$, por lo que el triángulo $\widehat{OXY}$ es semejante al $\widehat{OX'Y'}$.

Tiene el inconveniente, sobre el pantógrafo, de que la transformación ha de realizarse punto a punto, y la ventaja de que puede realizarse una semejanza que no sea homotecia.

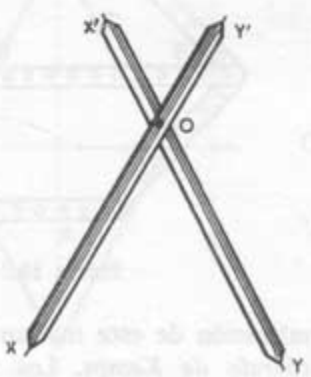


Figura 9.1

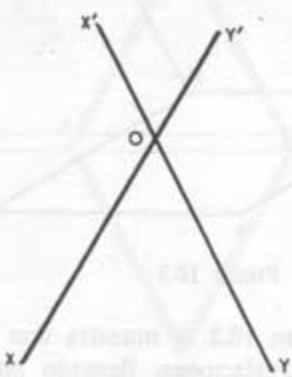


Figura 9.2

EJERCICIOS

9.1 **Construya un compás de reducción que permita materializar una semejanza de razón 2.**

9.2 **Dados dos segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$ no paralelos y tales que**

$$\{\{\overline{A'B'}\}\}=2\{\{\overline{AB}\}\}$$

y un punto P, construir el punto P', imagen de P, en la semejanza que transforma A en A', B en B' y conserva el sentido de los ángulos, utilizando el compás de reducción del ejercicio anterior.

9.3 **¿Puede el compás de reducción del ejercicio 9.1 materializar una semejanza de razón distinta de 2?**

10. Pantógrafo de Kempe

Consiste en un doble paralelogramo articulado (Fig. 10.1). La transitividad de la equipolencia de vectores fijos permite asegurar que

$$\overrightarrow{AA'} \sim \overrightarrow{XX'}$$

Si los puntos A y A' se fijan sobre el plano, al hacer que X recorra una figura, X' recorrerá la figura transformada en la traslación definida por el vector $\{\{\overrightarrow{AA'}\}\}$.

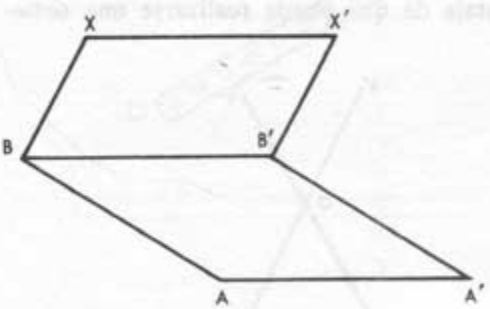


Figura 10.1

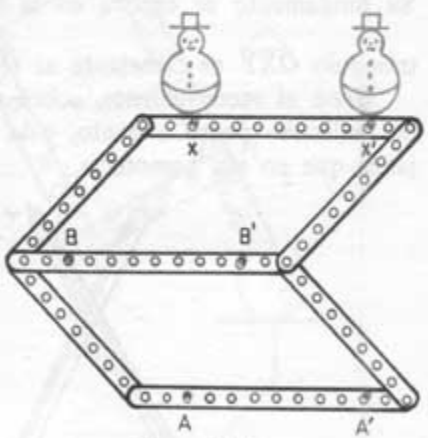


Figura 10.2

En la figura 10.2 se muestra una realización de este instrumento capaz de materializar traslaciones, llamado *pantógrafo de Kempe*. Los puntos A, A', B, B', X y X', de la figura 10.1, son de articulación.

Una aplicación del pantógrafo de Kempe es el instrumento, esquematizado en la figura 10.3, utilizado por los diseñadores. Los puntos A y A' se fijan

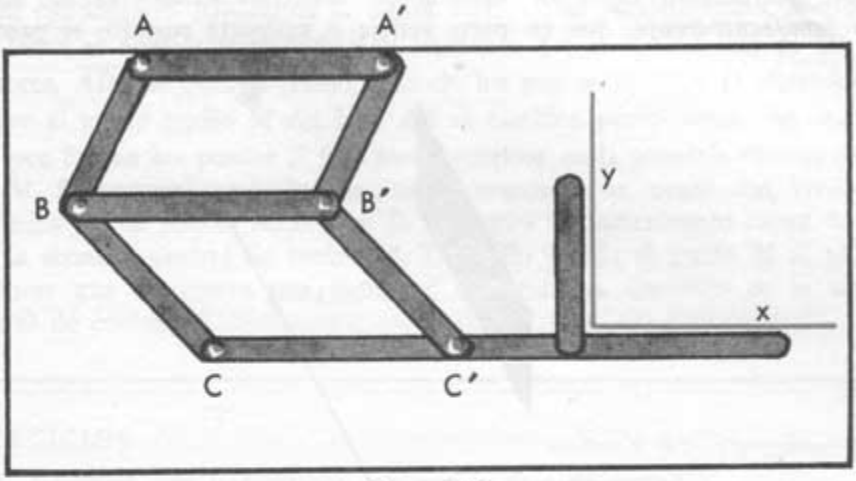


Figura 10.3

sobre el plano. Los puntos A, A', B, B', C y C' son de articulación. Las varillas x e y se mantienen fijas respecto de la $\overline{CC'}$, con lo cual las dos varillas perpendiculares, x e y, se mueven, manteniéndose paralelas a sí mismas.

11. Instrumentos que realizan simetrías axiales

El cuadrilátero $AX'BX$ de la figura 11.1 es un rombo, por lo que los puntos X y X' son simétricos respecto de la recta determinada por los puntos A y B. Esta propiedad sugiere la construcción de un instrumento realizador de simetrías axiales, esquematizado en la figura 11.2. Consta de un rombo

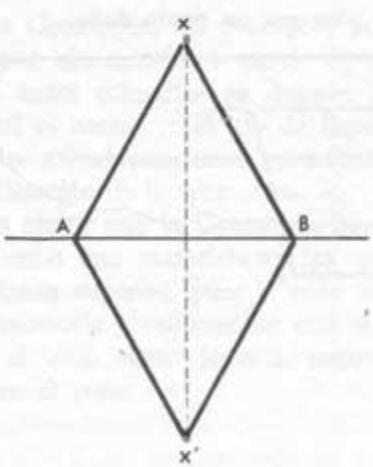


Figura 11.1

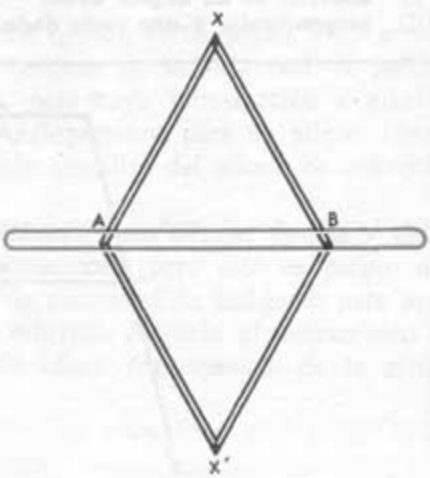


Figura 11.2

articulado en sus cuatro vértices $AX'BX$ y cuyos vértices opuestos A y B pueden deslizarse sobre una varilla (eje de simetría) marcada en rojo.

Otro instrumento capaz de materializar simetrías axiales es un simple *vidrio semitransparente*, que en parte refleja y en parte permite el paso de

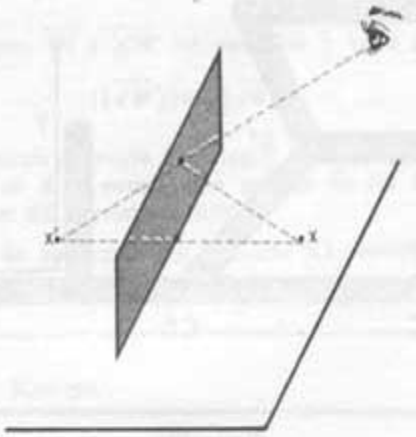


Figura 11.3

la luz. Si se coloca de modo que su plano quede perpendicular al plano del papel (Fig. 11.3), el observador podrá ver, mirando al cristal, el semiplano de detrás del cristal, superpuesto a la figura reflejada del otro semiplano.

EJERCICIO

11.1 Describir cómo utilizaría el vidrio semitransparente para realizar las siguientes construcciones:

a) **simétrico de un punto dado, respecto de una recta dada;**
b) **mediatriz de un segmento fijo dado;**
c) **bisectriz de un ángulo dado;**
d) **perpendicular a una recta dada, que pase por un punto dado.**

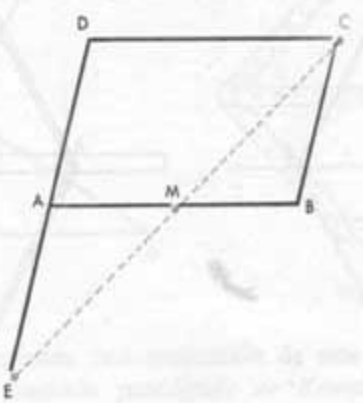


Figura 12.1

12. Instrumentos que realizan simetrías centrales

El cuadrilátero *ABCD*, de la figura 12.1, es un paralelogramo, uno de cuyos lados es doble que el otro, y el segmento $\overline{EA}$ es igual a uno de los lados menores, $\overline{AD}$, del paralelogramo, estando los puntos *E*, *A* y *D* alineados, por lo que el punto medio *M* del lado $\overline{AB}$ es también punto medio del segmento $\overline{EC}$, por lo que los puntos *E* y *C* son simétricos en la simetría central de centro *M*. Si materializamos los segmentos marcados en negro con varillas articuladas en los puntos *A*, *B*, *C* y *D*, se tendrá un instrumento capaz de realizar la simetría central de centro *M*. Para ello se fija el punto *M* al plano y, al hacer que *C* recorra una figura, *E* recorrerá su simétrica en la simetría central de centro *M*.

EJERCICIOS

12.1 Verifique este instrumento con cuatro tiras de cartulina.

12.2 Teniendo en cuenta que la homotecia de razón -1 es la simetría central, construya un pantógrafo de Sylvester capaz de realizar simetrías centrales.

También existen instrumentos más complicados, capaces de realizar productos de homotecias, productos de traslaciones por homotecias, etc. Véanse, por ejemplo, los modelos del profesor BIGUENET, en el libro *El material para la enseñanza de las Matemáticas*, de Ed. Aguilar.

13. Papel que desempeñan los instrumentos en la enseñanza de la Geometría

En Geometría, los conceptos primarios (punto, recta, plano, etc.) se obtienen por abstracción, a partir de observaciones de la vida real. A partir de estos entes primarios se definen otros, para cuya introducción a nivel elemental es necesario el uso de figuras. Análogamente, para un primer contacto con las transformaciones geométricas más sencillas del plano, es conveniente la utilización de instrumentos.

Es cierto que la Geometría puede elaborarse sin dibujar figuras y sin instrumentos que materialicen las transformaciones, pero esto es propio de la enseñanza superior, pues el niño siente la necesidad de imágenes para ayudar a la memoria y comprender con menor esfuerzo. Además, el instrumento interesa al niño como juguete, sugiriéndole ideas, consecuencia de la atención que en él pone.

20 LOS PROBLEMAS

1. Los problemas en la Matemática; su valor formativo y utilitario

Actualmente el vocablo «problema» tiene en la Matemática varias acepciones. Según su significado más divulgado, por *resolver un problema* se entiende aplicar un resultado obtenido previamente en la «teoría» a un caso particular, sustituyendo, por ejemplo, unos valores numéricos en la fórmula apropiada.

Otro segundo tipo de problema, más complejo, en general, consiste en decidir si una cierta relación, que suponemos se verifica entre ciertos objetos matemáticos, es cierta o falsa, es decir, el *problema consistente en demostrar* la certeza o falsedad de una proposición.

El tercer significado de este vocablo en Matemáticas es el *problema de investigación* consistente en la elaboración de una teoría, lo que requiere la construcción de unas definiciones y la obtención de unos teoremas que verifican los objetos matemáticos definidos. En el fondo del problema, en este último sentido, siempre existe una idea intuitiva, cuya matematización constituye el problema. Una vez matematizado el problema, la teoría construida a veces se adapta a explicar otras situaciones concretas, lo que en principio no se había previsto. Los problemas en este sentido son los más difíciles en la Matemática, ya que entrañan la construcción de definiciones, que es el proceso más complicado de la Matemática.

Para comprender la dificultad de un problema matemático, en este tercer sentido de la palabra, puede considerarse el ejemplo siguiente. La situación consistente en mirarnos al espejo es una materialización de una simetría respecto de un plano (el plano del espejo) en el espacio. Intente el problema de estudiar las simetrías respecto de planos en el espacio y sus productos, haciendo para movimientos en el espacio un estudio análogo al hecho para movimientos en el plano en el § 17, a partir de simetrías axiales. Compare los

resultados obtenidos con los que encontrará para este problema en los libros indicados para estudiar semejanzas en el espacio al final del párrafo 5 del § 4.

El enfrentarse a los problemas e intentar superarlos, buscando caminos que conducen a una solución, es una de las actividades más típicamente humanas. La resolución de un problema, matemático o no, es un acto de inteligencia. Aquí radica el *valor formativo* de los problemas. La resolución de problemas matemáticos requiere la utilización de uno de los factores definidores de la inteligencia humana. En general, resolver un problema consiste en idear soluciones para realizar un proyecto propuesto previamente. La actividad consistente en resolver problemas permite, pues, desarrollar la capacidad de pensar, lo mismo que la actividad consistente en hacer gimnasia permite desarrollar la fuerza muscular.

Por otra parte, la resolución de problemas relativos a una cierta teoría permite profundizar en su comprensión, así como notar sus aplicaciones a otras situaciones o a otras disciplinas (Ciencia Aplicada) hechos en los que radica su *valor utilitario.*

2. Los problemas en la Escuela Primaria

En las exposiciones clásicas de Matemática Elemental se pretendía una clara distinción entre «teoría» y «problemas». Primero se estudiaba una teoría y después se realizaban problemas de aplicación de dicha teoría, que a su vez permitían aclarar ciertos puntos que hubieran quedado oscuros.

Hoy, admitidas ya universalmente las ventajas de la conducción eurística de la enseñanza de la Matemática en la Escuela Primaria, no se distingue entre teoría y problemas, suponiendo para el niño la clase activa un continuo problema.

Consideremos un ejemplo. Supongamos una clase de niños que ya manejan la relación pitagórica (Fig. 2.1)

$$x^2+y^2=z^2$$

y se desea estudiar la relación existente entre las medidas de los tres tipos

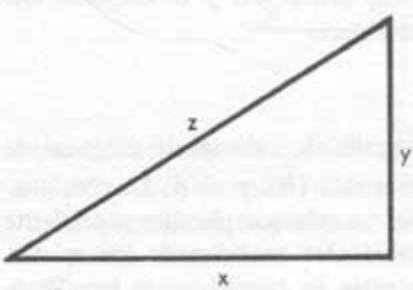


Figura 2.1

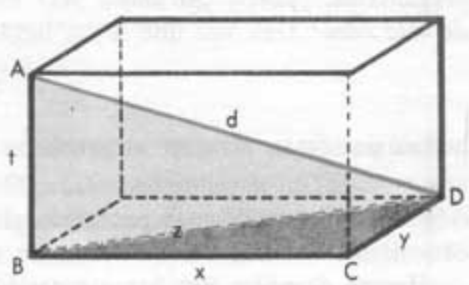


Figura 2.2

de aristas de un ortoedro y la medida de su diagonal (Fig. 2.2). En una exposición clásica, el maestro comenzaría demostrando en el encerado que el triángulo $\widehat{BCD}$ es rectángulo, por lo que, de acuerdo con la figura 2.2

$$x^2+y^2=z^2$$

A continuación demostraría que $\widehat{ABD}$ es rectángulo en B, por lo que

$$d^2=t^2+z^2=$$
$$=t^2+x^2+y^2$$

pasando ahora los niños a resolver problemas consistentes en simples aplicaciones numéricas, como la siguiente: *si tres aristas de un ortoedro miden respectivamente* 4, 6 *y* 3 *cm, ¿cuánto mide la diagonal?*

Hoy se presentaría la cuestión de otro modo, tratando de que el chico, guiado adecuadamente por el maestro, sea quien llegue a descubrir que

$$d^2=x^2+y^2+t^2$$

para lo que el problema se puede plantear, por ejemplo, del siguiente modo: Se dispone de un ladrillo u otro objeto sólido con forma de ortoedro y se hace saber al niño cuál es nuestro propósito, determinar la medida de la diagonal $\overline{AD}$, para lo que el niño dispone de una regla graduada, con la que puede verificar las medidas que desee. Si al mismo tiempo se dispone de un modelo de ortoedro consistente en unas varillas o alambres que materialicen cada una de las doce aristas del ortoedro, engarzadas convenientemente por sus extremos (vértices del ortoedro), el niño podrá imaginar, por similitud de forma con el ortoedro de ladrillo, la diagonal en el interior del ladrillo. Sobre el modelo hueco de alambre puede materializarse la diagonal con una cuerda tensa u otra varilla, y una vez que el niño está familiarizado con los modelos utilizados, puede preguntársele qué tipo de triángulo es el $\widehat{ABD}$ de la figura 2.2. Puede después pasarse a preguntar ¿qué medidas has de tomar en el ladrillo para calcular la diagonal $\overline{AD}$? Si se necesitara más ayuda, podría preguntarse, *¿puede calcularse* $\overline{AD}$ *midiendo la arista* $\overline{AB}$ *y la diagonal* $\overline{BD}$ *de una cara?* Una vez que se ha llegado a establecer

$$t^2+z^2=d^2$$

podría pasarse a plantear el problema más sencillo de calcular la diagonal de una cara ($\overline{BD}$), permitiendo solamente medir aristas ($\overline{BC}$ y $\overline{CD}$). La combinación de ambos problemas permitiría plantear el ya más complicado, consistente en calcular la diagonal del ortoedro a partir de las medidas de las aristas.

Hemos de notar que estos sucesivos problemas en cascada, que han llevado al niño a encontrar la relación buscada, aun planteándolos adecuadamente,

suponen el empleo de mucho tiempo por parte del niño. Por ello, pudiera pensarse que, al ser más rápido, quizá sea más conveniente que el maestro haga la demostración en la pizarra y, una vez se ha llegado a «la fórmula», sea el niño quien la aplique a veinte problemas en que se dan las aristas y se pide la diagonal del ortoedro. Estos son los típicos problemas de «receta de cocina», pues únicamente requieren que el niño sustituya en la «fórmula» o «receta» las letras por los valores numéricos dados, por lo que carecen en absoluto de valor formativo. Lo verdaderamente formativo es el proceso mental que ha de seguir el niño para el descubrimiento de la relación. Este es el problema interesante, tal como se entiende hoy.

También es importante, atendiendo al valor utilitario, que se hagan algunas aplicaciones de la relación obtenida, pero de modo que el niño tenga que discurrir en cada una de ellas. Así, en nuestro ejemplo de la diagonal del ortoedro, la comprobación de que el valor obtenido para la medida de la diagonal, a partir de las medidas de las aristas, coincide con la medida obtenida con la regla, operando, por ejemplo, en el modelo hueco de varillas, es de gran satisfacción para el chico, haciéndole notar la utilidad del ejercicio realizado y aumentando su confianza en estos métodos.

Se pueden también proponer el cálculo de una arista cuando los datos son las otras dos y la diagonal del ortoedro. Otra aplicación puede ser, por ejemplo, la determinación de la distancia del punto A (Fig. 2.3) al punto más alto del poste vertical $\overline{CD}$, al que se llega por un camino que consta de dos tramos, $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, perpendiculares (se suponen A, B y C situados en un terreno horizontal). La consideración de un ortoedro, tres de cuyas aristas son $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$, permite reducir este problema al que ya se había resuelto.

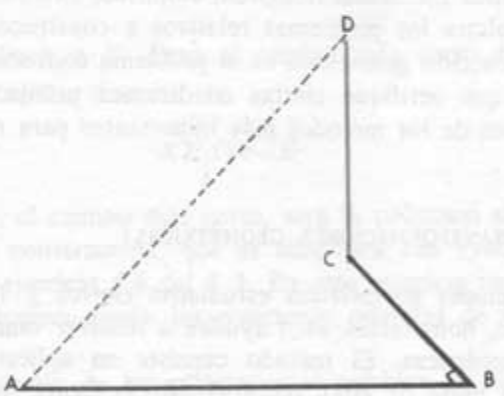


Figura 2.3

En general, es importante *interesar al niño en el problema* a resolver, lo que puede conseguirse planteándolo de modo que aparezca con visible utilidad para él, pues para el niño un problema sin utilidad evidente «no sirve». Se puede también interesar al niño relacionándolo con alguno de sus juegos.

Es importante también formular uno a uno los problemas parciales más simples que conducen al problema final más complejo que desea resolverse, de modo que el niño no se vea abrumado por varias cuestiones, no formulando la siguiente pregunta hasta no tener bien resuelta la anterior.

Los enunciados de los problemas no han de ser largos, de modo que su lectura canse al niño y le impida concentrar su atención en la resolución, debiendo dividirse, en tal caso, en varios problemas parciales más simples.

El camino más didáctico para estudiar un problema coincide casi siempre con el que ha seguido la Humanidad para su esclarecimiento, lo que frecuentemente se expresa diciendo que «el camino didáctico es el camino científico».

Los problemas llamados de «feliz idea», con soluciones rígidas y generalmente insuperables por el niño, tienden a ser sustituidos por problemas en que el niño ha de realizar una actividad consistente en comprobar alguna relación sugerida en el enunciado, o idear procedimientos para realizar proyectos.

3. Problemas geométricos; métodos más importantes para su resolución

Como ya nos ocupamos en el § 13 de las magnitudes de carácter geométrico de la Matemática Elemental (longitud, amplitud, extensión, volumen, etc.), vamos a estudiar ahora los problemas relativos a construcciones geométricas. Realizar una construcción geométrica es el problema consistente en buscar una figura geométrica que verifique ciertas condiciones prefijadas. Estudiemos a continuación algunos de los métodos más importantes para realizar tales construcciones.

MÉTODO DE LAS TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS:

Las transformaciones geométricas estudiadas en los § 17 y 18 (traslaciones, giros, simetrías, homotecias, etc.) ayudan a resolver muchos problemas de construcciones geométricas. El método consiste en aplicar una transformación a la figura (o parte de ella), construyendo la figura transformada, resolver el problema en la figura transformada y aplicar la transformación inversa, para volver a la figura de partida. Naturalmente, el método es útil cuando la figura transformada es más fácil de construir que la primitiva. El tipo de figura a construir sugiere la transformación que más conviene utilizar. Veamos algunos ejemplos.

• EJEMPLO 3.1 *Un arriero, que está trabajando en el punto X, desea abrevar su asno en el río e, de trazado rectilíneo* (Fig. 3.1) *y desde aquí volver al pueblo Y. ¿Por dónde ha de ir si desea seguir el camino más corto?*

Solución: Designemos por s a la simetría de eje la recta e y sea

$$s(Y)=Y'$$

Para cada punto $P \in e$, se tiene:

$$\overline{PY'}=\overline{PY}$$

luego el camino a recorrer de X a Y (tocando en un punto de e) es igual al

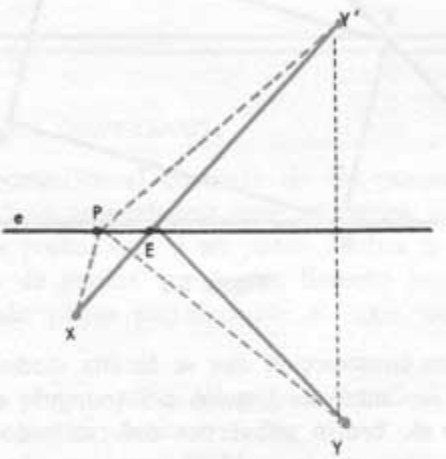


Figura 3.1

camino a recorrer de X a Y'. Pero el camino más corto de X a Y' es el segmento $\overline{XY'}$. Por tanto, si

$$\overline{XY'} \cap e = E$$

la solución, es decir, el camino más corto, será la poligonal abierta XEY.

Otro ejemplo de construcción, que se simplifica con ayuda de una simetría axial, es la del ejercicio 4.6 del § 3. En este ejercicio pueden existir dos soluciones, una o ninguna, según las posiciones relativas de las dos circunferencias y la recta.

En general, al estudio de las soluciones al cambiar los datos se le llama *discusión* del problema.

• EJEMPLO 3.2: El ejercicio 2.13 del § 17 muestra un ejemplo de construcción que se facilita mediante una traslación. Suponiendo construida la figura pedida en este ejercicio, la traslación del vector $\{\{\overrightarrow{AB}\}\}$ transforma el vértice X del paralelogramo en el X' y, por tanto, la semirrecta r (lado del ángulo), que contiene a X, en la semirrecta r', que pasa por X'. Así, el punto X' aparece como intersección de r' y t (el otro lado del ángulo).

Lo que acaba de hacerse, de *suponer la figura construida* para razonar so-

bre ella, es el camino más conveniente para llegar a la construcción de la figura en muchos de estos problemas.

En este otro caso del problema de la figura 3.2, la discusión consistirá en el estudio de las soluciones según la posición de $\overline{AB}$ respecto del ángulo.

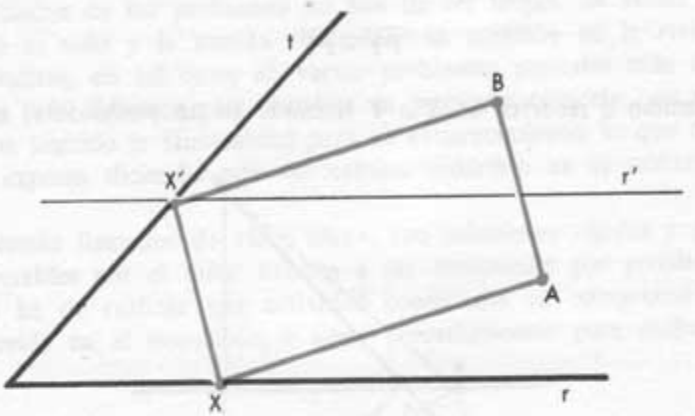


Figura 3.2

• EJEMPLO 3.3: Una construcción que se facilita mediante un giro es la del ejercicio 3.8 del § 17. Como los ángulos del triángulo equilátero son de 60°, basta aplicar el giro de centro un vértice del cuadrado y amplitud 60° para resolverlo.

• EJEMPLO 3.4: El ejercicio 1.20 del § 18 se resuelve fácilmente aplicando una homotecia de centro el centro del círculo del que procede el sector y que transforma un cuadrado auxiliar en el cuadrado problema.

• EJEMPLO 3.5: Una construcción que se facilita ayudándose de una simetría central es la del ejercicio 3.12 del § 17.

He aquí ahora algunos ejercicios de construcciones que se facilitan con el uso de alguna de las transformaciones geométricas estudiadas.

EJERCICIOS

3.1 Dadas dos circunferencias, construir un triángulo rectángulo isósceles tal que el vértice del ángulo recto sea un punto dado y los otros dos vértices estén situados cada uno sobre una de las circunferencias. Haga la discusión.

3.2 Dadas tres rectas, a, b y c, construir un segmento cuyos extremos estén situados cada uno en una de las rectas a y b y cuya mediatriz sea la recta c. Discusión.

3.3 Dada una circunferencia, una recta, un segmento y una dirección, construir un paralelogramo, uno de cuyos lados esté contenido en la recta, el lado opuesto tenga por extremos puntos pertenecientes a la circunferencia y los

otros dos lados sean segmentos fijos pertenecientes al segmento dado y tales que las rectas que los contienen pertenezcan a la dirección dada. Discusión.

3.4 Dados un polígono convexo y un punto interior, construir un segmento cuyos extremos pertenezcan a la poligonal borde del polígono y cuyo punto medio sea el punto dado. Discusión.

3.5 Dadas una circunferencia c y un punto P, construir una recta r que pase por P, tal que

$$r \cap c = \{X, Y\} \Longrightarrow \{\{\overline{PX}\}\} = 2\{\{\overline{PY}\}\}$$

Discusión.

MÉTODO DE LOS LUGARES GEOMÉTRICOS:

Se llama lugar geométrico al conjunto de los puntos que verifican una determinada propiedad (o propiedades), que solamente la verifican esos puntos. Se trata, pues, de probar que si un punto verifica la propiedad, entonces pertenece al conjunto de puntos que hemos llamado lugar geométrico y, recíprocamente, que todo punto perteneciente al lugar geométrico verifica la propiedad.

• EJEMPLO 3.6: Para probar que el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de dos puntos distintos dados, X e Y, es la mediatriz de XY, ha de operarse del modo siguiente. Si M es el conjunto de puntos de la mediatriz m del segmento $\overline{XY}$ y E el conjunto de los puntos que equidistan de X e Y, es decir, si

$$M = \{P \in \Pi \mid P \in m\}$$

$$E = \{P \in \Pi \mid \overline{PX} = \overline{PY}\}$$

se ha de probar que

$$\boxed{P \in M \Longrightarrow P \in E} \quad \text{y} \quad \boxed{P \in E \Longrightarrow P \in M}$$

es decir, se ha de probar que

$$M \subset E \quad \text{y} \quad E \subset M$$

ya que

$$\left.\begin{matrix} M \subset E \\ E \subset M \end{matrix}\right\} \Longrightarrow M = E$$

o, lo que es equivalente, se ha de probar que

$$\boxed{P \in M \Longrightarrow P \in E} \quad \text{y} \quad \boxed{Q \notin M \Longrightarrow Q \notin E}$$

ya que un teorema y su recíproco son equivalentes a un teorema y su contrario, según se vio en el § 6. La demostración de ambas implicaciones, que se esquematiza en la figura 3.3, es conocida del Bachillerato.

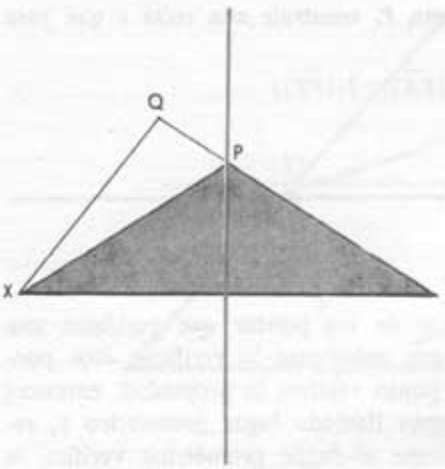


Figura 3.3.

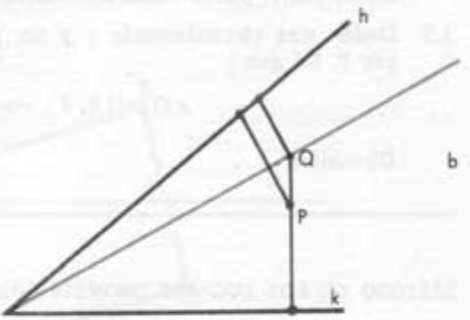


Figura 3.4

• EJEMPLO 3.7: El lugar geométrico de los puntos que equidistan de los lados, h y k, de un ángulo, es su bisectriz b (Fig. 3.4). Si designamos por

$$B=\{P\in\Pi \mid P\in b\}$$
$$M=\{P\in\Pi \mid \text{dist}\,(P,h)=\text{dist}\,(P,k)\}$$

se había de probar que

$$\boxed{P\in B \Longrightarrow P\in M} \quad \text{y} \quad \boxed{P\in M \Longrightarrow P\in B}$$

o bien que

$$\boxed{P\in B \Longrightarrow P\in M} \quad \text{y} \quad \boxed{Q\notin B \Longrightarrow Q\notin M}$$

EJERCICIOS

3.6 Determinar el lugar geométrico de los puntos medios de los segmentos cuyos extremos pertenecen, respectivamente, a dos rectas paralelas y distintas.

3.7 Hallar el lugar geométrico de los centros de las circunferencias de radio constante tangentes a una circunferencia dada.

3.8 Determinar el lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas de longitud constante de una circunferencia dada.

MÉTODO SUSTITUTIVO:

Consiste esencialmente en sustituir las condiciones impuestas a la figura por otras condiciones equivalentes, de modo que resulte más cómoda su construcción.

• EJEMPLO 3.8: Construir un trapecio cuyos lados paralelos sean respectivamente iguales a dos segmentos dados y los otros dos lados sean también respectivamente iguales a otros dos segmentos dados (Fig. 3.5). Basta observar, en la figura 3.5, el punto T, tal que la poligonal cerrada $TBCDT$ es borde de un paralelogramo, siendo $\{\{\overline{AT}\}\}$ igual a la diferencia de las bases del trapecio. Así, la construcción del trapecio puede sustituirse por la construcción del triángulo $\overset{\triangle}{ATD}$, dos de cuyos lados son los lados no paralelos del trapecio y el tercero es la diferencia de los otros dos segmentos dados. Como la construcción de un triángulo, dados los tres lados, es conocida, el problema

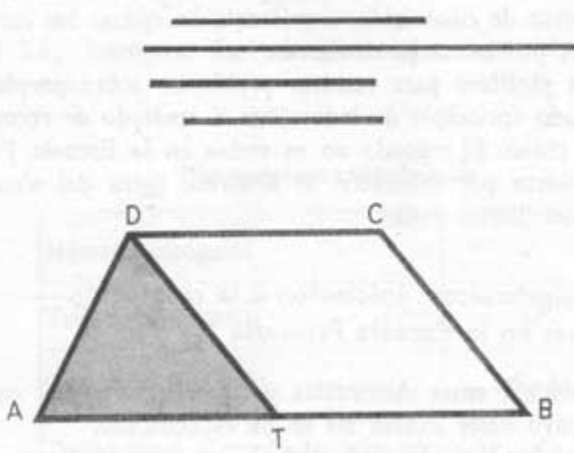


Figura 3.5

se ha simplificado. Una vez construido el triángulo, es inmediato construir el trapecio.

4. Problemas aritméticos; métodos de resolución

Los ejercicios de Aritmética en la Escuela Primaria tradicional se limitaban casi exclusivamente al mecanismo de las cuatro reglas (suma, resta, multiplicación y división), transformando al niño en una máquina de calcular, hasta el punto de que cuando el niño se enfrentaba a cualquier problema aritmético simple de la vida corriente se le podía oír decir frecuentemente «si yo supiera si este problema es de sumar, de restar o de multiplicar, lo haría». Después de conseguir una gran rapidez en el mecanismo de las cuatro reglas es cuando comenzaba ya, en los últimos grados, a resolver problemas reales de índole aritmética, empezando entonces a enterarse del significado de las operaciones que hasta entonces sólo sabía realizar, como un autómata, sin conocer su definición, ya que, en todo caso, las definiciones eran memorizadas mecánicamente, sin tener conciencia de ellas y sin relacionarlas con las técnicas operativas.

El método recomendado hoy es completamente distinto. El niño comienza a realizar operaciones simples, impuestas por la necesidad de resolver problemas reales sencillos que puedan interesarle, manejando desde un principio las definiciones de las operaciones, pero sin necesidad de memorizar tales definiciones. Las regletas de Cuisenaire y los bloques de Dienes, de los que se habló en el § 6, por ejemplo, permiten presentar multitud de situaciones que llevan al niño a descubrir intuitivamente las propiedades de las operaciones. Cuando el niño llega así a las operaciones por un proceso de *abstracción* a partir de múltiples situaciones concretas reales, luego encuentra mucha más facilidad en el proceso de *concreción*, consistente en aplicar los conceptos más generales a resolver problemas particulares.

El método más prolífero para resolver problemas sobre propiedades aritméticas es el llamado «principio de inducción» o «método de recurrencia» estudiado el pasado curso. El método no es viable en la Escuela Primaria por exigir un razonamiento por reducción al absurdo, fuera del alcance de los escolares, incluso del último grado.

5. Problemas algebraicos: Iniciación a la resolución de ecuaciones en la Escuela Primaria

La antigua distinción entre Aritmética y Algebra surge del empleo en el cálculo de letras cuyo valor exacto no se ha especificado.

He aquí un problema algebraico, es decir, que puede plantearse sustituyendo los valores desconocidos e incógnitas por letras:

• EJEMPLO 5.1: Buscar dos números cuya diferencia sea 5 y cuyo producto sea 84.

Planteamiento algebraico de este problema:

Encontrar dos números	x, y
cuya diferencia sea 5	$x-y=5$
y cuyo producto sea 84	$xy=84$

Hay otros problemas cuya formulación algebraica no es tan inmediata, llegando a ella mediante algunos razonamientos más o menos complicados.

• EJEMPLO 5.2: Determinar las medidas de los lados de un rectángulo cuya área sea igual a 4 cm² y cuyo lado mayor sea doble que el menor.

Planteamiento algebraico de este problema:

Medidas de los lados	x, y
Area igual a 4 cm²	$xy=4$
Un lado es doble del otro	$x=2y$

Se trata, pues, de resolver el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} x-2y=0 \\ xy=4 \end{array}\right\}$$

• EJEMPLO 5.3: Encontrar los números reales cuyo triplo sea igual a su cuadrado más uno.

Planteamiento algebraico:

Número incógnita	x
Triplo del número	$3x$
Cuadrado más uno	x^2+1
Triplo igual a cuadrado más uno	$3x=x^2+1$

Se trata, pues, de resolver la ecuación de segundo grado

$$x^2-3x+1=0$$

En los primeros grados, cuando se pide al niño buscar un número cuya suma con 3 sea 5, o, como suele plantearse ahora, *escribir un número dentro del cuadrado,* de modo que se verifique

$$3+\square=5$$

se está en realidad planteando la ecuación

$$3+x=5$$

Obsérvese que verificar una sustracción es, en realidad, resolver una ecuación:

$$3+x=5 \underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} 5-3=x$$

Lo mismo ocurre para la división, operación inversa de la multiplicación. Así, la división exacta

$$6:2=x$$

equivale, por definición, a resolver la ecuación

$$2x=6$$

y la división entera

$$\begin{array}{r|l} 17 & 3 \\ \hline 2 & 5 \end{array}$$

equivale, por definición, a resolver el problema de encontrar dos números, x e y, tales que

$$\begin{gathered} 17=3x+y \\ y<3 \end{gathered}$$

Las regletas se prestan a plantear ecuaciones como la siguiente:

$$\text{verde}+\boxed{}=\text{amarilla}$$

Muchos profesores se inclinan hoy a iniciar el estudio de ecuaciones simples en la Escuela desde los primeros grados. Véase, por ejemplo, el capítulo V del libro:
G. CUTHBERT WEBBER: *Mathematics for Elementary Teachers.* Ed. Addison-Wesley, 1966.

He aquí un posible procedimiento en tal sentido. Se propone un juego consistente en que parte de la clase averigüe un número que sólo conocen algunos alumnos. Como es un número secreto, se designa por una letra, por ejemplo, x. Los que conocen el número calculan el resultado de sumar 3 a su duplo. Se obtiene así 9, por lo que se escribe

$$2x+3=9$$

debiendo la otra parte de la clase averiguar x.

El estudio de los semigrupos de los segmentos, ángulos, arcos, etc., que manejan hoy los escolares de los grados medios, ayuda a familiarizarse mucho antes de lo que antes ocurría con el cálculo literal.

A medida que el niño va ampliando su concepto de número, pasando de naturales a enteros y de enteros a racionales, puede ir resolviendo ecuaciones en que los datos y las incógnitas son números de los tipos respectivamente indicados.

Terminemos este capítulo recomendando un libro que contiene valiosos consejos:
G. POLYA: *Comment poser et résoudre un probléme*. Ed. Dunod.

21 MATERIAL DIDACTICO

1. Algunos ejemplos de material didáctico para la enseñanza de la Aritmética

Seguramente el material didáctico más utilizado en la enseñanza moderna de la Aritmética en la Escuela Primaria es el de las REGLETAS DE CUISENAIRE-GATTEGNO, del que ya tratamos el curso pasado, con ocasión de la *didáctica de las operaciones con números naturales y racionales, el concepto de número primo,* etc.

Otro material muy utilizado es el constituido por fichas coloreadas en varios tonos, de modo que se pueda hablar del conjunto de las fichas rojas, conjunto de las fichas azules, etc. La figura 1.1 sugiere una posible utiliza-

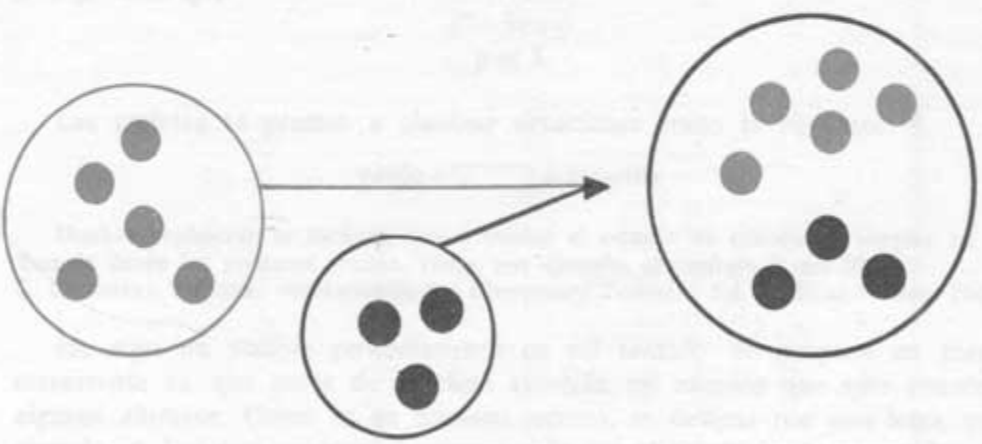


Figura 1.1

ción de este material para la construcción del *conjunto suma* de dos conjuntos disjuntos y, por tanto, para la introducción de la idea de suma de naturales. Otra posible utilización de este material consiste en la *distinción entre*

número primo y compuesto. Un conjunto de doce de estas fichas puede disponerse en forma rectangular, como indican las figuras 1.2 y 1.3, pues el número 12 es compuesto. En cambio, un conjunto de once fichas no puede disponerse en tal forma (Fig. 1.4), a menos que uno de los lados del rectángulo

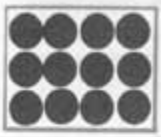


Figura 1.2

Figura 1.3

Figura 1.4

Figura 1.5

sólo conste de una ficha (Fig. 1.5), pues 11 es primo. Otro ejemplo de utilización de las fichas consiste en la ilustración del concepto de *raíz cuadrada entera y su resto,* basado en el hecho de que los conjuntos de fichas, cuyos cardinales son cuadrados perfectos, pueden disponerse en forma de cuadrados (Fig. 1.6). Si cada vez que se añade una nueva ficha se coloca de modo que

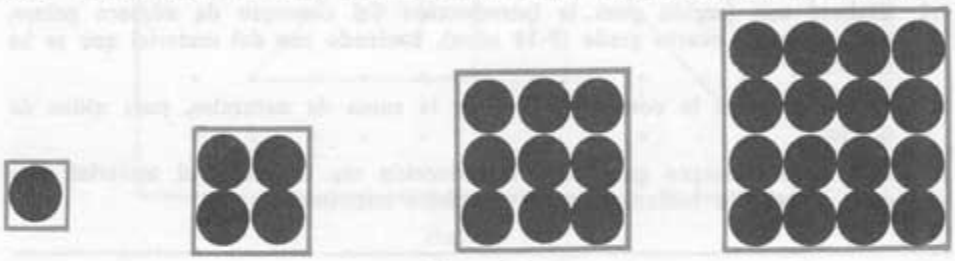


Figura 1.6

complete lo antes posible el siguiente cuadrado, como sugiere la figura 1.7, cada vez que se complete un cuadrado, el cardinal de ese conjunto será un cuadrado perfecto. Si se tiene un conjunto de veintitrés fichas y se disponen

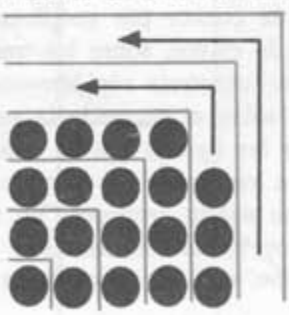


Figura 1.7

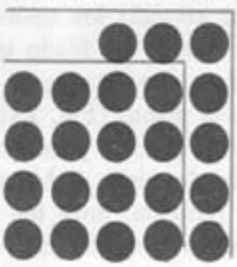


Figura 1.8

como indica la figura 1.8, tratando de construir un cuadrado, se observa que el mayor cuadrado que puede formarse tiene en cada lado cuatro fichas, sobrando siete fichas, que no llegan a completar el siguiente cuadrado, lo que equivale a afirmar que la raíz cuadrada entera de 23 es 4 y el resto 7.

El procedimiento puede desarrollarse para obtener una demostración intuitiva de las reglas de extracción de raíces cuadradas de números de más de una cifra, según puede verse en:

PUIG ADAM: *La Matemática y su enseñanza actual.* Publicaciones de la Dirección General de Enseñanza Media, Madrid, 1960, página 322.

Si se desea conocer otros ejemplos de utilización de fichas coloreadas puede consultarse el número 33-36 de la *Revista de Enseñanza Media*, donde la Rvda. Madre DOLORES PUIG, de las Escuelas del Sagrado Corazón, de Valladolid, describe interesantes muestras en este sentido.

Si se utilizan fichas de varias formas y colores, se dispondrá de un excelente material para la introducción de conceptos conjuntistas, como la intersección, según se indicó al final del § 2.

EJERCICIOS

1.1 Elabore una lección para la introducción del concepto de número primo, para niños de cuarto grado (9-10 años), haciendo uso del material que se ha descrito.

1.2 Lo mismo para la conmutatividad de la suma de naturales, para niños de 6 años.

1.3 Elija otro concepto para cuya introducción sea utilizable el material descrito y haga lo indicado en los ejercicios anteriores.

---

2. Algunos ejemplos de material didáctico para la enseñanza de la Geometría

Comencemos citando los GEOPLANOS. Se conoce por geoplano a una tabla plana, sobre la que se ha fijado una red de clavos, sobre los que se disponen gomas coloreadas, con lo que se consigue construir rápidamente diversas figuras geométricas planas (Fig. 2.1). Tiene sobre el encerado la ventaja de que, al poderse mover, el niño puede observar las figuras que ha construido desde distintos puntos de vista, habituándose a reconocer las formas independientemente de su posición, pues los niños no suelen reconocer un triángulo rectángulo, por ejemplo, si los catetos no los ve uno horizontal y otro vertical, o tiene dificultades en reconocer un rombo, uno de cuyos lados se encuentra en posición horizontal.

La traducción al espacio de esta idea de geoplano nos lleva a los GEOESPACIOS. Constan esencialmente de una caja vacía a la que faltan algunas de las caras y tiene perforados agujeros sobre las caras que conserva. Se pueden así visualizar las figuras del espacio, sustituyendo las rectas por agujas de tricotar o bien cuerdas o gomas que se colocan atravesando los agujeros sobre las caras que conserva. Se pueden así visualizar las figuras del espacio, sus-

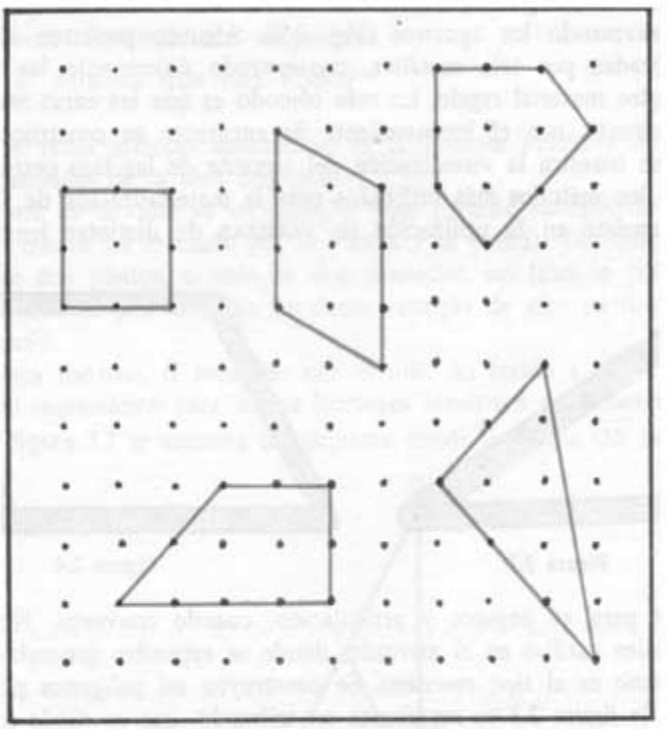


Figura 2.1

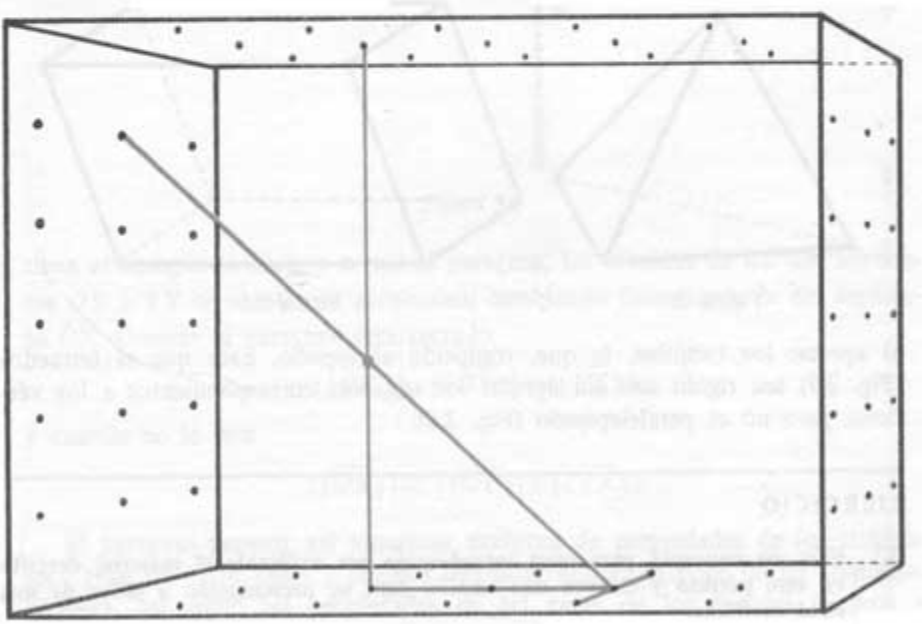


Figura 2.2

tituyendo las rectas por agujas de tricotar o bien cuerdas o gomas que se colocan atravesando los agujeros (Fig. 2.2). Algunos prefieren sustituir las caras perforadas por tela metálica, conservando únicamente las aristas, de madera u otro material rígido. Lo más cómodo es que las caras sean de plástico transparente, con el inconveniente de encarecer su construcción. En la figura 2.2 se muestra la visualización del teorema de las tres perpendiculares.

Uno de los métodos más utilizados para la materialización de figuras geométricas consiste en la utilización de VARILLAS de distintas longitudes con

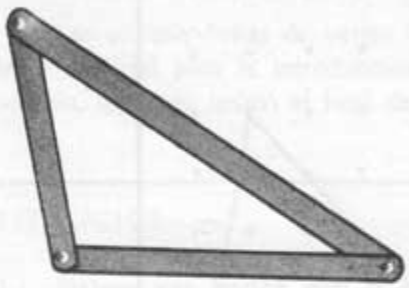


Figura 2.3

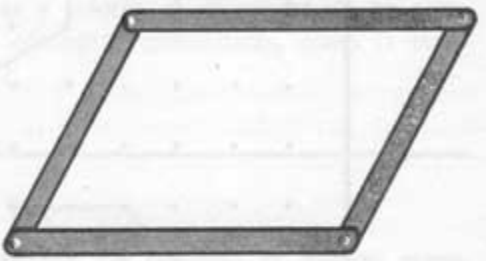


Figura 2.4

dispositivos para su engarce y articulación, cuando convenga. No es difícil encontrar tales varillas en el mercado, donde se expenden generalmente como juguetes, como es el tipo *meccano*. Se construyen así polígonos planos y poliedros. En la figura 2.3 se representa un triángulo, que es rígido aun con los tornillos flojos. En cambio, el cuadrilátero de la figura 2.4 sólo queda rígido

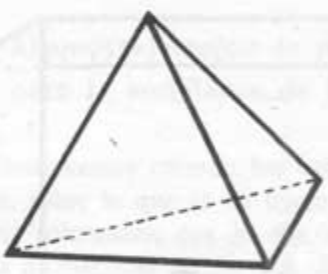


Figura 2.5

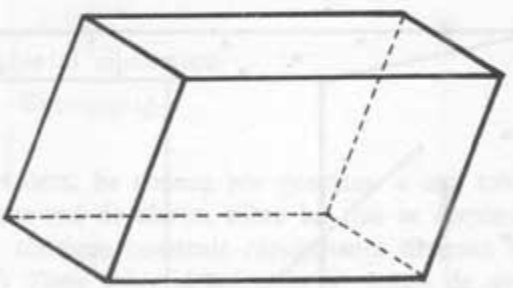


Figura 2.6

al apretar los tornillos, lo que, traducido al espacio, hace que el tetraedro (Fig. 2.5) sea rígido aun sin apretar los engarces correspondientes a los vértices, pero no el paralelepípedo (Fig. 2.6).

EJERCICIO

2.1 Elija un concepto para cuya introducción sea utilizable el material descrito en este párrafo y elabore una lección para su presentación a niños de una edad prefijada.

---

3. Modelos matemáticos sugeridos por el mundo que nos rodea

Muchas veces interesa aprovechar en la Escuela Primaria modelos matemáticos extraídos de la vida ordinaria.

La *puerta de la clase* es un ejemplo, pues permite ejemplificar el concepto de ángulo diedro (el formado por la puerta y la pared). También permite observar que dos puntos, o más de dos alineados, no fijan la posición de un plano, además de presentar un excelente ejemplo de giro en torno a un eje, en el espacio.

En época lluviosa, *el paraguas* que el niño ha traído a clase puede servir de modelo matemático para varias lecciones intuitivas de Geometría.

En la figura 3.1 se muestra un esquema donde la varilla $\overline{OX}$ es la que con-

Figura 3.1

tiene al mango. Al abrir y cerrar el paraguas, las medidas de los dos segmentos $\overline{OY}$ e $\overline{YX}$ se mantienen constantes, cambiando únicamente la del segmento $\overline{OX}$. Cuando el paraguas está cerrado,

$$\{\{\overline{OX}\}\}=\{\{\overline{OY}\}\}+\{\{\overline{YX}\}\}$$

y cuando no lo está

$$\{\{\overline{OX}\}\}<\{\{\overline{OY}\}\}+\{\{\overline{YX}\}\}$$

El paraguas permite así visualizar multitud de propiedades de los triángulos: relación entre lados y ángulos opuestos, ángulo exterior de un triángulo, etcétera, así como las propiedades de las caras de los ángulos triedros y poliedros.

Otros muchos modelos pueden observarse sin salir de la clase. Formas

rectangulares de puertas, ventanas, paredes, encerado, cuartillas. Formas ortoédricas de la tiza, el propio aula, algunos libros, etc.

EJERCICIOS

3.1 Ponga ejemplos de utilización de conjuntos de niños de la clase para introducir ciertos conceptos.

3.2 Ponga otros ejemplos de material didáctico matemático sugerido por el mundo que nos rodea.

4. Construcciones de modelos. Modelos multivalentes

En los párrafos anteriores se han tratado varios ejemplos de utilización de material MULTIVALENTE, es decir, material con el que se pueden crear modelos que visualicen múltiples realizaciones, como las *varillas,* que permitían construir cualesquiera polígonos y poliedros; las *regletas,* que permiten estudiar, entre otras cuestiones, el semigrupo aditivo de los naturales, mediante una materialización del semigrupo aditivo de ciertos segmentos, de modo que sea isomorfo a aquél; los *bloques de Dienes,* citados el pasado curso; la *plastilina,* tan útil para estudiar las propiedades topológicas elementales, enumeradas en el § 14.

Para la fabricación de modelos pueden utilizarse los más diversos tipos de materiales, desde cartón y cartulina, tablex, alambre, plastilina, palillos, hasta plásticos transparentes, siendo aprovechables multitud de elementos que habitualmente se consideran inservibles: botes de hojalata, cajas de cartón, carretes de cintas de máquinas de escribir, carretes de hilo, etc.

Muchos opinan que los materiales no han de encarecer la construcción del modelo, de modo que cada niño, o pequeño conjunto de niños, pueda construir uno propio. La construcción del modelo ya es de por sí altamente formativo, por lo que se estiman de más valor didáctico aquellos modelos sencillos que puede construir el niño que los más complicados y perfectos que el niño ya encuentra construidos, limitándose a manejarlos. Por ejemplo, las fichas de que se habló en el párrafo 1, mejor que compradas, pueden ser recortadas de cartón o cartulina y pintadas por el niño, o sustituidas por chapas-tapones de botellas de bebidas refrescantes, que los niños suelen coleccionar con frecuencia.

Si se desea conocer instrucciones sobre la construcción de modelos menos simples, puede consultarse el capítulo X, debido a PESKETT, de la obra titulada *El material para la enseñanza de las Matemáticas,* Ed. Aguilar.

Hoy se tiende hacia el material multivalente, que sugiere al niño multiplicidad de situaciones aprovechables, lo que está de acuerdo con el sentido dinámico actual de la enseñanza activa, más que hacia la creación de modelos estáticos monovalentes, esto es, modelos prefabricados, que permitan visualizar únicamente una cierta propiedad. Un ejemplo de material monovalente es el que se utiliza a veces para introducir el teorema de Pitágoras, que se esquematiza en la figura 4.1.

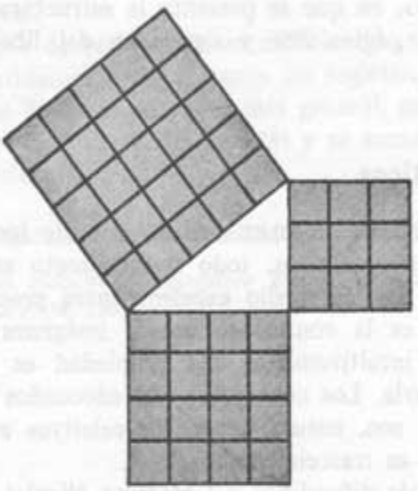


Figura 4.1

5. Juguetes de inspiración matemática

Lo mismo que la vida corriente, muchos juguetes sugieren modelos matemáticos que podemos aprovechar, dado el importante papel que juegan en la vida del niño.

Los juguetes que se expenden por el nombre de juego del «rombo» constan de dos tipos de fichas, unas con forma de triángulos rectángulo-isósceles, y las otras en forma de rombo de lado igual al cateto del triángulo y ángulo menor 45°. Este juego sugiere al niño multitud de consecuencias sobre equivalencia de figuras construidas a partir de las dos citadas.

Los juguetes de inteligencia, como ajedrez, damas, etc., se basan en reglas y son, por tanto, comparables a las estructuras algebraicas de semigrupo, semimódulo, etc., en que también se opera con unos objetos o elementos del conjunto, aplicando unas ciertas reglas o leyes.

La consideración de un juguete con *ruedas* permite al niño obtener experimentalmente la relación: *longitud de circunferencia/diámetro,* sin más que hacer que la rueda pintada o embarrada dé exactamente una vuelta completa, apoyándose sobre un papel situado sobre la mesa, y medir la longitud de la huella que ha dejado sobre el papel y la del diámetro.

Los juguetes con *ruedas dentadas* sugieren el concepto de m. c. m., al buscar el mínimo número de vueltas que ha de dar para que un cierto diente, que está frente a una determinada muesca, vuelva a estarlo de nuevo.

Hay juegos que son fiel reflejo de una estructura algebraica, como el llamado «solitario del 15», en que se presenta la estructura de grupo. Lo encontrará explicado en la página 290 y siguientes del libro del profesor PUIG, citado en el párrafo 1.

6. Films matemáticos

En opinión del profesor NICOLET (suizo), uno de los pioneros y mayores productores de films matemáticos, todo conocimiento matemático posee una base intuitiva, por lo que un medio excelente para presentar al alumno propiedades geométricas es la contemplación de imágenes en dibujo animado. Una vez descubierta intuitivamente una propiedad es cuando puede sentir necesidad de demostrarla. Los conceptos más adecuados para ser presentados por medio de un film son, naturalmente, los relativos a lugares geométricos, en que el movimiento es trascendental.

Uno de los films más difundidos del profesor Nicolet es el que describe la determinación de una circunferencia por tres puntos. Comienzan apareciendo tres puntos (Fig. 6.1). Aparece después una circunferencia que se mueve y cuyo

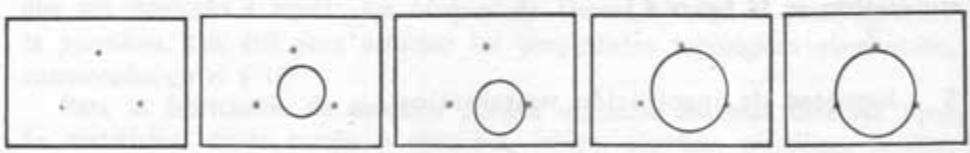


Figura 6.1 Figura 6.2 Figura 6.3 Figura 6.4 Figura 6.5

radio cambia (Fig. 6.2) hasta llegar a tocar a uno de los puntos, al cual queda ligada (Fig. 6.3). Se balancea y cambia su radio, siguiendo ligada al punto, hasta llegar a tocar un segundo punto (Fig. 6.4). Cambia su radio, manteniéndose ligada a los dos puntos, hasta llegar a tomar contacto con el tercer punto (Fig. 6.5). Aparece después otra circunferencia que, después de realizar análoga excursión por el plano, termina por coincidir con la anterior, al quedar ligada a los tres puntos.

7. Papel del material didáctico en la enseñanza de la Matemática. Modelos

El niño, al igual que ha hecho la Humanidad, ha de elaborar los conceptos matemáticos, por abstracción, a partir de realidades concretas. Puede provo-

carse el hecho de que el niño tome contacto con estas realidades concretas, haciendo uso de modelos como los que han sido descritos.

Se llama «modelo» matemático al material útil para sugerir conceptos matemáticos.

También se llama un «modelo», en Matemáticas, a una particularización de una idea más general.

Por ejemplo, la suma de regletas es un modelo de semigrupo conmutativo. Por una parte, la consideración de la suma de regletas, la suma de ángulos, la de arcos, etc., puede llevar al concepto más general, más abstracto, de semigrupo conmutativo. Por otra parte, las regletas y su suma constituyen un ejemplo de semigrupo conmutativo.

Otro libro que puede consultarse si se desean ampliar estas ideas es:

PUIG ADAM: *El material didáctico matemático actual.* Publicación del Ministerio de Educación Nacional, Madrid, 1958.

22 LA MATEMATICA Y LAS EDADES ESCOLARES

1. La Matemática de la Escuela Maternal

Las primeras experiencias matemáticas del niño han de ser dirigidas hacia el concepto de conjunto. El término «conjunto» ha de ser introducido mediante múltiples situaciones, en las que se emplee esta palabra, hasta que llegue a formar parte del léxico del alumno. Los conjuntos que se manejen han de constar de un reducido número de elementos que interesen al niño, animales, payasos de circo, etc., utilizando constantemente dibujos, recortes en colores, fichas, etc. La pertenencia e inclusión conjuntistas pueden también ser iniciadas aquí.

Una vez que el niño aprende a establecer biyecciones, puede clasificar a los conjuntos, lo que lleva a introducir los números naturales, limitándonos a los nueve primeros.

La desigualdad puede introducirse a partir de inyecciones no biyectivas, o bien de suprayecciones no inyectivas, como se indicó en el párrafo 7 del § 9.

Las regletas ya pueden manejarse en la Escuela Maternal, constituyendo un material excelente para la introducción de las relaciones «menor», «igual» y «mayor» y, por tanto, para manejar ordenaciones totales.

Los conceptos topológicos más simples son también propios de la Escuela Maternal. La construcción de poligonales abiertas, introducidas como se indicó en el § 14, al final del capítulo de Topología, es propio de esta edad. La plastilina, el papel y tijeras son esenciales para las construcciones geométricas infantiles. Los geoplanos, ya indicados en el § anterior, ayudan a familiarizarse fácilmente con las formas geométricas más simples.

En todo caso, toda idea matemática debe presentarse subyacente a un juego, que debe presidir toda actividad matemática a esta edad.

Véase, por ejemplo:

G. BROUSSEAU: *Les mathématiques du cours preparatoire*, Ed. Dunod.

2. La Matemática de los seis a los ocho años

Además de los conceptos conjuntistas indicados en el párrafo anterior, pueden ya introducirse la intersección y la unión conjuntista, con sus propiedades conmutativa y asociativa, a través de diagramas de Venn y conjuntos finitos. La unión de conjuntos disjuntos llevará al concepto de suma de sus cardinales y sus propiedades, debiendo comenzar manejando sumas de números de una sola cifra significativa. La sustracción se introduce actualmente inmediatamente después de la adición.

Es también propio de esta edad un primer contacto con los sistemas de numeración, siendo muchos los psicopedagogos de la matemática que aconsejan hoy no comenzar por el sistema de base decimal, sino por una base más pequeña, cuatro o cinco, o incluso dos, no debiendo los niños manejar números de más de una cifra hasta no conocer su significado, como ya indicamos al final del § 9 al estudiar sistemas de numeración.

El niño, guiado por el maestro, debe descubrir las reglas operativas de la adición y sustracción de números de más de una cifra, antes de mecanizar estas técnicas.

La multiplicación, como suma de sumandos iguales, es también propio de este ciclo, aunque hoy hay muchos que critican este procedimiento de introducir la multiplicación.

En cuanto a conceptos geométricos, aparte de los indicados en el párrafo anterior, puede ya el niño realizar construcciones sencillas, ayudándose de algunos instrumentos: regla, compás, escuadras, etc., pero dando más importancia a la adquisición de lenguaje geométrico, adquiriendo experimentalmente las ideas elementales fundamentales.

3. La Matemática de los ocho a los diez años

A partir de construcciones de conjuntos productos puede pasarse a establecer el producto de números naturales y sus propiedades, comenzando por multiplicar números de una sola cifra, para después pasar a presentar el producto de un número de una cifra por otro de más de una cifra, de modo que el niño vaya descubriendo estas técnicas operativas, para terminar multiplicando dos números de más de una cifra.

La división exacta de números sencillos se introduce inmediatamente después de la multiplicación, terminando con la división entera.

A esta edad el niño ya ha de realizar mediciones prácticas de longitud, capacidad y peso, acostumbrándose a apreciar las medidas aproximadas de los objetos que le rodean, familiarizándose con el uso práctico de las unidades más utilizadas de las referidas magnitudes.

También es propio de esta edad la construcción de ciertas figuras geométricas a partir de otras: ángulos como intersección de semiplanos, paralelo-

gramos como intersección de bandas, polígonos a partir de cadenas de triángulos, etc.

4. La Matemática de los diez a los doce años

En este ciclo se debe comenzar a estudiar el número entero. Es curioso observar que, aunque casi siempre el orden que ha seguido la Humanidad, en el establecimiento de las sucesivas abstracciones matemáticas, suele coincidir con el orden didáctico más idóneo, aquí, excepcionalmente, la Humanidad descubrió antes el número racional que el entero, aunque hoy todos están de acuerdo en que ha de presentarse el número entero (modelo de anillo) antes que el racional (modelo de cuerpo).

También la Aritmética decimal, así como la iniciación a la divisibilidad y la potenciación de exponente natural, son propias de este ciclo.

También han de iniciarse las transformaciones geométricas y, en particular, la simetría axial, que permite prescindir de las demás, que resultan de componer simetrías axiales.

El manejo de los semigrupos elementales (segmentos, ángulos, arcos, polígonos) lleva al establecimiento del concepto abstracto de semigrupo, y su multiplicación por naturales permite presentar ejemplos de semimódulos.

El semigrupo de los polígonos conduce a la idea de área, siendo conveniente que el niño maneje este semigrupo y construya, cortando papeles y pegando con papel adhesivo, figuras equivalentes, lo que es mucho más interesante que la memorización de las fórmulas de áreas de las figuras más simples.

Los ángulos centrales y sus arcos se prestan a presentar un primer ejemplo de isomorfismo. También entre polígonos y segmentos se establece fácilmente el isomorfismo indicado en el párrafo 11.2 en el capítulo relativo a magnitudes.

Las definiciones de figuras sencillas: segmentos fijos a partir de semirrectas, segmentos concatenados y consecutivos, círculo, etc., pueden ser ya construidos por el niño.

Al final del ciclo puede introducirse la Geometría del Espacio a partir de modelos apropiados.

5. La Matemática de los doce a los catorce años

Este ciclo puede comenzar estudiando el número racional. A esta edad ya se puede iniciar el método lógico, presentando algunos ejemplos de encadenamiento deductivo fácil. Es también la edad apropiada para comenzar a resolver problemas algebraicos y presentar los polinomios en una indeterminada con coeficientes enteros o racionales.

Puede continuarse el estudio de transformaciones geométricas, con inclusión de la homotecia y semejanza.

Ahora la mente del niño yà está preparada para permitir pasar de la estructura de semigrupo a la de grupo. Pueden presentarse ejemplos de estructura de grupo, como los segmentos orientados o vectores, o los indicados al final del § 17.

La proporcionalidad ya puede ser presentada con seguridad de que va a ser captada con fidelidad, pudiendo hacer uso de representaciones gráficas que hagan ver la linealidad en que se traduce la proporcionalidad directa.

Puede continuarse el estudio de la Geometría del Espacio con el estudio del semigrupo de los poliedros, paralelamente a como en el ciclo anterior se hizo el estudio del semigrupo de los polígonos, llegando así a definir la magnitud «volumen».

Si se desea otra información sobre el tema tratado en este capítulo puede verse el número 72-73 de la revista *Vida Escolar*, publicada por el Centro de Documentación y Orientación Didáctica de la Dirección General de Enseñanza Primaria.

23 ERRORES DEL ESCOLAR

1. Errores más comunes que comete el escolar. Sus métodos correctivos

Estudiemos a continuación algunos de los defectos más frecuentes que se observan en el escolar en su contacto con la Matemática.

AUTOMATIZACIÓN PREMATURA DE SOLUCIONES: El niño, en su necesidad de acción, tiende a menudo a adquirir las reglas que le permiten actuar antes de captar el contenido del proceso que se está desarrollando, tratando de llegar cuanto antes a «la fórmula» que permita efectuar aplicaciones a casos concretos.

El mejor modo de evitar esta tendencia, que, repetimos, es consecuencia de la «necesidad de acción» por parte del niño, es consiguiendo que la acción del niño se desarrolle en el proceso mismo de captación del contenido del proceso.

Una vez captado el contenido del proceso, es cuando puede condensarse éste, mediante la regla o fórmula.

FALTA DE RIGOR EN SU LÉXICO: Una vez captado por el alumno el contenido del proceso, se observa a menudo su dificultad de expresar el resultado obtenido, aun cuando estemos seguros de que la idea ha sido captada correctamente. Es muy difícil expresarse satisfactoriamente cuando apenas se domina el lenguaje.

Para evitar este defecto conviene que el alumno se acostumbre a expresar fielmente su pensamiento, provocando múltiples situaciones en que el niño haya de expresar la idea que desea, acostumbrándose así a buscar las palabras adecuadas a tal fin.

En ningún momento debe ridiculizarse este defecto de expresión del niño, sino tratar, con una crítica suave y persuasiva, de conseguir la autocorrección y perfeccionamiento del propio alumno.

TENDENCIA A MEMORIZAR DEFINICIONES: Por esta escasez de vocabulario en el niño a que acabamos de aludir, se observa a menudo cierta tendencia a memorizar las definiciones de los conceptos que maneja, sobre todo en los niños que desgraciadamente han de utilizar ciertas enciclopedias nefastas. El niño que repite una definición como una cinta magnetofónica pierde el tiempo, pues generalmente no entiende o no atiende a lo que está diciendo.

Para evitar este frecuente error ha de procurarse que el niño intente construir la definición del concepto que ya posee. Después puede comparar la definición que ha llegado a construir, tras varios intentos generalmente, con la más elaborada de su manual, lo que le ayudará a veces a incrementar su léxico. No debe exigirse al niño que sea capaz de repetir en cualquier momento una definición, por importante que nos parezca el concepto a definir, pues ello podría conducir a su memorización automática. La definición es sólo interesante en cuanto que se está construyendo y se está manejando el concepto a definir.

En resumen: la labor del maestro al presentar la Matemática al niño, como se entiende hoy, es la de conductor de la acción creadora del niño y guía de su capacidad descubridora. Hoy ha de ser el niño el centro de la clase, al contrario de lo que ocurría antaño, en que el centro de la clase era el maestro. Si la acción por parte del niño preside la clase, los errores en la formación del escolar se reducirán considerablemente.

2. Algunos errores comunes de tipo aritmético y algebraico

Si el niño comienza a manejar conjuntos después de conocer la numeración, es frecuente que *repita un elemento, a,* por ejemplo, al construir un conjunto finito, lo que carece de sentido, o escriba *2a,* por ejemplo, lo que tampoco significa nada, si los elementos del conjunto no son números. Esto se presenta frecuentemente al construir la unión de dos conjuntos no disjuntos, con el elemento *a* común, por ejemplo. Este error se evita si se presentan las operaciones conjuntistas simples antes que la numeración, como es natural. Tengamos en cuenta que la Humanidad llegó al concepto de número al considerar conjuntos equipotentes, y al de suma a partir de unión de conjuntos disjuntos.

Al iniciarse en la *numeración,* el niño puede mecanizar la escritura de números de varias cifras sin haber captado el significado del valor relativo de una cifra de nuestro sistema de numeración, para evitar lo cual sugerimos seguir los procedimientos indicados el curso pasado al estudiar este tema.

Al iniciarse en cada una de las *operaciones* fundamentales de la Aritmética, puede mecanizar la técnica de la operación sin haber intuido previamente la justificación de dicho mecanismo. Para evitarlo no deben proponerse ejercicios de tales operaciones hasta no dominar la justificación de dicho me-

canismo, a lo que se llega mediante sucesiva consideración de situaciones simples que llevan a su descubrimiento.

Al comenzar a manejar las funciones de *proporcionalidad* directa e inversa, el escolar suele tomar toda función creciente por función de proporcionalidad directa y toda función decreciente por función de proporcionalidad inversa, como se indicó en el § 15. Para evitarlo pueden efectuarse las representaciones gráficas y hacer notar las consideraciones que indicamos en dicho § 15.

3. Algunos errores comunes de tipo geométrico y topológico

Una tendencia frecuente en el niño al dibujar una figura es la *regularización*. Cuando se pide a un escolar que dibuje un triángulo, lo construye equilátero. Si se pide que dibuje un cuadrilátero, suele construir un cuadrado, es decir, el cuadrilátero regular.

Como hay muchas propiedades exclusivas de los polígonos regulares que no tienen los polígonos no regulares, esta tendencia puede conducir a suponer en los polígonos ciertas propiedades que sólo verifican los regulares. Para evitarlo debe acostumbrarse al niño a dibujar un triángulo escaleno, por ejemplo, como modelo general de triángulo. Además, las propiedades específicas del cuadrado, por ejemplo, son más complejas, y por tanto se han de estudiar después que las propiedades válidas para todos los cuadriláteros.

El escolar no suele fijarse en el *borde* de las figuras, por lo que es frecuente oírles decir, por ejemplo, que una diagonal divide al paralelogramo, considerado como conjunto de puntos, en dos triángulos. Esto no es correcto, ya que si se considera el paralelogramo con borde, los puntos de la diagonal no pueden contarse dos veces, como pertenecientes a ambos triángulos con bordes, en que se ha descompuesto el paralelogramo, y si se considera el paralelogramo sin borde y los triángulos también sin borde, entonces se ha efectuado una partición del paralelogramo en tres conjuntos, los dos triángulos abiertos y la diagonal. Conviene, pues, iniciar al escolar en la consideración del borde de las figuras que considere.

Al iniciarse el escolar en el *sistema métrico decimal* puede memorizar mecánicamente los cambios de unidad, sin tomar conciencia de lo que estas unidades significan intuitivamente en el mundo real. Es conveniente que el niño maneje estas unidades, realizando medidas experimentales de objetos para él interesantes, hasta llegar a familiarizarse con ellas y poder calcular intuitivamente la medida de un objeto sin cometer errores excesivos.

24 HISTORIA DE LA MATEMATICA

1. Matemática pregriega

Los más antiguos documentos históricos matemáticos que actualmente se poseen están escritos sobre ladrillos de barro cocido y se deben a los antiguos *caldeos*. De ellos se deduce ya la existencia de una Aritmética en el milenario III antes de J. C. Los caldeos eligieron el número 60 como base de su numeración, quizá porque dividían al año en trescientos sesenta días. También conocían los caldeos la propiedad de ser rectángulo el triángulo cuyos lados miden respectivamente 3, 4 y 5 unidades de longitud. En general, sus conocimientos geométricos se reducían a unos cuantos resultados experimentales correctos aislados.

Los conocimientos de los *egipcios* han llegado a nosotros a través de varios papiros. El más antiguo de ellos data del siglo XX antes de J. C. y en él se resuelve correctamente un problema que requiere el cálculo del área de una semiesfera y otro el volumen de un tronco de cono, aunque son resultados concretos, no enunciados en general, es decir, como teoremas. En otro papiro figura un cuadrado cuya extensión es suma de la de otros dos, lo que hizo sospechar que los egipcios conocían el teorema de Pitágoras. En otro papiro se ha encontrado una tabla de descomposición de fracciones de numerador 2 y algunos problemas de progresiones. La Matemática egipcia, lo mismo que la caldea, no es más que un conjunto de resultados experimentales.

Los documentos matemáticos más antiguos que de los *chinos* han llegado a nosotros datan de unos mil años antes de J. C. El número 3 es elegido como básico por los chinos, que también muestran conocer las medidas de los lados de algunos triángulos rectángulos.

Los primeros documentos *hindúes* que poseemos datan del siglo VII antes de J. C. y constan también de un conjunto de reglas prácticas, obtenidas por vía experimental.

2. La época griega

A *Thales,* mercader griego, que vivió en el siglo VI antes de J. C. y viajó por Egipto, se le considera como el iniciador de la Matemática griega. Poco después, *Pitágoras* y sus discípulos establecen el célebre resultado y comienzan a dar a la Matemática categoría de Ciencia racional.

Pero la *edad de oro* de la Matemática griega comienza a principios del siglo III antes de J. C., cuando los príncipes de los estados helenísticos dispensan una saludable protección económica a las ciencias, ofreciendo a los hombres de ciencia bienestar material, que facilita su exclusiva dedicación a la investigación y a la enseñanza y facilitando la adquisición del material necesario para su tarea científica. El centro de investigación científica más importante de la antigüedad fue Alejandría, donde se construyen la Biblioteca y el Museo y donde centenares de científicos investigan y enseñan, y a donde se vinculan las tres figuras máximas de la Matemática griega: EUCLIDES, ARQUÍMEDES y APOLONIO.

La nota fundamental que aporta el genio griego a la Matemática es la *demostración.*

3. La Matemática en la Edad Media

En el mundo romano la Matemática brilló por su ausencia. Ya en la Edad Media cabe distinguir los aportes chino, hindú y árabe a esta ciencia, siendo el chino el menos importante. La obra hindú más importante se debe a *Bhaskara* (siglo XII). A los hindúes se atribuyen dos aportes trascendentales: el *sistema de numeración posicional de base* 10 y una iniciación al *simbolismo algebraico,* difundidos hacia el Oeste por los árabes, quienes hacia el siglo IX traducen al árabe la obra griega. A los árabes se debe la iniciación a la resolución de algunas ecuaciones elementales.

LEONARDO DE PISA (siglo XIII) contribuyó al despertar matemático de la cultura occidental, al difundir el empleo de las cifras arábigas.

4. La Matemática en la Edad Moderna

El siglo XV, con la «invención de la imprenta» y el «humanismo», trae consigo también el renacimiento de la Matemática.

A los grandes algebristas italianos del siglo XVI, entre los que destacan TARTAGLIA, CARDANO y VIETA, se debe la resolución de las ecuaciones de tercero y cuarto grados.

El concepto de *logaritmo* también aparece en el siglo XVI, y la idea es desarrollada por el escocés NEPPER a principios del XVII, época en la que aparecen las primeras tablas de logaritmos decimales.

En la primera mitad del siglo XVII, el gran matemático y filósofo DESCARTES consigue relacionar la Geometría griega y el Algebra, introduciendo las coordenadas, llamadas, en su recuerdo, cartesianas, e iniciando así la *Geometría Analítica,* que reduce los problemas geométricos a problemas de Algebra.

En la segunda mitad del siglo XVII nace el Análisis infinitesimal, cuya operación esencial es el *paso al límite* de una sucesión indefinida. Sus creadores son NEWTON y LEIBNIZ. En 1684 publica Leibniz una obra de cálculo diferencial, y dos años después aparece su primera publicación relativa a cálculo integral.

Entre los continuadores del Análisis infinitesimal cabe citar a varias generaciones de la familia BERNOUILLI, residentes en Suiza, pero de origen holandés. Uno de sus discípulos fue el más grande matemático del siglo XVIII, EULER.

En general, en el siglo XVIII se desarrolló casi exclusivamente el Análisis infinitesimal.

5. La Matemática del siglo XIX

En 1797 se crea en París la Escuela Politécnica, donde resurge la Geometría, naciendo la Geometría Descriptiva, iniciada por MONGE, y la proyectiva, por PONCELET.

Al mismo tiempo (primer tercio del siglo pasado), LAPLACE publica su *Mecánica Celeste* y su *Teoría Analítica de las Probabilidades.* Es el siglo de oro de la Matemática francesa.

A mediados del siglo XIX ya están construídas las geometrías no euclídeas, citadas el curso pasado en el capítulo de Axiomática, que llevan a una nueva consideración sobre las bases de esta ciencia.

Pero el más grande genio de la Matemática del pasado siglo fue sin duda GAUSS, primero que vio claro el problema de la aparente contradicción a que conducían las geometrías no euclidianas.

Es también el siglo pasado cuando nacen la teoría de conjuntos y la de grupos.

6. Situación actual de la Matemática

El espíritu crítico del siglo XIX, y sobre todo la aparición de las Geometrías no euclídeas, llevaron a revisar muchas de las teorías matemáticas, consideradas hasta entonces como perfectas, encontrándose que muchos de los conceptos básicos carecían de rigor, desde el punto de vista lógico. Ello llevó al alemán PASCH y al italiano PEANO a construir la Geometría y la Aritmética, respectivamente, a partir de un sistema de axiomas o postulados, a finales del pasado siglo.

A Pasch y Peano siguieron otros matemáticos, que continuaron la empresa de construir las teorías matemáticas comenzando por admitir unos conceptos primitivos y, por tanto, indefinibles, y admitir unos axiomas, a los que se imponen dos condiciones, compatibilidad e independencia, que, según unos, han de basarse en la intuición y, según otros, no es necesaria esta condición.

De este modo, la Matemática adquiere un aspecto formal, transformándose en una Ciencia lógica, que a partir de los postulados o axiomas llega a los resultados o teoremas, mediante estricta aplicación de las leyes lógicas.

Cuando ya se creía la Matemática como un edificio lógicamente inexpugnable, surgen las antinomias, la primera de las cuales pone en peligro de derribo al edificio de la Teoría de Conjuntos, levantado por CANTOR. Una segunda antinomia es debida al genio del gran filósofo inglés Bertrand RUSSEL. Una tercera antinomia amenaza a los mismos principios de la Lógica formal.

Para resolver las antinomias, el polaco LUKASIEWICZ inicia en 1920 una Lógica polivalente. Más tarde, GÖDEL ha llegado a demostrar que es imposible demostrar la no existencia de contradicciones en las teorías formales que comprenden a la de los números naturales. No se ha llegado aún a una teoría sobre los fundamentos lógicos de la Matemática que satisfaga a todos, por lo que muchos piensan hoy que un excesivo dominio de la Lógica sobre la intuición y la experimentación, llega a conseguir esterilidad en el razonamiento, conclusión a la que ha contribuido la actual interrelación entre Física y Matemática, por ser la Matemática el lenguaje propio de la Física.

Terminamos indicando algunos libros que permitan ampliar estas ideas sobre Historia de la Matemática y su actual situación:

BABINI: *Historia sucinta de la Matemática.* Ed. Espasa-Calpe, Argentina.
REY PASTOR-BABINI: *Historia de la Matemática.* Ed. Espasa-Calpe, Argentina.
BELL: *Los grandes matemáticos.* Ed. Losada, Buenos Aires.

INDICE ALFABETICO

abeliano, § 5, párrafo 3.
abscisa, § 8, párrafo 10, y § 12, párrafo 1.
aleatorio, § 8, párrafo 1.
algoritmo, § 10, párrafo 10.
amplificación, § 11, proposición 1.3.
amplitud, § 13, párrafo 3.
ángulo, § 13, definición 3.1.
— *orientado*, § 17, párrafo 1.
anillo, § 5, definición 8.1.
— *de integridad*, § 10, definición 4.1.
— *ordenado*, § 10, párrafo 5.
antinomias, § 24, párrafo 6.
aplicación, § 3, párrafo 4.
— *biyectiva*, § 3, párrafo 7.
— *compuesta*, § 3, párrafo 8.
— *continua*, § 14, párrafo 5.
— *exhaustiva*, § 3, párrafo 5.
— *idéntica*, § 3, párrafo 7.
— *producto*, § 3, párrafo 8.
— *sobre*, § 3, párrafo 5.
— *suprayectiva*, § 3, párrafo 5.
Apolonio, § 24, párrafo 2.
arco, § 13, párrafo 5.
área, § 13, párrafo 4.
Argand, § 12, párrafo 12.
argumento, § 12, párrafo 12.
Arquímedes, § 24, párrafo 2.
arquimediano, § 13, párrafo 7.
asociado, § 10, párrafo 7.
asociativa, § 5, definición 2.1.
automatización de soluciones, § 23, párrafo 1.
axiomas, § 6, párrafos 1 y 6.

banda de Möbius, § 14, ejemplo 10.6.
base espacio vectorial, § 16, párrafo 7.
base sistema numeración, § 9, párrafo 14.
Bernouilli, § 8, párrafo 6, y § 24, párrafo 4.
Bhaskara, § 24, párarfo 3.
binario, § 9, párrafo 14.
binomio de Newton, § 7, párrafo 4.
biyección, § 3, definición 7.1.
borde, § 14, párrafo 11, y § 23, párrafo 3.

campana de Gauss, § 8, párrafo 9.
campo de variabilidad, § 15, párrafo 1.
cancelativa, § 9, párrafo 9 y § 10, párrafos 2 y 4.
cantidad, § 13, definición 1.2.
Cántor, § 24, párrafo 6.
característica de Euler-Poincaré, § 14, párrafo 9.
Cardano, § 24, párrafo 4.
cardinal, § 3, párrafo 1, y § 9, párrafo 1.
Cayley, § 3, párrafo 5.
centro de simetría, § 17, párrafo 11.
cierre, § 14, definición 6.2.
cifras exactas, § 12, párrafo 8.
círculo graduado, § 19, párrafo 3.
círculo vicioso, § 6, párrafo 11.
clase de equivalencia, § 4, definición 4.1.
clasificación, § 4, párrafo 4.
coeficiente binómico, § 7, párrafo 4.
combinación lineal, § 16, párrafo 7.
combinaciones, § 7, párrafo 5.
combinatoria, § 7.
compás, § 19, párrafo 5.
— *de reducción*, § 19, párrafo 9.
compatible, § 9, párrafos 7 y 10.
complejo, § 12, párrafo 10.
complemento, § 2, definición 9.3.
componentes de un vector, § 16, párrafo 7.
componentes de una pareja ordenada, § 3, párrafo 1.
condiciones necesaria y suficiente, § 6, párrafo 7.
conexión, § 14, párrafo 8.
conjugado, § 12, párrafo 11.
conjunción lógica, § 6, párrafo 9.
conjunto, § 2, párrafo 1.
— *abierto*, § 14, definición 1.4.
— *cerrado*, § 5, párrafo 1.
— *cociente*, § 4, definición 5.1.
— *de llegada*, § 3, párrafo 2.
— *de partes*, § 2, definición 8.1.
— *de partida*, § 3, párrafo 2.
— *diferencia*, § 2, definición 9.1.
— *vacío*, § 2, párrafo 4.
conmutativa, § 5, definición 2.2.
constante de proporcionalidad, § 13, definición 13.2.

construcción de modelos, § 27, párrafo 4.
contraejemplo, § 6, párrafo 7.
contrario, § 6, párrafo 7.
contrarreciproco, § 6, párrafo 7.
convexa, § 14, definición 7.1.
convexidad, § 14, párarfo 7.
convexización, § 14, definición 7.2.
coordenadas, § 8, párrafo 10.
coordenadas de un vector, § 16, párrafo 7.
coordinable, § 9, párrafo 1.
correlación, § 8, párrafo 11.
correspondencia, § 3, párrafo 2.
— *biunívoca*, § 3, párrafo 7.
— *inversa*, § 3, definición 3.1.
— *unívoca*, § 3, párrafo 4.
cota de error, § 12, párrafo 8.
criterios de semejanza, § 18, párrafo 6.
cuadratura del círculo, § 19, párrafo 6.
cuantificadores, § 6, párrafo 9.
cuantil, § 8, párrafo 5.
cuartilas, § 8, párrafo 5.
cuerpo, § 5, definición 8.4.
Cuisenaire, § 9, párrafo 11.
curva
de Jordan, § 14, ejemplo 10.1.
de probabilidad, § 8, párrafo 8.

decimal
fracción, § 11, párrafo 7.
real, § 12, párrafo 6.
sistema de numeración, § 9, párrafo 14.
denominador de
fracción, § 11, párrafo 1.
número combinatorio, § 7, párrafo 2.
dependencia aleatoria, § 8, párrafo 12.
Descartes, § 8, párrafo 10, y § 24, párrafo 4.
descomposición de polígonos, § 13, definición 4.1.
desviación típica o "standard", § 8, párrafo 5.
diagrama
cartesiano, § 3, párrafo 1.
de barras, § 8, párrafo 4.
de dispersión, § 2, definición 9.3.
diferencia simétrica, § 2, definición 9.3.
dirección, § 4, párrafo 4.
disjuntos, § 2, definición 4.2.
distancia, § 14, párrafo 2.
distribución
binomial, § 8, párrafo 6.
normal, § 8, párrafo 9.
distributiva, § 5, párrafo 7.
disyunción lógica, § 6, párrafo 9.
dividea, § 9, definición 10.1.
división
entera, § 9, definición 10.3.
exacta, § 9, definición 10.2.
divisor propio, § 10, párrafo 8.
dominio de integridad, § 10, definición 4.2.

eje de simetría, § 17, párrafos 4 y 11
elemento, § 2, párrafo 1.
— *cero*, § 5, párrafo 3.
— *unidad*, § 5, párrafo 3.
Elementos de Euclides, § 6, párrafo 1.
entero, § 10.
— *negativo y positivo*, § 10, párrafo 1.
entorno, § 14, definición 3.1.
equipolencia, § 16, párrafo 1.
equipotencia, § 9, definición 1.1.
equivalencia
lógica, § 6, párrafo 7.
por definición, § 9, párrafo 8.
errores, § 12, párrafo 8.
escalar, § 13, párrafo 7.
espacio
métrico, § 14, párrafo 2.
vectorial, § 16, párrafo 8.
topológico, § 14, párrafos 1, 3 y 4.
estructuras
algebraicas, § 1, párrafo 1, y § 5, párrafo 8.
de orden, § 1, párrafo 1, y § 4, párrafo 6.
topológicas, § 1, párrafo 1, y § 14.
Euclides, § 6, párrafo 1, y § 24 párrafo 2.
eudoxiana, § 13, párrafo 8.
Eudoxo, § 13, párrafo 8.
Euler, § 24, párrafo 4.
éxito, § 8, párrafo 6.
experimento aleatorio, § 8.
extensión, § 13, párrafo 4.

factorial, § 7, definición 1.1.
— *generalizada*, § 7, definición 1.4.
factorización, § 10, párrafo 8.
figura
abierta, § 14, definición 6.6.
cerrada, § 14, definición 6.3.
conexa, § 14, párrafo 8.
plana, § 14, definición 6.1.
figuras semejantes, § 18, párrafo 5.
fracaso, § 8, párrafo 6.
fracción, § 11, definición 1.1.
— *irreducible*, § 11, párrafo 1.
— *negativa y positiva*, § 11, definición 5.1.
fractil, § 8, párrafo 5.
frecuencia
absoluta, § 8, párrafo 2.
acumulativa, § 8, párrafo 4.
relativa, § 8, párrafo 2.
frontera, § 14, definición 6.4.
función, § 3, párrafo 9 y § 8, párrafo 10.
— *creciente*, § 15, párrafo 6.
— *de función*, § 3, párrafo 8.
— *de proporcionalidad directa*, § 15, párrafo
— *de proporcionalidad inversa*, § 15, párrafo
— *de una variable*, § 15, párrafo 1.
— *exponencial*, § 15, párrafo 6.
— *logarítmica*, § 15, párrafo 8.
— *segmentaria*, § 15, párrafo 9.
— *uniforme*, § 3, párrafo 4, y § 15, párrafo 1.

Galton, § 8, párrafo 12.
Gattegno o Gateño, § 9, párrafo 11, y § 10, párrafo 13.

Gauss, § 8, párrafo 9, y § 24, párrafo 5.
geoespacio, § 21, párrafo 2.
Geometría
Analítica, § 24, párrafo 4.
Descriptiva, § 24, párrafo 5.
Equiforme, § 18, párrafo 5.
no-euclídea, § 24, párrafo 6.
geoplano, § 21, párrafo 2.
giro, § 17, párrafos 1 y 3.
Gödel, § 24, párrafo 6.
grado, § 13, ejemplo 10.1.
grupo, § 5, definición 4.2.
— *de las homotecias concéntricas*, § 18, párrafo 2.
— *de las homotecias y traslaciones*, § 18, párrafo 3.
— *de las semejanzas*, § 18, párrafo 5.
— *de las transformaciones biyectivas*, § 17, párrafo 5.
— *de las traslaciones*, § 17, párrafo 6.
— *de las traslaciones y giros*, § 17, párrafo 7.
— *de los giros concéntricos*, § 17, párrafo 6.
— *de los movimientos*, § 17, párrafo 10.
— *de los vectores*, § 16, párrafo 4.
— *del cuadrado*, § 17, párrafo 11.
— *del triángulo*, § 17, párrafo 11.
— *equiforme*, § 18, párrafo 5.

heurística, § 9, párrafo 11.
Hilbert, § 6, párrafo 1, y § 12, párrafo 2.
hipérbola, § 15, párrafo 4.
hipótesis, § 6, párrafo 7.
histograma, § 8, párrafo 4.
— *acumulativo*, § 8, párrafo 4.
homeomorfismo, § 14, párrafo 5.
homomorfismo, § 5, definición 6.1.
homotecia, § 18, párrafo 1.

idempotente, § 10, párrafo 12.
identidad, § 3, párrafo 7.
imagen, § 3, párrafos 2 y 5.
imaginario, § 12, párrafo 11.
— *puro*, § 12, párrafo 11.
implicación, § 2, párrafo 1, y § 6, párrafos 6 y 7.
inclusión, § 2, párrafo 3.
inconmensurable, § 12, párrafo 6.
incorreladas, § 8, párrafo 13.
inducción, § 6, párrafo 7.
instrumentos
clásicos, § 19, párrafo 6.
geométricos, § 19.
realizadores de simetrías axiales, § 19 párrafo 11.
realizadores de simetrías centrales, § 19, párrafo 12.
interior, § 14, definición 6.5.
intersección, § 2, definición 4.1.
intervalo abierto y cerrado, § 14, párrafo 1.
inverso, § 5, párrafo 4.
invertible, § 10, párrafo 7.
inyección, § 8, párrafo 6.
irracional, § 12, párrafo 5.
isometría, § 17, párrafo 10.
isomorfismo de
anillos, § 5, párrafo 8.
grupos, § 5, párrafo 6.
retículos, § 10, párrafo 12.
vectores y matrices, § 16, párrafo 9.

Laplace, § 8, párrafos 3 y 9, y § 24, párrafo 5.
Leibniz, § 24, párrafo 4.
Leonardo de Pisa, § 24, párrafo 3.
ley de composición, § 5, párrafo 1.
leyes de exponentes, § 15, párrafo 5.
logaritmación, § 15, párrafo 7.
longitud, § 13, párrafo 2.
Lukasiewicz, § 24, párrafo 6.

magnitud
absoluta, § 13, párrafo 1.
discreta, § 13, párrafo 14.
escalar, § 13, párrafo 7.
eudoxiana, § 13, párrafo 8.
relativa, § 13, párrafo 1.
magnitudes directamente proporcionales, § 13, párrafo 11.
material didáctico, § 21.
matriz, § 16, párrafo 8.
máximo común divisor, § 10, párrafo 10.
máximo elemento respecto de una relación, § 10, párrafo 10.
Mecánica Celeste, § 24, párrafo 5.
meccano, § 21, párrafo 2.
media, § 8, párrafo 5.
mediana, § 8, párrafo 5.
medida, § 13, párrafo 8.
— *indirecta* de magnitudes, § 13, párrafo 12.
medidas de
centralización, § 8, párrafo 5.
dispersión, § 8, párrafo 5.
memorización, § 23, párrafo 1.
método
de las transformaciones geométricas, § 20, párrafo 3.
de los lugares geométricos, § 20, párrafo 3.
sustitutivo, § 20, párrafo 3.
métrica, § 14, párrafo 2.
mínimo común múltiplo, § 10, párrafo 11.
mínimo elemento respecto de una relación, § 10, párrafo 10.
moda, § 8, párrafo 5.
modelo, § 21, párrafo 7.
modelos multivalentes, § 21, párrafo 4.
módulo de un complejo, § 12, párrafo 12.
módulo de un vector, § 16, párrafos 1 y 10.
Monge, § 24, párrafo 5.
múltiplo, § 9, párrafo 10.

Nepper, § 24, párrafo 4.
neutro, § 5, definición 2.3.
Newton, § 7, párrafo 4, y § 24, párrafo 4.
nube de puntos, § 8, párrafo 11.
numeración, § 23, párrafo 2, y § 9, párrafo 12.
numerador de

fracción, § 11, párrafo 1.
número combinatorio, § 7, párrafo 2.
número
aproximado, § 12, párrafo 7.
compuesto, § 10, párrafo 8.
cromático, § 14, párrafos 10 y 11.
de combinaciones, § 7, párrafo 6.
de subconjuntos, § 7, párrafo 6.
primario, § 10, párrafo 11.
primo, § 10, párrafo 8.
números en color, § 9, párrafo 11.

objeto matemático, § 1, párrafo 1.
operación
externa, § 13, párrafos 6 y 9, y § 16, párrafo 5.
interna, § 5, párrafo 1.
inversa, § 9, párrafo 10.
opuesto, § 5, párrafo 4.
orden
de conexión, § 14, definición 8.2.
natural, § 13, párrafo 7.
ordinal, § 9, ejercicio 7.16.
orientabilidad, § 14, ejemplo 10.6.
ortoedro, § 20, párrafo 2.

pantógrafo
de Kempe, § 19, párrafo 10.
de Sylvester, § 19, párrafo 8.
paralelepípedo, § 21, párrafo 2.
paralelismo, § 4, ejemplo 3.1.
paralogismo, § 6, párrafo 11.
pareja ordenada, § 3, párrafo 1.
parte real e imaginaria, § 12, párrafo 10.
partición, § 2, definición 6.2, § 4, párrafo 4 y § 12, ejercicio 5.2.
Pascal, § 7, párrafo 3.
Pasch, § 24, párrafo 5.
Peano, § 9, párrafo 1, y § 24, párrafo 6.
percentil, § 8, párrafo 5.
periódico, § 12, párrafo 6.
permutaciones, § 7, párrafo 7.
pertenencia, § 2, párrafo 1.
Pitágoras, § 24, párrafo 2.
Poincaré, § 14, párrafo 9.
poligonal, § 14, párrafo 11.
polígono, § 14, párrafo 11.
— convexo, § 14, párrafo 7.
polígonos consecutivos, § 13, definición 4.3.
Poncelet, § 24, párrafo 5.
portaángulos, § 24, párrafo 3.
portasegmentos, § 24, párrafo 2.
postulados, § 6, párafo 5.
primos entre sí, § 10, definición 10.2.
probabilidad, § 8, párrafo 3.
problemas, § 20.
algebraicos, § 20, párrafo 5.
aritméticos, § 20, párrafo 4.
geométricos, § 20, párrafo 3.
producto de conjuntos, § 3, párrafo 1.
producto de
hometecias, § 18, párrafos 2 y 3.
número real por vector, § 16, párrafo 5.
simetrías axiales, § 17, párrafo 8.
transformaciones, § 17, párrafo 5.
propiedad métrica, § 18, párrafo 5.
proporcionalidad
directa, § 13, definición 13.1.
inversa, § 13, definición 13.3.
proximidad, § 1, párrafo 1, y § 14, párrafo 4
proyección ortogonal, § 3, párrafo 7.
prueba repetida, § 8, párrafo 6.
punto de
adherencia, § 14, definición 6.2.
un espacio topológico, § 14, párrafo 3.

racional, § 11.
— negativo y positivo, § 11, definición 5.2.
radián, § 13, ejemplo 12.1.
radicación, § 21, párrafo 1
raíz cuadrada, § 21, párrafo 1.
reales, § 12.
recíproco, § 6, párrafo 7.
recorrido, § 8, párrafo 5.
— intercuartílico, § 8, párrafo 5.
recta racional, § 14, definición 1.1.
rectificación, § 13, ejemplo 11.3, y § 19, párrafo 6.
recubrimiento, § 2, definición 5.2.
recurrencia, § 6, párrafo 7.
red, § 10, párrafo 12.
reducción al absurdo, § 6, párrafo 7.
reflexiva, § 4, párrafo 2.
regla de
bordes paralelos, § 19, párrafo 1.
cálculo, § 15, párrafo 8.
un solo borde, § 19, párrafo 7.
regla de tres, § 13, ejercicio 13.2 y párrafo 14.
reglas de signos, § 10, párrafos 2 y 3.
regletas, § 9, párrafo 11.
regletas de Cuisenaire-Gattegno, § 21, párrafo 1.
regresión, § 8, párrafo 11.
regular, § 10, párrafo 4.
regularización, § 23, párrafo 3.
relación
binaria, § 4, párrafo 1.
de equivalencia, § 4, párrafo 3.
de igualdad, § 4, párrafo 3.
de orden parcial, § 4, definición 6.1.
de orden total, § 4, definición 6.2.
opuesta, § 4, ejercicio 6.4, § 9, párrafos 7 y 10, y § 10, párrafo 13.
representación gráfica de funciones, § 15, párrafo 2.
representación gráfica de números,
complejos, § 12, párrafo 12.
racionales, § 11, párrafo 5.
reales, § 12, párrafo 1.
representante canónico,
enteros, § 10, párrafo 1.
racionales, § 11, párrafo 1.
retículo, § 10, párrafo 12.
Riemann, § 14, párrafo 4.

rigor, § 23, párrafo 1.
Russel, § 24, párrafo 6.

sacar factor común, § 9, párrafo 8.
sección, § 14, definición 8.1.
segmento,
fijo, § 13, párrafo 2.
orientado, § 12, párrafo 2, y § 16, párrafo 1.
segmentos consecutivos, § 13, párrafo 2.
semejanza, § 18, párrafo 4.
semianillo, § 9, párrafo 6.
semigrupo, § 5, definición 3.1.
— *aditivo*, § 5, párrafo 3.
— *de elementos positivos*, § 13, párrafo 5.
— *de las transformaciones geométricas*, § 17, párrafo 5.
— *multiplicativo*, § 5, párrafo 3.
semimódulo, § 13, párrafo 6, y § 16, párrafo 10.
sentido de un vector, § 16, párrafo 1.
simetría axial, § 4, ejemplo y § 13, párrafo 2, y § 17, párrafos 1 y 4.
simetría central, § 17, párrafo, 3.
simétrica (relación), § 4, párrafo 2.
simétrico (elemento), § 5, párrafo 4.
simetrización, § 10, párrafo 2.
simplificación, § 11, proposición 1.4.
simplificativa, § 9, párrafo 9.
sistema de numeración, § 9, párrafo 12 y siguientes.
sistema métrico, § 23, párrafo 3.
subanillo, § 5, párrafo 8.
subconjunto, § 2, definición 3.1.
subcuerpo, § 12, párrafo 8.
subgrupo, § 5, definición 5.1.
subretículo, § 10, ejercicio 12.14.
subsemigrupo, § 5, párrafo 5.
sucesos,
incompatibles, § 8, definición 1.2.
independientes, § 8, párrafo 3.
sumatoria, § 8, párrafo 4.
suprayección, § 3, párrafo 5.

tabla de
composición, § 5, ejemplo 1.5.
correlación, § 8, párrafo 11.
distribución normal, § 8, párrafo 9.
tablas de logaritmos, § 15, párrafo 8.
Tartaglia, § 7, párrafo 3, y § 24 párrafo 4.
tesis, § 6, párrafo 7.
triedro, § 21, párrafo 2.
Thales, § 18, párrafo 6 y § 24, párrafo 2.
tipificación, § 8, párrafo 7.
topología, § 14.
topológicamente equivalente, § 14, definición 10.1.
toro, § 14, ejercicio 10.4.
trasnformación, § 3, párrafo 2.
transformaciones geométricas, § 17, párrafo 1.
transitiva, § 4, párrafo 2.
transportador de
ángulos, § 19, párrafo 3.
segmentos, § 19, párrafo 2.
traslación, § 17, párrafo 2.
triángulo aritmético, § 7, párrafo 3.
triángulos semejantes, § 18, párrafo 6.
trisección del ángulo, § 19, párrafo 6.

unidad,
elemento, § 5, párrafo 2.
medida, § 13, párrafo 10.
uniforme,
función (ver función).
propiedad, § 9, párrafos 2 y 5, y § 10, párrafos 2 y 3.
unión, § 2, definición 3.2.
unitario, § 2, definición 3.2.

valor absoluto, § 10, párrafo 2.
valor
formativo, § 1, párrafo 2, y § 20, párrafo 1.
utilitario, § 1, párrafo 2 , y § 20, párrafo 1.
variable,
aleatoria, § 8, párrafo 4.
bidimensional, § 8, párrafo 11.
tipificada, § 8, párrafo 7.
variaciones, § 7, párrafo 8.
varianza, § 8, párrafo 5.
vector, § 12, párrafo 2.
vector
cero, § 16, párrafo 4.
fijo, § 16, párrafo 1.
libre, § 16, párrafo 3.
suma, § 16, párrafo 4.
vectores consecutivos, § 16, párrafo 1.
Venn, § 2, ejemplo 4.2.
vidrio semitransparente, § 19, párafo 11.
Vieta, § 24, párrafo 4.
volumen, § 13, ejercicio 4.12.
Weierstrass, § 12, párrafo 12.

INDICE GENERAL

Prólogo ... 7
Advertencia al lector ... 9
Tabla de los signos más utilizados ... 11

1. **Generalidades** ... 13
   1. Concepto actual de la Matemática ... 13
   2. Importancia formativa y utilitaria ... 14
   3. Necesidad de su didáctica ... 15

2. **Conjuntos** ... 16
   1. Conjuntos: elementos y pertenencia ... 16
   2. Igualdad de conjuntos ... 18
   3. Subconjuntos ... 20
   4. Intersección de conjuntos: conjunto vacío ... 23
   5. Unión de conjuntos: recubrimiento ... 26
   6. Adición de conjuntos: partición ... 29
   7. Otras propiedades de la unión y la intersección ... 30
   8. Conjunto de partes de un conjunto ... 31
   9. Otras operaciones con conjuntos ... 32
   10. Introducción de estos conceptos en la Escuela Primaria ... 34

3. **Correspondencias** ... 36
   1. Producto de conjuntos ... 36
   2. Correspondencias entre conjuntos ... 39
   3. Correspondencia inversa ... 43
   4. Aplicaciones ... 44
   5. Aplicaciones suprayectivas ... 45
   6. Aplicaciones inyectivas ... 47
   7. Biyecciones ... 49
   8. Composición de aplicaciones ... 51
   9. Concepto de función ... 53

4. **Relaciones** ... 55
   1. Relaciones entre los elementos de un conjunto ... 55
   2. Propiedades de las relaciones binarias ... 59
   3. Relaciones de equivalencia ... 63

4. Clases de equivalencia ... 65
5. Conjunto cociente ... 69
6. Relaciones de orden ... 71
7. Las relaciones en la Escuela Primaria ... 74

5. Estructuras algebraicas ... 75
1. Leyes de composición ... 75
2. Algunas posibles propiedades de las leyes de composición ... 79
3. Semigrupos ... 83
4. Grupos ... 85
5. Subgrupos ... 89
6. Homomorfismo e isomorfismo ... 91
7. Propiedad distributiva ... 98
8. Anillos y cuerpos ... 101

6. El edificio matemático ... 106
1. Métodos utilizados en la Matemática ... 106
2. La verdad matemática ... 107
3. Ideas primeras y definiciones: clases ... 108
4. Las definiciones en la Escuela Primaria ... 108
5. Axiomatización de una teoría matemática ... 110
6. Axiomas ... 110
7. Teoremas: clases ... 111
8. Lenguaje matemático ... 119
9. Simbolismo ... 119
10. Rigor matemático ... 122
11. Paralogismos ... 123

7. Combinatoria ... 125
1. Factoriales ... 125
2. Números combinatorios ... 129
3. Triángulo de Tartaglia ... 131
4. Binomio de Newton ... 132
5. Combinaciones: su formación ... 135
6. Número de combinaciones ... 140
7. Permutaciones ... 145
8. Variaciones ... 148

8. Estadística ... 151
1. Fenómenos aleatorios. Sucesos ... 151
2. Frecuencias; sus propiedades ... 155
3. Probabilidades ... 162
4. Variable aleatoria: gráficos de frecuencia ... 173
5. Indices más importantes que caracterizan una distribución ... 182
6. Distribución binomial ... 192
7. Tipificación de la variable ... 197
8. Curva de probabilidad ... 202
9. Distribución normal ... 204
10. Coordenadas cartesianas rectangulares ... 210
11. Variable bidimensional ... 213
12. Regresión lineal ... 216
13. Coeficiente de correlación ... 219

9. Número natural ... 222
1. Equipotencia; conjunto de los números naturales ... 222
2. Adición de naturales ... 227
3. Propiedades de la adición ... 228
4. Multiplicación ... 230
5. Propiedades de la multiplicación ... 232

6. Semianillo de los números naturales ... 233
7. Ordenación total en N ... 234
8. Sustracción de números naturales ... 239
9. Otras propiedades de la suma y el producto de naturales ... 241
10. Divisibilidad y división exacta y entera ... 247
11. Didáctica del número natural ... 253
12. Sistemas de numeración ... 256
13. Sistema de numeración de base cuatro ... 257
14. Sistemas de numeración en otras bases ... 260
15. Paso de un sistema de numeración a otro ... 263
16. Teorema fundamental de los sistemas de numeración ... 266
17. Práctica y didáctica de las operaciones en cualquier base ... 267

10. Número entero. Divisibilidad ... 273
1. Conjunto de los números enteros ... 273
2. Grupo aditivo de los enteros ... 280
3. Semigrupo multiplicativo de los enteros ... 287
4. Anillo de los números enteros ... 291
5. Ordenación de enteros ... 293
6. Sobre la introducción de los enteros en la Escuela Primaria: procedimientos ... 296
7. La relación de divisibilidad en Z ... 298
8. Factorización ... 303
9. Factorización y divisibilidad ... 310
10. Máximo común divisor ... 315
11. Mínimo común múltiplo ... 327
12. Relaciones entre el m.c.d. y el m.c.m. ... 333
13. Didáctica de la divisibilidad ... 338

11. Número racional ... 341
1. Conjunto de los números racionales ... 341
2. Grupo aditivo de los racionales ... 350
3. Semigrupos multiplicativos de los números racionales ... 354
4. Cuerpo de los números racionales ... 358
5. Ordenación de racionales ... 359
6. Representación gráfica de números racionales ... 363
7. Metodología de las fracciones ordinarias y decimales ... 364

12. Ultimas ampliaciones del concepto de número ... 370
1. Conjunto de los números reales ... 370
2. Grupo aditivo de los números reales ... 371
3. Multiplicación de los números reales ... 375
4. Cuerpo de los números reales ... 377
5. Números racionales e irracionales ... 377
6. Expresión decimal de los números reales ... 379
7. El sentido de aproximación: números aproximados ... 385
8. Error absoluto y relativo: cotas ... 385
9. Errores de las operaciones ... 389
10. Conjunto de los números complejos ... 391
11. El cuerpo de los números complejos ... 395
12. Representación gráfica de los complejos ... 398

13. Magnitudes ... 402
1. Concepto de magnitud ... 402
2. Longitud ... 403
3. Amplitud ... 407
4. Extensión ... 408

5. Otros ejemplos de magnitud ... 413
6. Operación externa ... 415
7. Magnitudes escalares ... 418
8. Medida de cantidades de una magnitud escalar ... 421
9. Operación externa sobre una magnitud escalar ... 425
10. Unidad de medida ... 427
11. Magnitudes directamente proporcionales ... 430
12. Medida indirecta de magnitudes escalares ... 432
13. Proporcionalidades ... 433
14. Didáctica y aplicaciones de las magnitudes, su proporcionalidad y su medida ... 440

14. Topología ... 443
1. La recta racional como espacio topológico ... 443
2. Espacio métrico ... 446
3. Espacio métrico y espacio topológico ... 448
4. Topología ... 450
5. Homeomorfismos ... 451
6. Algunos conceptos topológicos en el plano ... 453
7. Convexidad ... 456
8. Conexión ... 459
9. Características de Euler-Poincaré ... 461
10. Propiedades topológicas ... 463
11. Actividades del niño basadas en conceptos topológicos ... 466

15. Funciones elementales ... 470
1. Funciones de una variable ... 470
2. Representación gráfica de funciones de una variable ... 472
3. Función de proporcionalidad directa ... 475
4. Función de proporcionalidad inversa ... 476
5. Leyes de exponentes ... 478
6. Función exponencial ... 481
7. Logaritmación ... 483
8. Función logarítmica ... 485
9. Las funciones y su representación gráfica en la Escuela Primaria ... 488

16. Espacios vectoriales ... 491
1. Vectores fijos ... 491
2. Equipolencia de vectores fijos ... 494
3. Vector libre ... 498
4. Adición de vectores ... 501
5. Producto de números reales por vectores ... 507
6. Otras propiedades del producto de números reales por vectores ... 509
7. Base y coordenadas ... 510
8. Concepto de espacio vectorial ... 513
9. Un ejemplo de espacios vectoriales isomorfos ... 515
10. Uso de magnitudes no escalares en la Escuela ... 517

17. Grupo de los movimientos ... 519
1. Transformaciones geométricas ... 519
2. Traslaciones; propiedades ... 524
3. Giros; propiedades ... 527
4. Simetría axial; propiedades ... 531
5. Producto de transformaciones ... 533
6. Grupo de las traslaciones ... 536
7. Grupo de los giros concéntricos ... 538
8. Producto de dos simetrías axiales ... 540

9. Grupo de las traslaciones y giros ... 542
10. Grupo de las isometrías ... 545
11. Didáctica de los movimientos en la Escuela Primaria ... 550

18. Grupo equiforme ... 554
1. Homotecia ... 554
2. Grupo de las homotecias concéntricas ... 559
3. Grupo de las homotecias y traslaciones ... 561
4. Semejanza ... 567
5. Grupo equiforme ... 572
6. Didáctica de la semejanza en la Escuela Primaria ... 574

19. Instrumentos geométricos ... 578
1. Regla de un solo borde ... 578
2. Portasegmentos ... 578
3. Portaángulos; círculo graduado ... 579
4. Escuadra ... 580
5. Compás ... 581
6. Los instrumentos clásicos ... 582
7. Regla de bordes paralelos ... 584
8. Pantógrafo de Sylvester ... 585
9. Compás de reducción ... 587
10. Pantógrafo de Kempe ... 588
11. Instrumentos que realizan simetrías axiales ... 589
12. Instrumentos que realizan simetrías centrales ... 591
13. Papel que desempeñan los instrumentos en la enseñanza de la Geometría 591

20. Los problemas ... 592
1. Los problemas en la Matemática; su valor formativo y utilitario ... 592
2. Los problemas en la Escuela Primaria ... 593
3. Problemas geométricos: métodos más importantes para su resolución ... 596
4. Problemas aritméticos; métodos de resolución ... 602
5. Problemas algebraicos: Iniciación a la resolución de ecacuaciones en la Escuela Primaria ... 602

21. Material didáctico ... 606
1. Algunos ejemplos de material didáctico para la enseñanza de la Aritmética ... 606
2. Algunos ejemplos de material didáctico para la enseñanza de la Geometría ... 608
3. Modelos matemáticos sugeridos por el mundo que nos rodea ... 611
4. Construcciones de modelos. Modelos multivalentes ... 612
5. Juguetes de inspiración matemática ... 613
6. Films matemáticos ... 614
7. Papel de material didáctico en la enseñanza de la Matemática. Modelos 614

22. La Matemática y las edades escolares ... 616
1. La Matemática de la Escuela Maternal ... 616
2. La Matemática de los seis a los ocho años ... 617
3. La Matemática de los ocho a los diez años ... 617
4. La Matemática de los diez a los doce años ... 618
5. La Matemática de los doce a los catorce años ... 618

23. Errores del escolar 620
1. Errores más comunes que comete el escolar. Sus métodos correctivos ... 620
2. Algunos errores comunes de tipo aritmético y algebraico 621
3. Algunos errores comunes de tipo geométrico y topológico 622

24. Historia de la Matemática 623
1. Matemática pregriega 623
2. La época griega 624
3. La Matemática en la Edad Media 624
4. La Matemática en la Edad Moderna 624
5. La Matemática del siglo XIX 625
6. Situación actual de la Matemática 625

© Eugenio Roanes Macías - EDICIONES ANAYA, S. A. - 1976 - Salamanca: L. Braille, 4 - Número de Registro: M. 14.439 - 1976 - Depósito Legal: M. 40.948 - 1976 - ISBN: 84-207-1834-3 - Printed in Spain - Imprime: Gráficas Torroba - Villafranca del Bierzo, 21-23 - Polígono Industrial Cobo Calleja - Fuenlabrada (Madrid) - Papel: Torras Hostench, S. A.

Este libro ha sido aprobado por el MInisterio de Educación y Ciencia con fecha del 27-I-1970 "B. O. del M. E. C." del 31-I-1970).